بررسی استدلال ریاضی یک L-منحنی جدید برای تخمین پارامتر منظم‌سازی در روش TSVD

علیرضا کشوری، سید محمد حسینی؛
دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم، گروه آمار و ریاضی

دریافت ۹۱/۱۲/۱۳ پذیرش ۹۳/۱۲/۱۰

چکیده

روشی جدید برای پیدا کردن پارامتر بهینه در روش منظم‌سازی TSVD این است که از رسم منحنی بر حسب نرم مانده استفاده می‌کند [٥]. چون منظم‌سازی TSVD روشی با پارامتر منظم‌سازی گسسته است از این رو، این منحنی هم منحنی گسسته است. در این مقاله با بیان تجزیه و تحلیل ریاضی نشان داده می‌شود رفتار این منحنی L-شکل است و مانند روش L-منحنی کلاسیک نقطه گوشه این منحنی نیز می‌تواند متناظر با پارامتر منظم‌ساز بهینه باشد. برای پیدا کردن نقطهٔ گوشه L-منحنی (پارامتر بهینه) از دو روش پرونینگ[1] و ترینینگ[2] استفاده می‌کنیم. نتایج عددی نشان می‌دهد این منحنی بهتر از L-منحنی کلاسیک عمل می‌کند.

واژه‌های کلیدی: منظم‌سازی TSVD، L-منحنی گسسته، L-منحنی جدید

مقدمه

در بسیاری از کاربردهای علوم مختلف و مسائل واقعی، لازم است تا جواب دستگاه‌هایی به‌صورت

$$Ax = b \qquad A \in R^{m\times n} \tag{۱}$$

که A بسیار بدحالت و b آلوده به نویز است، یعنی

$$b = \bar{b} + e \tag{۲}$$

را به‌دست آوریم. بدحالتی ماتریس ضرایب A باعث می‌شود تا خطاهای بسیار کوچک در بردار سمت راست b باعث به‌وجود آمدن خطاهای بسیار بزرگی در جواب مسئله شوند. چون بردار b در طرف راست معادلهٔ (۱) آلوده به نویز است پس جواب به‌دست آمده با استفاده از روش‌های معمول نمی‌تواند تقریب مناسبی از جواب دستگاه بدون نویز باشد. بنا بر این دستگاه را با دستگاهی دیگر کم‌تر که به نویز در بردار سمت راست حساس باشد جای‌گزین می‌کنند، این عمل را منظم‌سازی می‌گویند. روش‌های منظم‌سازی با پارامتری کنترل می‌شود که آن‌را پارامتر منظم‌سازی می‌گویند. در بعضی روش‌های منظم‌سازی مانند تیخونوف این پارامتر پیوسته و در بعضی دیگر مانند روش منظم‌سازی تجزیه مقادیر تکین قطع شده، TSVD، این پارامتر گسسته است [۱]. روش TSVD دنباله‌ای از جواب x_k، که $k = 1$،2،...،p را تولید می‌کند و هدف اصلی، انتخاب بهینه پارامتر

*نویسنده مسئول alireza_keshvari@yahoo.com

1. pruning
2. triangle

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]

kاست. روش‌های مختلفی برای انتخاب پارامتر منظم‌سازی بهینه پیشنهاد شده‌اند، از جمله روش اصل تفاوت، اعتبار سنجی متقابل (GCV) و روش L-منحنی [۲].

روش L-منحنی نسبت به روش‌های دیگر کارایی بهتری دارد اما دارای مشکلاتی نیز هست از جمله برای مسائلی که جواب‌های هموارتری دارند، نتایج خوبی به‌دست نمی‌دهد [۳]. در این مقاله، روشی به همراه تجزیه و تحلیل ریاضی آن، برای تخمین پارامتر منظم‌سازی روش TSVD ارائه خواهد شد که از اطلاعات نرم مانده استفاده می‌کند. نتایج عددی کارایی این روش را در مقایسه با روش L-منحنی نشان خواهد داد.

مفاهیم اولیه

دستگاه (۱) را در نظر بگیرید تجزیه مقادیر تکین ماتریس A به‌صورت

$$A=U\Sigma V^T \qquad (۳)$$

است که در آن

$$U \in R^{m\times r}،$$

$$V \in R^{n\times r}،$$

$$r = \text{rank}(A).$$

و

$$\Sigma \in R^{r\times r}$$

ماتریسی قطری با عناصر قطری نزولی مثبت است یعنی

$$\sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0\ \sigma_1 \geq \qquad (٤)$$

شرط پیکارد (pc) : اگر برای دستگاه (۱) با استفاده از رابطهٔ (۳) داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\left|u_i^T b\right|^2}{\sigma_i^2} < \infty$$

آن‌گاه گوییم بردار سمت راست b در شرط پیکارد صدق می‌کند [۹].

شرط پیکارد گسسته (DPC) : اگر $\bar{b}$ بردار سمت راست دقیق دستگاه (۱) باشد آن‌گاه $\bar{b}$ در شرط پیکارد گسسته صدق می‌کند اگرضرایب فوریه $\left|u_i^T \bar{b}\right|$ به‌طور میانگین سریع‌تر از σ_iها به صفر میل کنند [۹].

قضیه وجودی پیکارد : فرض می‌کنیم T عمل‌گری پوشا، فشرده و خطی باشد. در این‌صورت معادله

$$Tf = g،$$

برای سمت راست داده شده g یک جواب دارد اگر و تنها اگر در شرط پیکارد صدق کند [۹].

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]

با توجه به قضیه و تعاریف مذکور، برای داشتن یک جواب در یک مسئله مانند (۱)، مسئله باید در شرط پیکارد صدق کند. به این معنی که ضرایب فوریه بدون نویز باید به‌طور متوسط سریع‌تر از مقادیر تکین به صفر میل کنند.

هم‌چنین در تمام روش‌های منظم‌سازی فرض بر این است که نویز موجود در بردار سمت راست در معادلهٔ (۱) یک نویز سفید است [۲]. نویز سفید یک متغیر تصادفی ناهم‌بسته است که هر یک از مؤلفه‌های آن دارای توزیع گاوسی با میانگین صفر و واریانس σ^2 است، یعنی $e = (e_1، \dots، e_m)$ یک بردار نویز سفید است هرگاه

$$E(e_i) = 0، \quad E\{e_i e_j\} = \sigma^2 \delta_{ij}، \quad 1 \le i، j \le m.$$

در نتیجه، $E(e) = 0$ و $cov(e) = \sigma^2 I$، که در آن E نشان‌دهندهٔ امید ریاضی و cov نشان‌دهندهٔ کوواریانس است.

منظم‌سازی TSVD

دستگاه (۱) را در نظر بگیرید. با توجه به روابط (۲) و(۳) جواب معادله را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T \bar{b}}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T e}{\sigma_i} v_i$$
$$= \bar{x} + x^e$$

چون $\bar{b}$ در شرط پیکارد صدق می‌کند، رفتار $u_i^T \bar{b}$ مشخص است و با افزایش اندیس، $u_i^T \bar{b}/\sigma_i$ کوچک می‌شود. حال رفتار $(u_i^T e)/\sigma_i$ را بررسی می‌کنیم. چون e نویز سفید است براحتی می‌توان اثبات کرد که:

$$cov\,(U^T e) = U^T cov(e) U = \sigma^2 U^T U = \sigma^2 I$$
$$E(U^T e) = 0.$$

عبارات مذکور نشان می‌دهند که $U^T e$ نیز یک نویز سفید است. از طرفی

$$E\{|u_i^T e|^2\} = cov\{u_i^T e\} = u_i^T cov(e) u_i = \sigma^2،$$

و در نتیجه

$$E\{|u_i^T e|\} \simeq \sigma.$$

بنا بر این، امید ریاضی مؤلفه‌های $|u_i^T e|$ برابر σ است. در نتیجه، e در شرط پیکارد صدق نمی‌کند، زیرا σ_iها با افزایش اندیس به صفر میل می‌کنند ولی $|u_i^T e|$ها تقریباً ثابت باقی می‌مانند. پس با افزایش اندیس، مقدار $|u_i^T e|/\sigma_i$ها افزایش پیدا کرده و باعث حضور بیش‌تر نویز در جواب می‌شوند.

در نتیجه مؤلفه‌های متناظر با اندیس‌های بزرگ، نقش بیش‌تری در انتشار نویز در جواب ایفا می‌کنند. پس فضای جواب $\{v_1، v_2، \dots v_n\}$ را می‌توان به دو زیرفضا تقسیم کرد. چون بردارهای متناظر با مقادیر تکین کوچک (اندیس بزرگ) در انتشار نویز در جواب بیش‌ترین نقش را دارند در نتیجه روش منظم‌سازی TSVD امیدوار است تا به‌ازای اندیسی مناسب k، با تصویر کردن جواب به فضای تولید شده با بردارهای $\{v_1، v_2، \dots v_k\}$ بتواند هم‌زمان هم تقریب مناسبی از جواب را به‌دست آورده و هم از انتشار نویز در جواب جلوگیری کند. در نتیجه جواب تصویر شده به این فضا بدین‌صورت است:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i ، \quad k = 1،2، \dots ،r$$

یا به‌عبارت دیگر:

$$x_k = VF\Sigma^{-1}U^T b,$$

که F ماتریس فیلتر روش منظم‌سازی TSVD است و بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$F = \mathrm{diag}\,(f_1،f_2، \dots ،f_r)،$$

که

$$f_i = \begin{cases} 1 & i \le k \\ 0 & i > k. \end{cases}$$

در روش TSVD بعد فضای $\{v_1،v_2، \dots v_k\}$ به‌عنوان پارامتر منظم‌سازی مطرح می‌شود. انتخاب درست پارامتر منظم‌سازی تأثیر زیادی در قابل قبول بودن جواب دستگاه منظم‌شده دارد و اگر مناسب انتخاب نشود، منظم‌سازی نه تنها مفید نخواهد بود بلکه حتی ممکن است وضعیت را بدتر کند[۲].

L-منحنی

یکی از روش‌های ارائه شده برای پیدا کردن پارامتر منظم‌سازی بهینه در روش TSVD، روش L-منحنی است. روش L-منحنی بر پایهٔ رسم نموداریست که از وصل کردن نقاط دنباله

$$p_k = \left(\|r_k\|،\|x_k\|\right)، \quad k = 1،2، \dots ،r،$$

با خطوط مستقیم به‌دست می‌آید. r_k مانده مسئله در x_k است، یعنی:

$$r_k = b - Ax_k.$$

از رفتار این منحنی برای تخمین پارامتر k استفاده می‌کنند. نام دادن L-منحنی به منحنی $\left(\|r_k\|,\|x_k\|\right)$ به این دلیل است که رفتار این منحنی شبیه حرف لاتین L است و از دو قسمت عمودی و افقی تشکیل شده است. قسمت عمودی L-منحنی متناظر با جواب‌هایی است که در آن خطای نویز در جواب غالب است اما قسمت افقی L-منحنی متناظر با جواب‌هایی است که خطای منظم‌سازی در جواب غلبه دارد. در این‌جاست که گوشهٔ این منحنی می‌تواند انتخاب مناسبی برای پارامتر k باشد، چون قبل از گوشهٔ منحنی حالت عمودی داشته و غلبه با نویز است. از طرف دیگر، پس از گوشه منحنی حالت افقی پیدا کرده و اگر چه اثر نویز در جواب کنترل می‌شود اما خطای منظم‌سازی افزایش پیدا می‌کند و گوشه در واقع جایی است که این تغییر وضعیت صورت می‌گیرد. بنا بر این نقطه گوشه می‌تواند تعادل مناسبی بین مینیمم‌سازی خطای نویز و خطای منظم‌سازی ایجاد کند و k متناظر با آن نیز می‌تواند به‌عنوان پارامتر منظم‌سازی به‌کار رود. هانسن برای اولین باراطلاق نام L-منحنی و بررسی خواص این منحنی و چگونگی استفاده از آن برای تخمین پارامتر منظم‌سازی را انجام داد [۴].

L-منحنی جدید

در این بخش نشان می‌دهیم که با استفاده از خواص و رفتار نرم مانده در ازای مقادیر مختلف k می‌توان پارامتر منظم‌سازی مناسب برای روش منظم‌سازی TSVD پیدا کرد. در ادامه منحنی $\left(k,\|r_k\|^2\right)$را بررسی

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]

کرده و نشان می‌دهیم که منحنی نزولی و محدب است و شکلی شبیه L دارد. سادک و ریشل این منحنی را اولین بار ارائه کردند [۵] اما بدون این‌که تجزیه تحلیل خاصی از فرم منحنی ارائه شده باشد. همچنین نشان می‌دهیم این منحنی نیز مشابه L-منحنی دارای دو قسمت عمده است یکی قسمت مسطح و افقی که در آن خطای نویز در جواب غالب است و دیگری قسمت عمودی که در آن نرم باقی‌مانده به تغییرات کوچک k حساس است و خطای منظم‌سازی در جواب غلبه دارد. همچنین کنج منحنی که جدا کننده این دو قسمت است می‌تواند انتخاب خوبی برای پارامتر منظم‌سازی باشد. برای نشان دادن این موضوع‌ها از ایدهٔ بیان شده در مقالهٔ [۱۰] که برای L-منحنی‌های پیوسته است استفاده می‌کنیم.

برای شروع ابتدا x_k، جواب مسئله منظم‌سازی TSVD را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$x_k = \bar{x}_k + x_k^e,$$

که در آن $\bar{x}_k = \left(V_r F \Sigma^{-1} U_r^T \bar{b}\right)$ نسخه منظم‌شده جواب دقیق $\bar{x}$ است. همچنین $x_k^e = \left(V_r F \Sigma^{-1} U_r^T e\right)$ نشان دهنده عامل نویز در جواب منظم‌شده x_k است. در واقع:

$$\bar{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^T \bar{b}}{\sigma_i} v_i، \quad x_k^e = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^T e}{\sigma_i} v_i.$$

بر همین اساس داریم:

$$r_k = \bar{r}_k + r_k^e,$$

به‌طوری‌که

$$\bar{r}_k = \sum_{i=k+1}^{m} \left(u_i^T \bar{b}\right) \mu_i, \quad r_k^e = \sum_{i=k+1}^{m} \left(u_i^T e\right) \mu_i.$$

در این بخش رفتار نرم‌های $\bar{r}_k$ و r_k^e و نیز تأثیر آن‌ها بر رفتار نرم r_k را بررسی کرده و نشان خواهیم داد به‌ازای چه k هایی r_k^e بر باقی‌مانده r_k غلبه دارد و به‌ازای چه مقادیری از k، $\bar{r}_k$ در r_k حضور بیش‌تری دارد. برای این‌کار کمیت‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\rho(k) = \|r_k\|^2,$$
$$\bar{\rho}(k) = \|\bar{r}_k\|^2,$$
$$\rho^e(k) = \|r_k^e\|^2.$$

داریم:

$$\rho(k) = \sum_{i=k+1}^{m} \left(u_i^T b\right)^2,$$

بنا بر این $\rho(k)$ تابعی نزولی از k است. به‌عبارت دیگر منحنی $\left(k, \|r_k\|^2\right)$ منحنی نزولی است. این منحنی شامل r نقطه

$$P_k = \left(k, \|r_k\|^2\right), \quad k = 1, 2, \ldots, r,$$

است که با خطوط مستقیم به‌هم وصل شده‌اند. در نتیجه شامل $r-1$ پاره‌خط است. حال برای پاره‌خط j ام که از وصل کردن نقطه‌های

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]

$$j = 1, 2, \ldots, r-1, \quad \begin{cases} P_j = \left(j, \|r_j\|^2 \right), \\ P_{j+1} = \left(j+1, \|r_{j+1}\|^2 \right), \end{cases}$$

به‌دست می‌آید، میزان تغییرات محور x ها برابراست با:

$$(j \quad + \quad) - j \quad =$$

همچنین میزان تغییرات نرم باقی‌مانده، محور y ها برابر است با:

$$\Delta\rho(j) = -\left(u_{j+1}^T b\right)^2,$$

پس با توجه به تعریف شیب پارەخط، شیب پارەخط j ام برابر است با:

$$s_j = -\left(u_{j+1}^T b\right)^2.$$

برای سادگی و بدون کاستن از کلیت، چون طبق فرض $\bar{b}$ در شرط پیکارد صدق می‌کند رفتار $\left|u_i^T \bar{b}\right|$ را به‌صورت

$$\left|u_i^T \bar{b}\right| = \sigma_i^{p+1},$$

شبیه‌سازی می‌کنیم در این‌جا p یک عدد مثبت فرض می‌شود، زیرا با این فرض عبارت

$$\frac{\left|u_i^T \bar{b}\right|}{\sigma_i} = \sigma_i^p,$$

با افزایش اندیس به صفر میل می‌کند که نشان‌دهنده برقراری شرط پیکارد است. به‌همین دلیل این فرض قابل قبول استو پایهٔ بسیاری از پژوهش‌ها در زمینهٔ مسائل بدوضع است [۲]. همچنین چون طبق فرض نویز e از نوع نویز سفید است، داریم:

$$\left|u_i^T e\right| \approx 1.$$

حال با توجه به این فرضیه‌ها می‌توان این تقریب را برای شیب پاره خطها به‌دست آورد:

$$s_j = -\left(\sigma_{j+1}^{p+1} + 1\right)^2.$$

با توجه به رابطهٔ:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0,$$

برای σ_i ها، s_j ها در این رابطه صدق می‌کنند:

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{r-1} < 0.$$

در واقع $\{s_j\}$ دنباله‌ای صعودی با عناصر منفی است که نشان می‌دهد منحنی شبیه به یک منحنی محدب است. به سادگی می‌توان نزولی و محدب بودن منحنی‌های $\left(k, \bar{\rho}(k)\right)$ و $\left(k, \rho^e(k)\right)$ را نیز به‌طور مشابه اثبات کرد. اگر چه همهٔ این منحنی‌ها نزولی و شبیه یک منحنی محدب هستند اما چون خواص دیگر آن‌ها مانند مقدار شیب، به بردار سمت راست بستگی دارد به بررسی دقیق‌تر رفتار این منحنی‌ها به‌طور جداگانه می‌پردازیم. با توجه به فرضیات مطرح شده، می‌توان این تقریب‌ها را به‌دست آورد:

$$\rho^e(k) = \sum_{i=k+1}^{m} \left(u_i^T e\right)^2 \approx \sum_{i=k+1}^{m} 1,$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]

$$\bar{\rho}(k) = \sum_{i=k+1}^{m} \left(u_i^T \bar{b}\right)^2 \approx \sum_{i=k+1}^{m} \sigma_i^{2(p+1)},$$

$$\rho(k) = \sum_{i=k+1}^{m} (u_i^T b)^2 \approx \sum_{i=k+1}^{m} (\sigma_i^{P+1} + 1)^2$$

در روابط مذکور $\sum_{i=k+1}^{m} \sigma_i^{2(p+1)}$ تحت تأثیر $\sigma_k^{2(p+1)}$ است. بنا بر این می‌توان عدد ثابت α را طوری پیدا کرد که

$$\sum_{i=k+1}^{m} \sigma_i^{2(p+1)} \approx \alpha \sigma_k^{2(p+1)}.$$

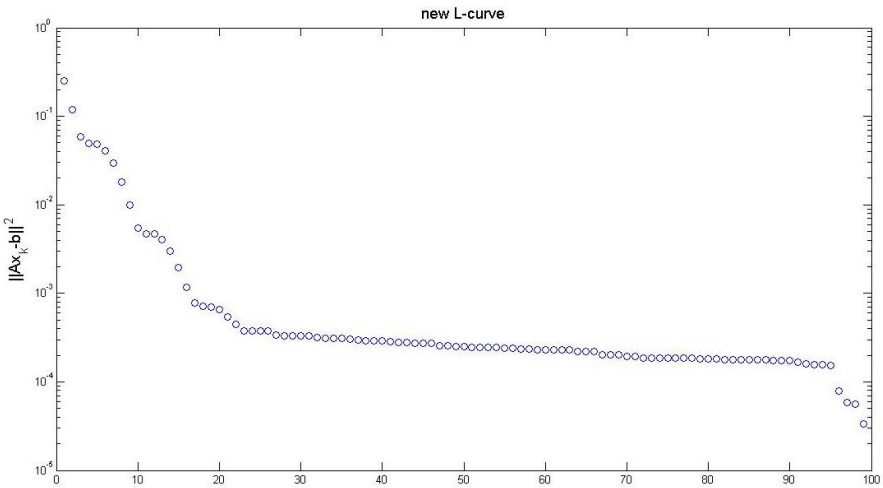
با جای‌گذاری این تقریب در نهایت این تقریب‌ها به‌دست می‌آید:

$$\rho^e(k) \approx m - k,$$
$$\bar{\rho}(k) \approx \alpha_1 \sigma_k^{2(p+1)},$$
$$\rho(k) \approx \alpha_2 \sigma_k^{2(p+1)} + m - k.$$

از مقایسهٔ این تقریب‌ها مشاهده می‌شود که وقتی k به 1 میل کند رفتار $\rho(k)$ بسیار شبیه رفتار $\bar{\rho}(k)$ است و با رفتار $\rho^e(k)$ تفاوت دارد. از طرف دیگر با افزایش k از اثر عبارت $\alpha_2 \sigma_k^{2(p+1)}$ در $\rho(k)$ کاسته شده و تناسبی رفتاری بین $\rho^e(k)$ و $\rho(k)$ را می‌توان مشاهده کرد. این امر نشان می‌دهد که برای k های بزرگ حضور نویز در جواب زیاد است. بنا بر این جایی که این تغییر ایجاد می‌شود پیشنهاد خوبی برای تخمین پارامتر منظم‌سازی است. همانند روش L-منحنی کنج این منحنی جایی است که این تغییر رفتار ایجاد می‌شود. به‌عنوان مثال نمودار L-منحنی جدید برای مثال $heat(100)$ از [۸] در شکل ۱ نشان داده شده است.

نتایج عددی

در این بخش کارایی L-منحنی جدید را در مقایسه با L-منحنی کلاسیک، برای پیدا کردن پارامتر منظم‌سازی بهینه نشان می‌دهیم. برای پیدا کردن نقطه گوشه در این L-منحنی‌ها از دو روش *pruning* و *triangle* استفاده می‌کنیم [۶]، [۷].



شکل ۱. نمودار L-منحنی جدید برای مثال heat(100)

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]

برای شبیه‌سازی خطاهای اندازه‌گیری بردار سمت راست دقیق با نویز e آلوده می‌شود که e نویزی گاوسی است و

$$\frac{\|e\|}{\|\bar{b}\|} = 5\times 10^{-j}, \quad j \geq 0.$$

همچنین برای ارزیابی کیفیت جواب به‌دست آمده، جواب بهینه x_{k^*} را از این طریق به‌دست می‌آوریم:

$$k^* = \arg\min_k \frac{\|\bar{x} - x_k\|}{\|\bar{x}\|}.$$

مثال ۱. معادله انتگرالی

$$\int_0^\infty \exp(-st)x(t)dt = \frac{2}{2s+1}, \quad s \geq 0,$$

دارای جواب

$$x(t) = \exp\left(\frac{-t}{2}\right),$$

است. این معادله را با استفاده از دستور ilaplace(n) [۸]، گسسته‌سازی کرده، ماتریس ضرایب دستگاه به‌دست آمده $A \in R^{n\times n}$ و جواب دقیق $\bar{x}$ است. بردار سمت راست بدون خطا را از رابطهٔ $\bar{b} = A\bar{x}$ به‌دست می‌آوریم. برای حالت $n = 64$ و $j = 2$ بردار نویز را به‌طور تصادفی تولید کرده و به بردار سمت راست دقیق اضافه می‌کنیم. دستگاه جدید را با روش منظم‌سازی TSVD حل کرده و جواب بهینه را با کمک L-منحنی کلاسیک و L- منحنی جدید و استفاده از دو روش pruning و triangle برای پیدا کردن نقطهٔ گوشه، انتخاب می‌کنیم. نتایج در جدول ۱ نشان داده شده است. خطا را بدین‌صورت محاسبه می‌کنیم:

$$\|x_k - \bar{x}\|.$$

چنان‌که در جدول مشخص است L-منحنی جدید بهتر از L-منحنی کلاسیک عمل می‌کند و نقطهٔ گوشه انتخاب شده با L-منحنی جدید خطای کم‌تری دارد. برای حالت $n = 300$ و $j = 3$ نیز مانند حالت بالا عمل می‌کنیم و نتایج را در جدول ۲ نشان می‌دهیم. چنان‌که قابل مشاهده است در این حالت L-منحنی جدید بهتر عمل کرده و نقطهٔ بهینه را $(k^* = 12)$ انتخاب می‌کند.

جدول ۱. $k^* = 4$

L-منحنی	روش پیدا کردن نقطه گوشه	نقطه گوشه	خطا
جدید	*Triangle*	۳	۴۳×۱۰^{-۲}
جدید	*Pruning*	۳	۴۳×۱۰^{-۲}
کلاسیک	*Triangle*	۵	۵۵×۱۰^{-۲}
کلاسیک	*Pruning*	۵	۵۵×۱۰^{-۲}

جدول ۲. $k^* = 12$

L-منحنی	روش پیدا کردن نقطه گوشه	نقطه گوشه	خطا
جدید	*Triangle*	۱۲	۵۲×۱۰^{-۲}
جدید	*Pruning*	۱۲	۵۲×۱۰^{-۲}
کلاسیک	*Triangle*	۹	۵۶×۱۰^{-۲}
کلاسیک	*Pruning*	۹	

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]

مثال ۲. معادلهٔ انتگرال نوع اول زیر را در نظر بگیرید

$$\int_{-6}^{6} K(s,t)f(t)dt = g(s), \quad -6 \le s \le 6,$$

که در آن هسته، سمت راست و جواب مسئله معادله بدین‌صورت هستند:

$$K(s,t) = x(s-t)$$

$$g(s) = (6-|s|)\left(1+\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{3}s)\right)+\frac{9}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}|s|\right),$$

$$f(t) = \begin{cases} 1+\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right), & |t|<3 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

این معادله را با استفاده از دستور philips(n) [۸]، گسسته‌سازی و مانند مثال ۱عمل می‌کنیم. نتایج را برای حالت $n=100$ و $j=4$ در جدول ۳ و برای حالت $n=40$ و $j=2$ در جدول ۴ نشان می‌دهیم. چنان‌که در جدول‌های ۳ و ٤ مشخص است برای این مثال نیز L-منحنی جدید بهتر عمل می‌کند و خطای کم‌تری دارد.

جدول ۳. $k^*=12$

L-منحنی	روش پیدا کردن نقطه گوشه	نقطه گوشه	خطا
جدید	*triangle*	۹	۳×۱۰^{-۲}
جدید	*pruning*	۹	۳×۱۰^{-۲}
کلاسیک	*triangle*	۴۰	۹۹×۱۰^{-۲}
کلاسیک	*pruning*	۴۰	۵۵×۱۰^{-۲}

جدول ٤: $k^*=7$

L-منحنی	روش پیدا کردن نقطه گوشه	نقطه گوشه	خطا
جدید	*triangle*	۶	۳۳×۱۰^{-۲}
جدید	*pruning*	۶	۳۳×۱۰^{-۲}
کلاسیک	*triangle*	۸	۴۰×۱۰^{-۲}
کلاسیک	*Pruning*	۹	۶۰×۱۰^{-۲}

نتیجه‌گیری

چنان‌که بیان شد منظم‌سازی یکی از روش‌های مناسب برای حل دستگاه‌هایی است که به‌دلیل شرایط آن نمی‌توان از روش‌های معمول برای حل آن استفاده کرد. منظم‌سازی وابسته به پارامتری است که انتخاب بهینه این پارامتر نقش اساسی در قابل قبول بودن جواب محاسبه شده دارد. L-منحنی یکی از روش‌های مفید برای پیدا کردن پارامتر بهینه است. البته L-منحنی اشکالاتی نیز دارد و برای بعضی از مسائل به‌خوبی عمل نمی‌کند.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]

در این مقاله به بررسی استدلال ریاضی L-منحنی جدید برای تخمین پارامتر منظم سازی بهینه پرداختیم و چنان‌که اثبات کردیم این L-منحنی به‌صورت L شکل است. از پارامتر متناظر با گوشه این L-منحنی می‌توان به‌عنوان پارامتر منظم‌سازی بهینه استفاده کرد. و در پایان با کمک چند مثال کارایی بهتر این L-منحنی را نسبت به L–منحنی کلاسیک نشان دادیم.

منابع

1. Engl H.W., Hanke M., neubauer A., "regularization of Inverse Problems, kluwer", Dordrecht (1996).
2. Hansen P.C., "Ranked-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems", SIAM, Philadelphia (1998).
3. Hansen P.H., "The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems, invited chapter, in: P. Johnston (Ed), Computational Inverse Problems in Electrocadiology", WIT Press, Southampton (2001) 119-142
4. Hansen P.C., Oleary D.P., "The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems", SIAM J. Sci. Comput, 14 (1993) 1487-1503.
5. Reichel L., Sadok H., "A new L-curve for ill-posed problems, Journal of Computational and Applied Mathematics", 219 (2008) 493-508
6. Hansen P.C., Jensenand T.K., Rodriguez G., "An adaptive pruning algorithm for the discrete L-curve criterion", J. Comput. Appl. Math, 198 (2007) 483-492.
7. Castellanos J.L., Gomez S., Guerra V., "The triangle method for finding the corner of the L-curve", Appl. Numer. Math., 43 (2002) 359-373.
8. Hansen P.C., "Regularization tools: a MATLAB package for analysis and solution of discrete ill-posed problems", numer. Algorithms, 6 (1994) 1-35. Software is available in Netlib at http://www.netlib.org.
9. Hansen P.C., "The discrete Picard condition for discrete ill-posed problems", BIT, 30 (1990) 658-672.
10. Rezghi M., Hosseini S.M., "A new variant of L-curve for Tikhonov regularization", Journal of Computational and Applied Mathematics 231 (2009) 914-924

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.1.6.0]
[DOI: 10.29252/mmr.1.1.75]