کاربرد برخی تبدیلات انتگرالی و توابع فوق هندسی چندگانه در مدل‌بندی و توزیع میانگین وزنی تصادفی برخی متغیرهای تصادفی

رسول روزگار؛ دانشگاه یزد، گروه آمار

دریافت ۹۵/۰۶/۰۷ پذیرش ۹۵/۱۰/۱۹

چکیده

مدل‌بندی و پیدا کردن توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی مختلف، به‌دلیل تصادفی بودن وزن‌ها با استفاده از روش‌های معمول و رایج آماری کاری نسبتاً سخت و پیچیده است و حتی در حالتی‌که اندازهٔ نمونه تصادفی برابر ۲ است ($n = 2$) توزیع صریح و به شکل بسته‌ای وجود ندارد. در این مقاله توزیع میانگین وزنی تصادفی خانواده‌ای از توزیع‌های بتا، نرمال و گاما را در حالت $n \geq 2$ با استفاده از برخی تبدیل‌های انتگرالی و هم‌چنین توابع فوق هندسی چندگانه به شکل صریح به‌دست آورده و در ادامه نتایجی را برای پیدا کردن توزیع و برخی مشخصه‌های دیگر میانگین وزنی تصادفی از این متغیرهای تصادفی ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: میانگین وزنی تصادفی، تبدیل استیلتایس، توابع فوق هندسی چندگانه، توزیع بتا، توزیع گاما، توزیع نرمال.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲E۱۵، ۴۶F۱۲، ۶۰E۰۵.

مقدمه

میانگین وزنی تصادفی از دو متغیر تصادفی پیوسته و مستقل X_1 و X_2 به‌صورت $Z = WX_1 + (1 - W)X_2$ در نظر گرفته می‌شود که متغیر وزنی W دارای توزیع یک‌نواخت روی بازهٔ $(0,1)$ و مستقل از متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 است. این نوع میانگین اولین بار توسط ون اشه [۱] معرفی شد. سپس جانسون و کاتز [۲] توزیع این میانگین را برای حالتی‌که X_1 و X_2 دارای توزیع یک‌نواخت، نرمال و کوشی هستند به‌دست آوردند. توزیع میانگین وزنی تصادفی در حالتی‌که اندازهٔ نمونه تصادفی برابر ۲ است کاربردهای فراوانی در مسائل زیست‌محیطی به‌ویژه در تحلیل داده‌های مرکب دارد. دی‌سالوو و لوویسون [۳] توزیع Z را به‌صورت غیرصریح و بر اساس یک انتگرال زمانی‌که X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیعی از توزیع گاما، $G(\alpha, \lambda)$، هستند و هم‌چنین متغیر وزنی W از توزیع بتا، $Be(\beta, \beta)$، تبعیت کند پیدا کردند و توانستند تنها نمودار تابع چگالی Z را به‌صورت عددی (و نه تحلیلی) برای برخی مقادیر مختلف پارامترهای α, λ و β رسم کنند.

تعمیم و بررسی میانگین وزنی تصادفی به بیش از دو متغیر تصادفی ($n > 2$)، را اولین بار سلطانی [۴] و سلطانی و روزگار [۵] به‌کار گرفتند. میانگین وزنی تصادفی از تعداد متناهی متغیرهای تصادفی پیوسته و مستقل $X_1, \ldots, X_n$ با وزن‌هایی که برش‌هایی از بازه $(0,1)$ به‌نام فاصله‌ها هستند به‌صورت (۱) تعریف می‌شود:

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} W_i X_i, \qquad (۱)$$

*نویسندهٔ مسئول rroozegar@yazd.ac.ir

به‌طوری‌که وزن‌های تصادفی W_i به‌صورت $W_i = U_{(i)} - U_{(i-1)}$ برای $i = 1,2, \dots , n$ و با شرط $\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$ در نظر گرفته می‌شوند و $U_{(1)}, \dots , U_{(n-1)}$ آماره‌های ترتیبی متناظر با نمونه تصادفی $U_1, \dots , U_{n-1}$ از توزیع یک‌نواخت روی بازه $(0,1)$ و مستقل از $X_1, \dots , X_n$ هستند. ($U_{(0)} = 0$ و $U_{(n)} = 1$).

سلطانی و روزگار [۵] نشان دادند که تبدیل استیلتایس تعمیم یافته توزیع متغیر تصادفی Z_n (میانگین وزنی تصادفی) را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب تبدیل‌های استیلتایس (معمولی) متغیرهای تصادفی $X_1, \dots , X_n$ به‌صورت (۲) نوشت:

$$\mathcal{S}[F; n](z) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{S}[F_i; 1](z), \tag{۲}$$

به‌طوری‌که در این رابطه منظور از F و F_i به‌ترتیب تابع توزیع متغیرهای تصادفی Z_n و X_i هستند و این تبدیل انتگرالی نیز بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\mathcal{S}[F; n](z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(z-x)^n} dF(x), \qquad z \in \mathbb{C} \cap (supp\ F)^C,$$

که منظور از $\mathbb{C}$ مجموعهٔ اعداد مختلط و منظور از $supp\ F$ تکیه‌گاه تابع توزیع F است. سپس با به‌کارگیری رابطهٔ (۲) توانستند توزیع میانگین وزنی از متغیرهای تصادفی کوشی و آرک‌سینوس را برای حجم نمونه دل‌خواه به‌دست آورند.

روزگار و سلطانی [۶] با توجه به رابطهٔ (۲) نشان دادند که کلاس وسیعی از توزیع‌ها به‌نام توزیع‌های شبه‌توانی دایره‌ای که شامل توزیع‌های یک‌نواخت، آرک‌سینوس و ویگنر نیز می‌شود توزیع میانگین وزنی تصادفی هستند. تعمیم دیگری از رابطهٔ (۱) زمانی است که وزن‌های تصادفی $(W_1, \dots , W_n)$ از توزیع دیریخله تبعیت می‌کند، که این تعمیم را روزگار [۷] و [۸] معرفی کرد و برای $n > 2$، توزیع این نوع میانگین وزنی تصادفی توسط جملاتی از تبدیل کوشی- استیلتایس به‌دست آمد. هم‌چنین کاربرد این رابطه در قالب سه مثال در این مقاله ارائه شد.

میانگین وزنی تصادفی کاربردهای زیادی در بخش‌های مختلف علوم و مهندسی از جمله زیست‌شناسی، ژنتیک، مالی و... دارد. از جمله کاربردها می‌توان به پژوهش‌های چن و جین [۹]، دی‌سالوو و لوویسون [۳] اشاره کرد. هم‌چنین کاربردهای دیگری در نمونه‌گیری، برآوردگرهای تابع چگالی و تحلیل بیزی می‌توان یافت. به‌عنوان مثال در نظریهٔ رگرسیون و شبکه‌های عصبی، براوردگرهای تابع چگالی در حالت چندمتغیره و هسته رگرسیون چندمتغیره نمونه‌هایی از میانگین وزنی تصادفی هستند. کاربردهای بیش‌تر را می‌توان در پژوهش سلطانی و روزگار [۵] و مراجع موجود در آن ملاحظه کرد.

تعاریف و روابط مورد نیاز

انجام محاسبات در این مقاله نیازمند داشتن تعاریف و ویژگی‌های برخی توابع خاص است که از جمله آن‌ها می‌توان به تابع لاریسلا[1] اشاره کرد. این تابع که نقش مهمی را در حل مسائل مربوط به پیدا کردن توزیع میانگین وزنی تصادفی ایفا می‌کند به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

1. Lauricella function

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.4.2]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.37]

$$F_{\mathrm{D}}(a;\ b_1,\dots,b_n;c;z_1,\dots,z_n)=\sum_{i_1=0}\sum_{i_2=0}\cdots\sum_{i_n=0}\frac{(a)_{i_1+\cdots+i_n}(b_1)_{i_1}\dots(b_n)_{i_n}}{(c)_{i_1+\cdots+i_n}}\frac{{z_1}^{i_1}}{i_1!}\cdots\frac{{z_n}^{i_n}}{i_n!},$$

به‌طوری‌که منظور از $(z)_k$ نماد پاکه‌مر[1] یا فاکتوریال صعودی است و بدین‌صورت تعریف می‌شود: ($(z)_0=1$)

$$(z)_k=z(z+1)\cdots(z+k-1)=\frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(k)}.$$

شکل هم‌ریخت[2] تابع لاریسلا چهارم که اردلی [۱۰] معرفی کرده است بدین‌صورت است:

$$_n\Phi(\ b_1,\dots,b_n;c;z_1,\dots,z_n)=\sum_{m_1=0}\sum_{m_2=0}\cdots\sum_{m_n=0}\frac{(b_1)_{m_1}\dots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\cdots+m_n}}\frac{{z_1}^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{{z_n}^{m_n}}{m_n!}.$$

هم‌چنین سری فوق هندسی $_pF_q$ (حالت خاصی از تابع لاریسلا) نیز زمانی‌که سری هم‌گرا باشد عبارت است از:

$$_pF_q\big(\alpha_1,\dots,\alpha_p;\ \beta_1,\dots,\beta_q;z\big)=\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

سری فوق هندسی گاوسی $_2F_1$ که حالت خاصی از رابطهٔ مذکور است نقش اساسی را در ادامه محاسبات ایفا می‌کند و دارای نمایش انتگرالی بدین‌صورت است:

$$_2F_1(\alpha,\beta;\ \gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1\frac{u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}}{(1-uz)^{-\alpha}}\ du.$$

با توجه به تعریف سری فوق هندسی گاوسی و نمایش انتگرالی فوق مشاهده می‌شود که

$$_2F_1(\alpha,\beta;\ \gamma;z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\ {}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\ \gamma;z).$$

ویژگی‌های بیش‌تر این توابع را می‌توان در بخش ۹ کتاب گرادشتاین و ریژیک [۱۱] و هم‌چنین فصل ۱۵ کتاب آبراموتیز و استیگان [۱۲] جستجو کرد.

الماسی و همکاران [۱۳] نشان دادند که تابع چگالی مجموع وزنی (غیرتصادفی) متغیرهای تصادفی گاما را می‌توان به‌صورت (۳) بیان کرد:

$$f_Z(z)=\frac{\beta^{\alpha^*}}{\prod_{i=1}^k {w_i}^{\alpha_i}\Gamma(\alpha^*)}z^{\alpha^*-1}\exp\left(-\frac{\beta}{w_k}z\right)\,{}_{[k-1]}\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1};\ \alpha^*;\ u_1,\dots,u_{k-1}),\qquad (۳)$$

به‌طوری‌که $u_i=\frac{\beta z}{w_k}(1-\frac{w_k}{w_i})$ ، $w_k<w_i$ برای $i=1,2,\dots,k-1$ و $\alpha^*=\sum_{i=1}^k\alpha_i$ است. در رابطهٔ مذکور $Z=\sum_{i=1}^k w_iX_i$ است که X_iها متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که از توزیع گاما با پارامترهای α_i و β یعنی $X_i\sim G(\alpha_i,\beta)$، تبعیت می‌کنند. هم‌چنین تابع مولد گشتاور مجموع وزنی Z به‌صورت (۴) است:

$$M_Z(t)=\prod_{i=1}^k(1-\frac{t}{\beta}w_i)^{-\alpha_i}.\qquad (۴)$$

در ادامه این مقاله تابع چگالی متغیر تصادفی بتا با پارامترهای γ و β روی بازه [-1,1] را بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$f_X(x;\ \gamma,\beta)=\frac{\Gamma(\gamma+\beta+2)}{2^{\gamma+\beta+1}\ \Gamma(\gamma+1)\Gamma(\beta+1)}(1-x)^{\gamma}\ (1+x)^{\beta},\quad -1\leq x\leq 1,$$

به‌طوری‌که $\gamma>-1$ و هم‌چنین $\beta>-1$. درحالتی‌که $\beta=\gamma=\frac{1}{2}$ باشد این توزیع به توزیع ویگنر (شبه دایره‌ای[1]) تبدیل می‌شود. هم‌چنین زمانی‌که $\beta=\gamma=-\frac{1}{2}$ است این توزیع به توزیع آرک‌سینوس تبدیل می‌شود.

1. Pochhammer symbol
2. Isomorph form

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.4.2]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.37]

نتایج اصلی

در این بخش توزیع ردهٔ مهمی از میانگین وزنی تصادفی را به‌دست می‌آوریم. ابتدا توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی بتا را به شکل بسته به‌دست آورده و در ادامه تابع توزیع، تابع مولد گشتاور و گشتاور m-ام میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای گاما را به‌صورت نمایش انتگرالی بیان می‌کنیم. در نهایت نیز تبدیل استیلتایس تعمیم یافته توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای نرمال را ارائه می‌کنیم.

قضیهٔ ۱: اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقلی باشند که دارای توزیع بتا با پارامترهای $\theta - 1$ و $-\theta$ روی بازهٔ (1,1-) باشند ($0 < \theta < 1$) آن‌گاه میانگین وزنی تصادفی به‌صورت (۱) دارای توزیع بتا با پارامترهای $\theta n - 1$ و $(1-\theta)n - 1$ روی بازهٔ (1,1-) است.

اثبات: تبدیل استیلتایس توزیع بتا با پارامترهای$\theta - 1$ و $-\theta$ برابر است با:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{z-x} f\left(x; \theta - 1, -\theta\right) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{z-x} \frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(1-\theta)} (1-x)^{\theta-1}(1+x)^{-\theta}\, dx$$
$$= \frac{1}{(z-1)^{1-\theta}} \frac{1}{(z+1)^{\theta}}.$$

بنا براین سمت راست رابطهٔ (۲) برابر است با $\left[\frac{1}{(z-1)^{1-\theta}} \frac{1}{(z+1)^{\theta}}\right]^n$. حال طبق رابطهٔ (۲)، کافی است نشان دهیم که این عبارت تبدیل استیلتایس تعمیم‌یافته توزیع بتا با پارامترهای $\theta n - 1$ و $(1-\theta)n - 1$ است. با توجه به نمایش انتگرالی سری فوق‌هندسی گاوسی ${}_2F_1$ ، تبدیل استیلتایس تعمیم‌یافته توزیع بتا (F) با پارامترهای γ و β روی بازهٔ (1,1-) برابر است با

$$\mathcal{S}[F;n](z) = \frac{1}{(z-1)^n}\ {}_2F_1\left(n, \gamma+1;\ \gamma+\beta+2\,; \frac{2}{1-z}\right).$$

با درنظر گرفتن $n = \gamma + \beta + 2$ داریم:

$$\mathcal{S}[F;n](z) = \frac{1}{(z-1)^n}\ {}_2F_1\left(n, \gamma+1;\ n\,; \frac{2}{1-z}\right) = \frac{1}{(z-1)^{n-\gamma-1}}\ \frac{1}{(z+1)^{\gamma+1}}.$$

هم‌چنین با قرار دادن $\gamma = n\theta - 1$ داریم:

$$\mathcal{S}[F;n](z) = \frac{1}{(z-1)^{n-n\theta}} \frac{1}{(z+1)^{n\theta}} = \left[\frac{1}{(z-1)^{1-\theta}} \frac{1}{(z+1)^{\theta}}\right]^n,$$

و بنا براین قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه ۱ که قضیهٔ اصلی روزگار و سلطانی است [۶]، به‌صورت نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱ با قرار دادن $\theta = \frac{1}{2}$ به راحتی ثابت می‌شود.

نتیجه ۱: اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که دارای توزیع آرک‌سینوس روی بازه (1,1-) هستند آن‌گاه میانگین وزنی تصادفی به‌صورت (۱) دارای توزیع بتا با پارامترهای $\gamma = \beta = \frac{n}{2} - 1$ است.

در قضیهٔ ۲ توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی نرمال را در قالب تبدیل استیلتایس تعمیم یافته بیان می‌کنیم. برخلاف حالتی‌که وزن‌ها غیر تصادفی هستند ملاحظه می‌شود که میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای نرمال دارای توزیع نرمال نیست.

---
1. Wigner (Semicircle)

قضیهٔ ۲: اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقلی باشند که دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\frac{1}{2}$ هستند آن‌گاه تبدیل استیلتایس تعمیم‌یافته توزیع میانگین وزنی تصادفی از این متغیرهای نرمال بدین‌صورن است:

$$\mathcal{S}\left[F_{Z_n}; n\right](z) = \left[-\sqrt{i}\ e^{-z^2}\ \mathrm{erfc}\,(-\sqrt{i}\,z)\right]^n,$$

به‌طوری‌که $i^2 = -1$ و $\mathrm{erfc}\,(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2(1+a^2)}}{1+a^2}\, da$.

اثبات: با توجه به تعریف تابع $\mathrm{erfc}\,(x)$ و تغییر متغیر روی تبدیل استیلتایس توزیع نرمال (F_N) با میانگین ۰ و واریانس $\frac{1}{2}$ داریم:

$$\mathcal{S}[F_N; n](z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2}}{z-x}\frac{dx}{\sqrt{\pi}} = -\sqrt{i}\ e^{-z^2}\ \mathrm{erfc}\left(-\sqrt{i}\,z\right).$$

بنابراین سمت راست رابطهٔ (۲) برابر است با

$$\mathcal{S}\left[F_{Z_n}; n\right](z) = \left[-\sqrt{i}\ e^{-z^2}\ \mathrm{erfc}\,(-\sqrt{i}\,z)\right]^n,$$

و قضیه ثابت می‌شود.

در ادامه به‌بررسی تابع چگالی، تابع مولد گشتاور و گشتاورهای میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای گاما می‌پردازیم.

دی سالوو و لوویسون [۳] نشان دادندکه اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که دارای توزیع گاما، $G(\alpha,\lambda)$، هستند و هم‌چنین متغیر وزنی W از توزیع بتا، $Be(\beta,\beta)$، تبعیت کند آن‌گاه میانگین وزنی تصادفی از این دو متغیر تصادفی با فرض استقلال W از X_1 و X_2 دارای تابع چگالی بدین‌صورت پیچیده است:

$$f_X(y;\ \alpha,\lambda,\beta) = \frac{\lambda^{\alpha+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,(\frac{y}{2})^{\alpha-\frac{1}{2}}}{B(\beta,\beta)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{(t-\frac{1}{2})^{\alpha-\frac{1}{2}}\,[t(1-t)]^{\beta-\frac{3}{2}}\, I_{(\alpha-\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda y(t-\frac{1}{2})}{t(1-t)}\right)}{\exp\left(\frac{\lambda y}{2t(1-t)}\right)}\, dt,$$

به‌طوری‌که $I_{(\alpha-\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda y(t-\frac{1}{2})}{t(1-t)}\right)$ تابع بسل اصلاح‌شده[۱] نوع اول از مرتبه $\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)$ و آرگومان $\frac{\lambda y(t-\frac{1}{2})}{t(1-t)}$ است.

نکته ۱: از این‌که توزیع توام $\boldsymbol{W} = (W_1, \dots, W_n)$ دیریکله با پارامترهای $(1,1,\dots,1)$ است با توجه به رابطهٔ (۳)، تابع چگالی میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی مستقل گاما با پارامترهای α_i و β یعنی $X_i \sim G(\alpha_i,\beta)$، برابر است با:

$$f_{Z_n}(z) = \int_{E_{n-1}} (n-1)!\ f_{Z_n|\boldsymbol{W}}(z|\boldsymbol{w})\, dw_1\, dw_2 \dots dw_n,$$

به‌طوری‌که $f_{Z_n|\boldsymbol{W}}(z|\boldsymbol{w})$ در رابطهٔ (۳) داده شده است و

$E_{n-1} = \{(w_1, w_1, \cdots, w_{n-1}) : w_i > 0, i = 1,2,\dots,n-1, w_1 + \cdots + w_{n-1} \le 1, w_n = 1 -$
i=1n−1wi .

قضیهٔ ۳. تابع مولد گشتاور و گشتاور m ام (در حالت خاص) میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی گاما با پارامترهای α_i و β به‌ترتیب عبارتند از:

---
1. Modified Bessel function

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.4.2]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.37]

$$M_{Z_n}(t) = F_B^{(n)}\left(n;\ \alpha_1, \dots, \alpha_n; 1,1, \dots, 1; \frac{t}{\beta}, \dots, \frac{t}{\beta}\right),$$

و

$$E({Z_n}^m) = \frac{1}{\binom{m+n-1}{m}} \frac{1}{\lambda^m \Gamma(\alpha)^n} \sum_{m_1+\dots+m_n=m} \prod_{i=1}^{n} \Gamma(m_i + \alpha).$$

اثبات: طبق تعریف تابع مولد گشتاور میانگین وزنی تصادفی داریم:

$$M_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = EE(e^{tZ_n}|\boldsymbol{W}) = E\left[M_{Z_n|\boldsymbol{W}}(t)\right] = (n-1)! \int_{E_{n-1}} M_{Z_n|\boldsymbol{W}=\boldsymbol{w}}(t) d\boldsymbol{w}.$$

با توجه به تابع مولد گشتاور میانگین وزنی (غیر تصادفی) از متغیرهای تصادفی گاما، رابطهٔ (۴)، داریم:

$$M_{Z_n}(t) = (n-1)! \int_{E_{n-1}} \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{t}{\beta} w_i)^{-\alpha_i} d\boldsymbol{w},$$

به‌طوری‌که سمت راست رابطه مذکور نمایش انتگرالی تابع لاریسلا دوم $F_B^{(n)}$ است. بنا براین:

$$M_{Z_n}(t) = F_B^{(n)}\left(n;\ \alpha_1, \dots, \alpha_n; 1,1, \dots, 1; \frac{t}{\beta}, \dots, \frac{t}{\beta}\right).$$

همانند محاسبه تابع مولد گشتاور، گشتاور m ام میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی گاما در حالتی‌که $\alpha_i = \alpha$ و $\beta = \lambda$ برابر است با:

$$\begin{aligned}
E({Z_n}^m) &= \sum_{m_1+\dots+m_n=m} \frac{m!}{m_1! \dots m_n!} E({W_1}^{m_1} \cdots {W_n}^{m_n}) E({X_1}^{m_1}) \cdots E({X_n}^{m_n}) \\
&= (n-1)! \frac{\Gamma(m_1+1) \cdots \Gamma(m_n+1)}{\Gamma(m+n)} E({X_1}^{m_1}) \cdots E({X_n}^{m_n}) \\
&= \sum_{m_1+\dots+m_n=m} \frac{m!\,(n-1)!}{(m+n-1)!} \frac{1}{\lambda^{m_1}} \cdots \frac{1}{\lambda^{m_n}} \frac{\Gamma(m_1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdots \frac{\Gamma(m_n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{1}{\binom{m+n-1}{m}} \frac{1}{\lambda^m \Gamma(\alpha)^n} \sum_{m_1+\dots+m_n=m} \prod_{i=1}^{n} \Gamma(m_i + \alpha),
\end{aligned}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

نکته ۲: با توجه به قضیهٔ ۳ ملاحظه می‌شود زمانی‌که متغیرهای تصادفی دارای توزیع $G(\alpha, \lambda)$ هستند امیدریاضی و واریانس میانگین وزنی تصادفی از آن‌ها به‌ترتیب برابر با $\frac{\alpha}{\lambda}$ و $\frac{2\alpha}{(n+1)\lambda^2}$ است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به مدل‌بندی و پیدا کردن توزیع میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی خانواده‌ای از توزیع‌های بتا، گاما و نرمال پرداختیم. روش‌های معمول و رایج آماری، در اینجا به‌دلیل تصادفی بودن وزن‌ها، چندان کارساز نیست و گاهی اوقات حتی در حالتی‌که اندازهٔ نمونه تصادفی برابر ۲ است ما را به توزیع صریح و به شکل بسته رهنمون نمی‌کند. روش مورد نظر در این مقاله، استفاده از برخی تبدیل‌های انتگرالی و هم‌چنین توابع فوق هندسی چندگانه

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.4.2]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.37]

است که در مدل‌بندی و توزیع میانگین وزنی تصادفی به شکل صریح بسیار مفید عمل می‌کنند. در نهایت نیز با استفاده از همین توابع و نمایش انتگرالی آن‌ها تابع مولد گشتاور و هم‌چنین گشتاورهای میانگین وزنی تصادفی از متغیرهای تصادفی گاما ارائه شد.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم مقاله که نظرات ارزنده آن‌ها موجب بهبود مقاله شد و هم‌چنین از سردبیر مجله و اعضای هیات تحریریه قدردانی می‌شود. از دانشگاه یزد نیز به‌دلیل حمایت و پشتیبانی از این مقاله قدردانی می‌شود.

منابع

1. Van Assche W., "A random variable uniformly distributed between two independent random variables", Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A, 49 (1987) 207-211.
2. Johnson N. L., Kotz S., "Randomly weighted averages: Some aspects and extensions", The American Statistician, 44 (1990) 245-249.
3. Di Salvo F., Lovison G., "Parametric inference on composite samples with random weights", working papers GRASPA, ww.graspa.org (2000).
4. Soltani A. R., Homei H., "Weighted averages with random proportions that are jointly uniformly distributed over the unit simplex", Statistics & Probability Letters, 79 (2009) 1215-1218.
5. Soltani A. R., Roozegar R., "On distribution of randomly ordered uniform incremental weighted averages: Divided difference approach", Statistics & Probability Letters, 82 (2012) 1012-1020.
6. Roozegar R., Soltani A. R., "Classes of power semicircle laws that are randomly weighted average distributions", Journal of Statistical Computation and Simulation, 84 (2014) 2636-2643.
7. Roozegar R., "Randomly Weighted Average with Dirichlet Component Proportions", Communications in Statistics-Simulation and Computation, (2015) (just-accepted).
8. Roozegar R., "Certain family of weighted averages with beta random weights", Journal of Statistics Applications and Probability Letters, 1 (2014) 19-22.
9. Chen X., Jin M., "A randomly weighted estimate of the population mean", Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 10 (1994) 274-287.
10. Erdelyi A., "Higher trascendental functios and applications", McGraw-Hill Book Company (1953).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.4.2]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.37]

11. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., "Table of Integrals, Series and Products (Corrected and Enlarged Edition prepared by A. Jeffrey and D. Zwillinger) ", Academic Press, NewYork, (2000).

12. Abramowitz M., Stegun I. A., "Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55)", Courier Corporation (1964).

13. Almasi I., Jalilian R., Sayehmiri K., "The exact distribution of sums weights of gamma variables", Journal of Iranian Statistical Society, 11 (2012) 23-37.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.4.2]

[DOI: 10.29252/mmr.3.1.37]