بررسی متریک‌های راندرزی از انحنای ریتچی تصویری برگشت‌پذیر

بهمن رضایی*، سمیه اسمعیل پور، مهران گبرانی؛
دانشگاه ارومیه، دانشکدهٔ علوم
دریافت ۹۶/۰۴/۰۹ پذیرش ۹۶/۰۶/۲۷

چکیده

در این مقاله به بررسی مفهومی جدید از شن[1] به‌نام انحنای ریتچی تصویری ایزوتروپیک می‌پردازیم. ضمن دسته‌بندی متریک‌های راندرزی از انحنای ریتچی تصویری ایزوتروپیک[2]، نشان می‌دهیم که متریک‌های راندرزی از انحنای ریتچی تصویری برگشت‌پذیرند اگر و تنها اگر از انحنای ریتچی تصویری مربعی باشند.

واژه‌های کلیدی: هندسه فینسلر، انحنای S، انحنای ریتچی، انحنای ریتچی تصویری ایزوتروپیک.

مقدمه

شن در سال (۲۰۰۱) مفهوم انحنای ریتچی تصویری برای یک متریک فینسلری را بدین‌صورت معرفی کرد:

$$PRic := Ric + (n-1)\{\bar{S}_{|m}y^m + \bar{S}^2\}, \qquad (۱)$$

که در آن S بیانگر انحنای S یک کمیت غیرریمانی است و نقش مهمی را در هندسهٔ فینسلر بازی می‌کند و Ric نشان‌دهندهٔ انحنای ریتچی است [1]. هم‌چنین نماد «|» نشان‌دهندهٔ مشتق کواریان افقی[3] نسبت به التصاق بروالد[4] است و

$$\bar{S} := \frac{1}{n+1}S.$$

چنگ[5] و همکاران (۲۰۱۷) رابطهٔ انحنای ریتچی تصویری را به‌صورت

$$PRic = Ric + \frac{n-1}{n+1}S_{|m}y^m + \frac{n-1}{(n+1)^2}S^2 \qquad (۲)$$

بیان و متریک‌های راندرزی از انحنای ریتچی تصویری مسطح را به‌طور کامل دسته‌بندی کردند [2]. یک متریک فینسلر را از انحنای ریتچی تصویری مسطح گوییم هرگاه $PRic = 0$.

(α, β)_ متریکها دسته‌ای مهم و خاص از متریک‌های فینسلری را تشکیل می‌دهند که به‌صورت $F = \alpha\varphi(s)$ تعریف می‌شوند که در آن $s = \frac{\beta}{\alpha}$، $\alpha = \alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متریک ریمانی، $\beta = \beta(x,y) = b_i(x)y^i$ یک 1_صورت روی M و $\varphi(s)$ یک تابع مثبت از ردهٔ C^∞ است. با فرض $\varphi(s) = 1 + s$، آن‌گاه تابع

*نویسنده مسئول b.rezaei@urmia.ac.ir

1. Z. Shen
2. Isotropic projective Ricci curvature
3. Horizontal covariant derivative
4. Berwald connection
5. X. Cheng

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

$F = \alpha + \beta$ را که با در نظر گرفتن شرایطی روی 1ـ صورت β یک متریک فینسلری می‌شود را یک متریک راندرزی[۶] می‌نامیم. قرار می‌دهیم:

$$r_{ij} := \frac{1}{2}\left(b_{i;j} + b_{j;i}\right), \quad s_{ij} := \frac{1}{2}\left(b_{i;j} - b_{j;i}\right),$$

که در آن نماد « ;» نشان‌دهندهٔ مشتق کواریان افقی نسبت به التصاق لوی‌چیوتیا[۷] وابسته متریک α است. هم‌چنین قرارداد می‌کنیم:

$$r^i{}_j := a^{im}r_{mj}, \quad s^i{}_j := a^{im}s_{mj}, \quad r_j := b^m r_{mj}, \quad r := r_{ij}b^i b^j = b^j r_j,$$
$$s_j := b^m s_{mj}, \quad q_{ij} := r_{im}s^m{}_j, \quad t_{ij} := s_{im}s^m{}_j, \quad q_j := b^i q_{ij} = r_m s^m{}_j,$$
$$t_j := b^i t_{ij} = s_m s^m{}_j, \quad b := \|\beta_x\|_\alpha, \quad \rho := ln\sqrt{1-b^2}, \quad \rho_i := \rho_{x^i},$$

که در آن $(a^{ij}) := (a_{ij})^{-1}$ و $b^i := a^{ij}b_j$.

$$r_{i0} := r_{ij}y^j, \quad s_{i0} := s_{ij}y^j, \quad r_{00} := r_{ij}y^i y^j, \quad r_0 := r_i y^i, \quad s_0 := s_i y^i, \rho_0 := \rho_i y^i.$$

تعریف: فرض کنیم F یک متریک فینسلری روی خمینهٔ M و $PRic$ نشان‌دهندهٔ انحنای ریت‌چی تصویری متریک F نسبت به صورت حجمی بوسمن–هاسدورف[۸] باشد. در این‌صورت F را از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک گوییم هرگاه:

$$PRic = (n-1)cF^2, \qquad (۳)$$

که در آن $c = c(x)$ یک تابع اسکالر روی M است. F را از انحنای ریت‌چی تصویری ثابت گوییم هرگاه c ثابت باشد. در ادامه متریک‌های راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک را دسته‌بندی می‌کنیم. در واقع قضیه ۱ قابل بیان و اثبات است:

قضیه ۱,۱. فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ M باشد، در این‌صورت F از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک است اگر و تنها اگر

$$^{\propto}Ric = (t^m{}_m + (n-1)c)\alpha^2 + 2t_{00} + (n-1)\left[\rho_{0;0} - \rho_0^2 + c\beta^2\right], \qquad (۴)$$
$$s^m{}_{0;m} = -(n-1)(\rho_m s^m{}_0 - c\beta), \qquad (۵)$$
$$s_0 = 0 \quad \text{یا} \quad r_{00} + 2\beta s_0 = 0, \qquad (۶)$$

که در آن نماد $^{\propto}Ric$ نشان دهندهٔ انحنای ریت‌چی متریک ریمانی α و $c = c(x)$ یک تابع اسکالر روی M است.

قضیه ۲,۱. فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ M باشد، در این‌صورت F از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر است اگر و فقط اگر از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی باشد.

نتیجهٔ ۳,۱. اگر $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی و ایزوتروپیک باشد، آن‌گاه F ریمانی است.

6. Randers metric
7. Levi-Civita connection
8. Busemann-Hausdorff volume form

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

مقدمات

فرض کنیم M یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر باشد، در این‌صورت یک ساختار فینسلری روی M عبارت است از نگاشت $F:TM\to[0,\infty)$ که در شرایط زیر صدق کند:

۱. F روی $TM_0=TM-\{0\}$ هموار باشد؛

۲. F روی y همگن مثبت[9] از درجه یک باشد. یعنی به ازای هر $\lambda>0$؛

$$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y),$$

۳. به ازای هر (x,y) از TM ماتریس زیر موسوم به ماتریس هسیان[10] معین‌مثبت باشد؛

$$g_{ij}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2(x,y)}{\partial y^i\partial y^j},$$

یعنی به‌ازای $X\neq0$ داشته باشیم $g(X,X)>0$، که g_{ij} مولفه‌های تانسور g هستند. در این‌صورت (M,F) را خمینهٔ فینسلری و F را تابع اساسی فینسلری[11] گوییم.

فرض کنیم F یک متریک فینسلری روی خمینهٔ M باشد، در این‌صورت منحنی $\mathrm{c(t)}$ در خمینهٔ فینسلری (M,F) ژئودوزیک است هرگاه در معادله زیر صدق کند:

$$\ddot{c}(t)+\ 2G^i\big(c(t),\dot{c}(t)\big)=0,\qquad i\in\{1,000,n\},$$

که G^i ضرایب اسپری حاصل از متریک F است و بدین‌صورت روی M تعریف می‌شود:

$$G^i=\frac{1}{4}\ g^{il}\left\{[F^2]_{x^ky^l}y^k-[F^2]_{x^l}\right\},$$

که در آن $y\in\ T_xM$، $(g^{ij}):=\ (g_{ij})^{-1}$.

انحنای ریمان یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماس T_pM هستند که بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$R=\left\{R_y:T_pM\to\ T_pM\middle|\ y\in\ T_pM\ ,p\in M\right\},$$

که در حالت موضعی R_y را می‌توان نسبت به پایه‌های فضای T_pM بدین‌صورت بیان کرد:

$$R_y=R^i{}_k\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^k,$$

به‌طوری‌که $R^i{}_k=R^i{}_k(x,y)$ نشان‌دهندهٔ ضرایب انحنای ریمان F است و بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$R^i{}_k=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-y^j\frac{\partial^2G^i}{\partial x^j\partial y^k}+2G^j\frac{\partial^2G^i}{\partial y^j\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

انحنای ریت‌چی، اثر انحنای ریمان است و بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$Ric(x,y)=R^i{}_i(x,y).$$

طبق تعریف، انحنای ریت‌چی یک تابع معین مثبت از درجهٔ ۲ روی y است [3].

در هندسهٔ فینسلر دو صورت حجمی مهم وجود دارند که یکی صورت حجمی بوسمن-هاسدورف و دیگری صورت حجمی هالمس-تامسون[12] است. فرض کنیم $\{e_i\}_{i=1}^n$ پایهٔ دلخواه برای T_xM و $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ پایه دوگان برای $T_x{}^*M$ باشند، در این‌صورت زیر مجموعه باز کراندار B_x^n در R^n را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

9. Positive homogeneity
10. Hessian matrix
11. Fundamental Finsler function
12. Holmes-Thompson

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

$$B_x^n = \{(y^i) \in R^n | F(y^i e_i) < 1\}.$$

فرض کنیم $dV_F = \sigma_F(x)\, \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$ صورت حجمی دلخواهی باشد، در این‌صورت با در نظر گرفتن $\sigma_F(x)$ به‌صورت:

$$\sigma_F(x) = \frac{Vol(B^n(1))}{Vol(B^n{}_x)},$$

صورت حجمی dV_F به‌دست آمده را صورت حجمی بوسمن–هاسدورف می‌نامیم که در آن Vol بیان‌گر حجم اقلیدسی و ω_n حجم اقلیدسی گوی واحد B^n در R^n است [4]. با در نظر گرفتن این صورت حجمی مفهوم انحراف از معیار[13] را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tau(x,y) = \ln \frac{\sqrt{\det\left(g_{ij}(x,y)\right)}}{\sigma_{BH}(x)}.$$

واضح است که مفهوم انحراف از معیار همگن مثبت از درجهٔ صفر است. برای یک بردار $y \in T_xM - \{0\}$ فرض کنیم $\mathrm{c} = \mathrm{c(t)}$ یک ژئودوزیک با شرایط $\mathrm{c}(0) = \mathrm{x}$ و $\dot{c}(0) = \mathrm{y}$ باشد، در این‌صورت انحنای S را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$S(x,y) = \frac{d}{dt}[\tau\big(c(t), \dot{c}(\mathrm{t})\big)]|\mathrm{t} = 0.$$

بنابر تعریف مذکور در واقع انحنای S تحدید مشتق τ روی ژئودوزیک‌ها است. یعنی:

$$S(x,y) = \tau_{|\mathrm{l}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{y}^{\mathrm{l}}.$$

به‌وضوح می‌توان دید که انحنای S همگن از درجهٔ یک است. یعنی به‌ازای هر $\lambda > 0$،

$$S(x,\lambda y) = \lambda S(x,y),$$

از طرفی در مختصات موضعی داریم:

$$S(x,y) = \mathrm{y}^{\mathrm{i}} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - 2\frac{\partial \tau}{\partial y^i} G^i.$$

با توجه به رابطهٔ مذکور می‌توان رابطه دیگری برای انحنای S به‌صورت زیر بدست آورد:

$$S(x,y) = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m}[ln\sigma_{BH}].$$

انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک

چنگ و همکاران (۲۰۱۷) انحنای ریت‌چی تصویری متریک‌های راندرزی را به‌صورت (۷) بیان کردند:

$$\begin{aligned}\mathrm{PRic} = {}& {}^{\alpha}Ric + 2\alpha \mathrm{s}^{\mathrm{m}}{}_{0;\mathrm{m}} - 2\mathrm{t}_{00} - \alpha^2 \mathrm{t}^{\mathrm{m}}{}_{\mathrm{m}} \\ & + (\mathrm{n}-1)\left\{-\tfrac{2\alpha\beta}{\mathrm{F}^2} s_0^2 + 2\alpha(\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{s}^{\mathrm{m}}{}_0) - \rho_{0;0} - \tfrac{\alpha}{\mathrm{F}^2}\,\mathrm{r}_{00}\mathrm{s}_0 + \rho_0^2\right\}.\end{aligned} \quad (۷)$$

برای اثبات شرط لزوم قضیه ۱،۱ فرض کنیم F از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک باشد. با توجه به رابطهٔ (۷) نتیجه می‌شود:

13. Distortion

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

$$0 = {}^{\alpha}Ric + 2\alpha \mathrm{s^m}_{0;m} - 2\mathrm{t}_{00} - \alpha^2 \mathrm{t^m}_{m} + (\mathrm{n}-1)\left\{-\frac{2\alpha\beta}{\mathrm{F}^2}s_0^2 + 2\alpha(\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{s^m}_0) - \rho_{0;0} - \frac{\alpha}{\mathrm{F}^2}\,\mathrm{r}_{00}\mathrm{s}_0 + \rho_0^2 - \mathrm{F}^2 c\right\}. \quad (۸)$$

با ضرب طرفین رابطه مذکور در F^2 رابطه (۹) نتیجه می‌شود:

$$0 = \mathrm{F}^2\alpha\mathrm{Ric} + 2\mathrm{F}^2\alpha\mathrm{s^m}_{0;m} - 2\mathrm{F}^2\mathrm{t}_{00} - \alpha^2\mathrm{F}^2\mathrm{t^m}_{m} + (\mathrm{n}-1)\{-2\alpha\beta s_0^2 + 2\mathrm{F}^2\alpha(\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{s^m}_0) - \mathrm{F}^2\rho_{0;0} - \alpha\,\mathrm{r}_{00}\mathrm{s}_0 + \mathrm{F}^2\rho_0^2 - \mathrm{F}^4 c\}. \quad (۹)$$

رابطهٔ مذکور را می‌توان به‌صورت (۱۰) بازنویسی کرد:

$$E_4\alpha^4 + E_3\alpha^3 + E_2\alpha^2 + E_1\alpha + E_0 = 0, \quad (۱۰)$$

که در آن

$$E_4 = -\mathrm{t^m}_{m} - (n-1)c, \quad (۱۱)$$

$$E_3 = 2\{s^m{}_{0;m} - \beta t^m{}_m + (n-1)(\rho_m s^m{}_0 - 2c\beta)\}, \quad (۱۲)$$

$$E_2 = {}^{\alpha}Ric + 4\beta s^m{}_{0;m} - 2t_{00} - \beta^2 t^m{}_m + 4(n-1)\beta(\rho_m s^m{}_0) - (n-1)\rho_{0;0} + (n-1)\rho_0^2 - 6(n-1)c\beta^2, \quad (۱۳)$$

$$E_1 = 2\beta{}^{\alpha}Ric + 2\beta^2 s^m{}_{0;m} - 4\beta t_{00} - 2(n-1)\beta s_0^2 + 2(n-1)\beta^2(\rho_m s^m{}_0) - 2(n-1)\beta\rho_{0;0} + 2(n-1)\beta\rho_0^2 - (n-1)r_{00}s_0 - 4(n-1)c\beta^3, \quad (۱۴)$$

$$E_0 = ({}^{\alpha}Ric - 2t_{00} - (n-1)\rho_{0;0} + (n-1)\rho_0^2 - (n-1)c\beta^2)\beta^2. \quad (۱۵)$$

از رابطهٔ (۱۱) داریم:

$$E_4\alpha^4 + E_2\alpha^2 + E_0 = 0, \quad (۱۶)$$

$$E_3\alpha^2 + E_1 = 0. \quad (۱۷)$$

از رابطهٔ (۱۶) می‌توان گفت:

$$(E_4\alpha^2 + E_2)\alpha^2 + E_0 = 0. \quad (۱۸)$$

از آنجاکه α^2 و β^2 چند جمله‌ای‌های اول نسبت به‌هم هستند، از رابطهٔ (۱۸) و با استفاده از E_0 می‌توان گفت که یک تابع اسکالر λ روی M وجود دارد به‌طوری‌که:

$${}^{\propto}Ric - 2t_{00} - (n-1)\rho_{0;0} + (n-1)\rho_0^2 - (n-1)c\beta^2 = \lambda(x)\alpha^2. \quad (۱۹)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۱۹) در (۱۸) داریم:

$$E_4\alpha^2 + E_2 + \lambda(x)\beta^2 = 0. \quad (۲۰)$$

هم‌چنین از رابطهٔ (۱۳) داریم:

$$E_2 = \lambda(x)\alpha^2 + 4\beta s^m{}_{0;m} - \beta^2 t^m{}_m + 4(n-1)\beta(\rho_m s^m{}_0) - 5(n-1)c\beta^2. \quad (۲۱)$$

رابطهٔ (۱۹) را به‌صورت (۲۲) بازنویسی می‌کنیم:

$${}^{\alpha}Ric = \lambda(x)\alpha^2 + 2t_{00} + (n-1)[\rho_{0;0} - \rho_0^2 + c\beta^2], \quad (۲۲)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۲۱) در (۲۰) و با استفاده از رابطهٔ (۱۱) داریم:

$$[\lambda - t^m{}_m - (n-1)c]\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = -4\beta\big[s^m{}_{0;m} + (n-1)(\rho_m s^m{}_0) - (n-1)c\beta\big]. \quad (۲۳)$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

در نتیجه از رابطهٔ مذکور داریم:

$$\lambda = \mathrm{t^m}_{\mathrm{m}} + (\mathrm{n}-1)c, \quad (۲۴)$$

$$s^m{}_{0;m} = -(n-1)(\rho_m s^m{}_0 - c\beta). \quad (۲۵)$$

به‌علاوه با استفاده از روابط (۲۲)، (۲۴) و (۲۵) داریم:

$$E_1 = 2[t^m{}_m + (n-1)c]\alpha^2\beta - (n-1)s_0(r_{00} + 2\beta s_0), \quad (۲۶)$$

$$E_3 = -2\beta[t^m{}_m + (n-1)c]. \quad (۲۷)$$

در نتیجه از رابطهٔ (۱۷) خواهیم داشت:

$$s_0(r_{00} + 2\beta s_0) = 0, \quad (۲۸)$$

و از رابطهٔ مذکور نتیجه می‌شود که $s_0 = 0$ یا $r_{00} + 2\beta s_0 = 0$.

اثبات کفایت شرط بدیهی است. زیرا با جای‌گذاری سه شرط موجود در قضیه ۱-۱ در رابطهٔ (۷) داریم:

$$PRic = (n-1)cF^2,$$

در این‌صورت می‌توان گفت F از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک است.

نتیجه ۱,۲. فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ M باشد، در این‌صورت F از انحنای ریت‌چی تصویری مسطح است اگر و فقط اگر این روابط برقرار باشند:

$$^{\propto}Ric = t^m{}_m\,\alpha^2 + 2t_{00} + (n-1)\left[\rho_{0;0} - \rho_0^2\right],$$
$$s^m{}_{0;m} = -(n-1)(\rho_m s^m{}_0),$$
$$s_0 = 0 \quad \text{یا} \quad r_{00} + 2\beta s_0 = 0.$$

۳. متریک‌های راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر

فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر باشد یعنی:

$$PRic(y) = PRic(-y),$$

در این‌صورت قضیه زیر قابل بیان است:

قضیه ۱,۳. فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ M باشد. در این‌صورت F را از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر است اگر و فقط اگر:

$$s^m{}_{0;m} = -(n-1)(\rho_m s^m{}_0), \quad (۲۹)$$

$$r_{00} + 2\beta s_0 = 0 \text{ یا } s_0 = 0. \quad (۳۰)$$

در این حالت F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است.

برهان: فرض می‌کنیم F از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر باشد، با استفاده از رابطهٔ (۷) و

$$PRic(y) = PRic(-y),$$

نتیجه می‌شود:

$$4F^2\alpha s^m{}_{0;m} + 2(n-1)\{-2\alpha\beta s_0^2 + 2F^2\alpha(\rho_m s^m{}_0) - \alpha\, r_{00}s_0\} = 0, \quad (۳۱)$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

که معادل با رابطهٔ (۳۲) است:

$$N_3\alpha^3 + N_2\alpha^2 + N_1\alpha = 0, \quad (۳۲)$$

که در آن

$$N_3 = 4s^m{}_{0;m} + 4(n-1)(\rho_m s^m{}_0), \quad (۳۳)$$

$$N_2 = 8\beta s^m{}_{0;m} + 8(n-1)\beta(\rho_m s^m{}_0), \quad (۳۴)$$

$$N_1 = 4\beta^2 s^m{}_{0;m} - 4(n-1)\beta s_0^2 + 4(n-1)\beta^2(\rho_m s^m{}_0) - 2(n-1)r_{00}s_0. \quad (۳۵)$$

بنا براین از معادلهٔ (۳۲) داریم:

$$N_3\alpha^2 + N_1 = 0, \quad (۳۶)$$

$$N_2 = 0. \quad (۳۷)$$

از رابطهٔ (۳۶) رابطهٔ (۳۸) را به‌دست می‌آوریم:

$$s^m{}_{0;m} = -(n-1)(\rho_m s^m{}_0). \quad (۳۸)$$

رابطهٔ مذکور همان معادلهٔ (۲۹) است. با جای‌گذاری رابطهٔ (۳۸) در (۳۷) داریم:

$$s_0(r_{00}+2\beta s_0) = 0. \quad (۳۹)$$

در نتیجه $s_0 = 0$ یا $r_{00} + 2\beta s_0 = 0$.

اثبات کفایت شرط بدیهی است زیرا از فرض برقرار بودن روابط (۲۹) و (۳۰) و با جای‌گذاری روابط (۳۸) و (۳۹) در رابطهٔ (۷) خواهیم داشت:

$$PRic = Ric - 2t_{00} - \alpha^2 t^m{}_m + (n-1)\{-\rho_{0;0} + \rho_0^2\}. \quad (۴۰)$$

از معادلهٔ مذکور به‌وضوح دیده می‌شود که F از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر است. در واقع F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است. به‌این‌ترتیب کفایت شرط اثبات می‌شود.

فرض کنیم متریک فینسلری F از انحنای S ایزوتروپیک باشد، یعنی:

$$S = (n+1)cF,$$

که در آن $c = c(x)$ یک تابع اسکالر روی خمینهٔ M است. در این‌صورت داریم:

$$S_{|m} = (n+1)c_m F,$$

$$PRic = Ric + (n-1)c_0 F + (n-1)c^2 F^2.$$

که در آن $c_m := c_{x^m}$ و $c_0 := c_m y^m$. در این حالت F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است اگر و فقط اگر

$$Ric_{.j.k.l} + (n-1)\{c_0 F_{y^j y^k y^l} + c^2 F^2{}_{y^j y^k y^l}\} = 0. \quad (۴۱)$$

با استفاده از رابطهٔ مذکور قضیه ۲-۳ قابل بیان است:

قضیه ۲,۳. فرض می‌کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ n–بعدی M بوده و از انحنای ریت‌چی مربعی باشد، در این‌صورت F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است اگر و فقط اگر $S = 0$.

برهان: کفایت شرط بدیهی است. لزوم شرط را اثبات می‌کنیم. فرض‌کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی باشد، در این‌صورت:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

$$F_{y^j y^k y^l} = -\frac{1}{\alpha^3}\left[\delta_{jk}y_l(j\to k\to l\to j)+\frac{3}{\alpha^2}y_l y_k y_j\right], \quad (۴۲)$$

و

$$F^2{}_{y^j y^k y^l} = \quad (۴۳)$$
$$\frac{1}{\alpha}b_j\delta_{kl}(j\to k\to l\to j)-\frac{1}{\alpha^3}\beta\delta_{jk}y_l(j\to k\to l\to j)-\frac{3}{\alpha^5}\beta y_l y_k y_j - \frac{1}{\alpha^3}b_j y_k y_l(j\to k\to l\to j),$$

که در آن نماد $(j\to k\to l\to j)$ نشان‌دهندهٔ مجموع چرخش روی اندیس‌ها و سپس جمع‌بندی است. فرض کنیم F از انحنای ریچی مربعی باشد در این‌صورت داریم:

$$Ric_{.j.k.l}=0. \quad (۴۴)$$

با جای‌گذاری روابط (۴۲)، (۴۳) و (۴۴) در رابطهٔ (۴۱) داریم:

$$0=(n-1)\left\{-\frac{1}{\alpha^3}\left[(c_0+\beta c^2)\delta_{jk}y_l(j\to k\to l\to j)+\frac{3}{\alpha^2}(c_0+\beta c^2)y_l y_k y_j\right]+ \quad (۴۵)$$
$$\frac{c^2}{\alpha}\left[\left(\delta_{kl}-\frac{1}{\alpha^2}y_k y_l\right)b_j\right](j\to k\to l\to j)\right\}.$$

به‌وضوح دیده می‌شود که رابطهٔ (۴۵) زمانی برقرار است که $c=0$. بنا براین $S=0$.

منابع

1. Shen Z., "Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces", Kluwer Academic Publishers, (2001).
2. Cheng X., Shen Y., Ma X., "On a class of projective Ricci flat Finsler metrics", Publ. Math. Debrecen, 7528 (2017) 1-12.
3. Tayebi A., Shahbazi Nia M., "A new class of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature $K=1$", Differ. Geom. Appl, 41 (2015) 123-133.
4. Shen Z., "Volume comparison and applications in Riemann-Finsler geometry", Advances in Math, 128 (1997) 306-328.
5. Tayebi A., Sadeghi H., "Generalized P-reducible (α,β)-metrics with vanishing S-curvature, Ann. Polon. Math. 114 (1) (2015) 67-79.
6. Tayebi A., Rafie Rad M., "S-curvature of isotropic Berwald metrics", Science in China. Series A: Mathematics. 51 (2008) 2198-2204.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]