در مورد سرشت‌های تحویل‌ناپذیر سه‌تایی‌های کامینا

جواد باقریان
دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۶/۲۰ پذیرش ۹۷/۰۹/۰۳

چکیده

شرط سه‌تایی کامینا تعمیمی از شرط کامینا در نظریه گروه‌های متناهی است. سرشت‌های تحویل‌ناپذیر سه‌تایی‌های کامینا در حالت‌های خاص بررسی شده‌اند. در این مقاله در حالت کلی یک سه‌تایی کامینا (G,M,N) را در نظر گرفته و سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر M و G/N ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: گروه متناهی، سرشت، سه‌تایی کامینا

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.7.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.13]

مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. گروه G را دارای خاصیت سه‌تایی کامینا[1] گویند هر گاه زیرگروه‌های نرمال M و N از G که $N \leq M$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $g \in G \setminus M$، کلاس تزویج g در G برابر gN باشد. در این حالت (G,M,N) را یک سه‌تایی کامینا گوییم [۸]. در حالت خاص که $M=N=G'$، گروه G را یک گروه کامینا[2] گویند. این نشان می‌دهد که شرط سه‌تایی کامینا تعمیمی از شرط کامینا در گروه‌ها است.

ویژگی‌های گروه‌هایی با خاصیت سه‌تایی کامینا در حالت‌های خاص در چندین مقاله بررسی شده‌اند. در [۱۰] سه‌تایی کامینا $(G,Z(G),G')$ بررسی شده است و یک مشخصه‌سازی از این گروه‌ها برحسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیرشان داده شده است. در واقع سرشت‌های تحویل‌ناپذیر آنها بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G/G' و $Z(G)$ تعیین شده است. هم‌چنین ویژگی‌های سه‌تایی‌های کامینای $(G,Z(G)G',G')$ که گروه‌های کامینای تعمیم یافته[3] نامیده می‌شوند، در [۹] بررسی شده‌اند. سرشت‌های تحویل‌ناپذیر این گروه‌ها نیز بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G/G' و $Z(G)$ قابل تعیین هستند. در این مقاله در حالت کلی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر یک سه‌تایی کامینای (G,M,N) را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G/N و M تعیین می‌کنیم. برای این منظور از نظریه جبری اسکیم‌های شرکت‌پذیر[4] استفاده می‌کنیم.

اسکیم‌های شرکت‌پذیر از نظر جبری تعمیمی از گروه‌های متناهی هستند و بسیاری از نتایج نظریه گروه‌ها مانند قضایای سیلو، قضیه کلیفورد در نمایش گروه‌ها، قضیه شور- زازنهاوس و قضیه $p^\alpha q^\beta$-برنساید به نوعی برای اسکیم‌های شرکت‌پذیر تعمیم داده شده‌اند [۱]، [۴]، [۵]، [۶]. در بخش اول این مقاله، ابتدا تعاریف و نتایجی از

---

*نویسنده مسئول bagherian@sci.ui.ac.ir

1. Camina triple
2. Camina group
3. Generalized Camina group
4. Association schemes

اسکیم‌های شرکت‌پذیر که در بخش دوم این مقاله برای اثبات نتایج اصلی به آنها نیاز داریم، به‌طور مختصر بیان می‌کنیم. خواننده می‌تواند برای مطالعه کامل‌تر این تعاریف و نتایج به [۲]، [۳]، [۱۱] و [۱۲] مراجعه کند.

اسکیم‌های شرکت‌پذیر

فرض کنید X یک مجموعه متناهی و $S=\{R_i\}_{0\le i\le d}$ یک افراز از $X\times X$ باشد. دراین‌صورت زوج (X,S) را یک اسکیم شرکت‌پذیر گوییم هر گاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $R_0=\{(x,x)|x\in X\}$،

۲) به‌ازای هر $0\le i\le d$ یک $0\le i'\le d$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$R_i^t=\{(x,y)|(y,x)\in R_i\}=R_{i'}$$

۳) به‌ازای هر $0\le i,j,k\le d$ و $(x,y)\in R_k$، اندازهٔ مجموعه

$$\{z\in X|(x,z)\in R_i,(z,y)\in R_j\}$$

به انتخاب $(x,y)\in R_k$ بستگی نداشته باشد. در این حالت اندازهٔ مجموعه مذکور را با λ_{ijk} نمایش می‌دهیم.

فرض کنید (X,S) یک اسکیم شرکت‌پذیر باشد. به‌ازای هر $0\le i\le d$، عدد $\lambda_{ii'0}$ را ظرفیت[۱] R_i گوییم و آن را با n_i نمایش می‌دهیم و برای یک زیر مجموعه $H\subseteq S$ قرار می دهیم

$$n_H=\sum_{R_i\in H}n_i.$$

اسکیم شرکت‌پذیر (X,S) را جابه‌جایی گوییم هر گاه به‌ازای هر $0\le i,j,k\le d$ داشته باشیم $\lambda_{ijk}=\lambda_{jik}$. به‌ازای هر $R_i,R_j\in S$، ضرب R_iR_j بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$R_iR_j=\{R_k\,|\,\lambda_{ijk}\ne 0\},$$

و هم‌چنین به‌ازای هر دو زیر مجموعه H و T از S، قرار می‌دهیم

$$HT=\bigcup_{\substack{R_i\in H\\ R_j\in T}}R_iR_j.$$

یک زیرمجموعه H از S را یک زیرمجموعه بسته[۲] از S گوییم هر گاه $HH\subseteq H$.

فرض کنید (X,S) یک اسکیم شرکت‌پذیر و H یک زیرمجموعه بسته از S باشد. به‌ازای عنصر دلخواه $x\in X$ قرار دهید $xH=\{y\in X\,|\,(x,y)\in H\}$. هم‌چنین به‌ازای هر رابطه R_i از S داریم $(R_i)_H=R_i\cap xH\times xH$. در این‌صورت بنابر قضیه ۸،۱،۲ از [۱۲]، زوج (xH,S_H) که در آن $S_H=\{(R_i)_H\,|\,R_i\in S\}$ یک اسکیم شرکت‌پذیر است که به آن یک زیراسکیم[۳] روی xH گویند.

مثال ۱: فرض کنید $G=\{g_0,\dots,g_n\}$ یک گروه متناهی باشد. به‌ازای هر $0\le i\le n$، قرار دهید

$$R_i=\{(x,y)\in G\times G\,|\,x^{-1}y=g_i\}.$$

1. Valency
2. Closed subset
3. Subscheme

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.7.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.13]

دراین‌صورت به‌راحتی دیده می‌شود که $\left(G,\{R_i\}_{0\le i\le n}\right)$ یک اسکیم شرکت‌پذیر است به‌طوری‌که به‌ازای هر $0\le i,j,k\le n$ داریم $\lambda_{ijk}=1$ هرگاه $g_ig_j=g_k$ و در غیر این‌صورت $\lambda_{ijk}=0$. هم‌چنین زیرمجموعه‌های بسته این اسکیم شرکت‌پذیر در تناظر یک به یک و پوشا با زیرگروه‌های G هستند.

فرض کنید (X,S) و (Y,T) دو اسکیم شرکت‌پذیر باشند. گوییم (Y,T) یک فیوژن[1] (X,S) است هر گاه هر رابطه در T اجتماعی از تعدادی رابطه در S باشد. در این حالت می‌نویسیم $T\subseteq S$.

مثال ۲: فرض کنید G یک گروه متناهی و $\mathrm{Cl}_G(g_h),\ldots,\mathrm{Cl}_G(g_0)$ کلاس‌های تزویج G باشند. به‌ازای هر $0\le i\le h$، قرار دهید

$$R_i=\left\{(x,y)\in G\times G\mid xy^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_i)\right\}.$$

در این‌صورت دیده می‌شود که (G,S) که $S=\{R_i\}_{0\le i\le h}$ یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی است که به آن اسکیم شرکت‌پذیر گروهی[2] روی G گویند [۲]. هم‌چنین به‌ازای هر i، $n_i=\left|\left\{z\in G\mid xz^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_i)\right\}\right|=\left|\mathrm{Cl}_G(g_i)\right|$ که در آن $x\in G$ یک عنصر دلخواه است. زیرا هر زیر گروه نرمال در G اجتماع تعدادی از کلاس‌های تزویج G است، زیرمجموعه‌های بسته S در تناظر یک به یک و پوشا با زیرگروه‌های نرمال G هستند.

به‌علاوه فرض کنید $M\trianglelefteq G$. با تغییر اندیس‌گذاری در صورت لزوم فرض کنید $M=\bigcup_{i=0}^{t}\mathrm{Cl}_G(g_i)$. به‌ازای هر $0\le i\le t$، قرار دهید

$$T_i=\left\{(x,y)\in M\times M\mid xy^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_i)\right\}.$$

از طرف دیگر، فرض کنید $M=\bigcup_{i=0}^{r}\mathrm{Cl}_M(m_i)$. به‌ازای هر i، قرار می‌دهیم:

$$R_i=\left\{(x,y)\in M\times M\mid xy^{-1}\in \mathrm{Cl}_M(m_i)\right\}.$$

در این‌صورت چون هر رابطه T_i اجتماع تعدادی از رابطه‌های $R_r,\ldots,R_0$ است، اسکیم شرکت‌پذیر $\left(M,\{T_i\}_{0\le i\le t}\right)$ یک فیوژن از اسکیم شرکت‌پذیر $\left(M,\{R_i\}_{0\le i\le r}\right)$ است.

فرض کنید (X,S) یک اسکیم شرکت‌پذیر باشد. به‌ازای هر $R\in S$، ماتریس مجاورت[3] R که آن را با $A(R)$ نمایش می‌دهیم برابر ماتریسی $|X|\times|X|$ است که سطرها و ستون‌های آن با X اندیس‌گذاری شده است به‌طوری‌که به‌ازای هر $x,y\in X$،

$$A(R)_{xy}=\begin{cases}1, & (x,y)\in R.\\ 0, & (x,y)\notin R.\end{cases}$$

قرار می‌دهیم $\mathbb{C}S=\bigoplus_{R\in S}\mathbb{C}A(R)$. در این‌صورت $\mathbb{C}S$ یک جبر شرکت‌پذیر یکدار با پایه $\{A(R)\mid R\in S\}$ است. به‌ویژه $\mathbb{C}S$ یک جبر نیم ساده نیز است که به آن جبر مجاورت[4] اسکیم (X,S) گویند [۱۱]. هم‌چنین اگر $H\subseteq S$ یک زیرمجموعه بسته باشد آن‌گاه بنابر قضیه ۱.۵.۱ از [۱۱] جبر مجاورت زیر اسکیم (xH,S_H) یک‌ریخت با $\mathbb{C}H=\bigoplus_{R\in H}\mathbb{C}A(R)$ است. مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر جبر $\mathbb{C}S$ را با $\mathrm{Irr}(S)$ نمایش می‌دهیم. نگاشت $\Gamma:\mathbb{C}S\to Mat_x(\mathbb{C})$ که $\Gamma(A(R))=A(R)$، یک نمایش از $\mathbb{C}S$ است. (در این‌جا منظور از $Mat_X(\mathbb{C})$، مجموعهٔ

1. Fusion
2. Group association scheme
3. Adjacency matrix
4. Adjacency algebra

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.7.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.13]

تمام ماتریس‌های $|X|\times|X|$ است که سطرها و ستون‌های آنها با عناصر X اندیس‌گذاری شده است و درایه‌های آنها در $\mathbb{C}$ هستند.) فرض کنید γ سرشت متناظر با نمایش Γ باشد. به‌علاوه فرض کنید $\gamma=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi$ که $m_\chi\in\mathbb{C}$. در این‌صورت به m_χ ها، ضرایب استاندارد[1] (X,S) گویند. زیرا $\gamma(A(R_0))=|X|$ همواره داریم:

$$|X|=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(A(R_0)). \tag{۱}$$

فرض کنید (X,S) یک اسکیم شرکت‌پذیر باشد که $S=\{R_i\}_{0\le i\le d}$ و H یک زیرمجموعه بسته از S باشد. به ازای هر دو سرشت χ و ψ از $\mathbb{C}H$ ضرب داخلی χ و ψ که آن‌را با $[\chi,\psi]$ نمایش می‌دهند، بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$[\chi,\psi]=\frac{1}{n_H}\sum_{R_i\in H}\frac{\chi(A_i)\overline{\psi(A_i)}}{n_i}, \tag{۲}$$

که در آن $A_i=A(R_i)$ و $\overline{\psi(A_i)}$ مزدوج مختلط $\psi(A_i)$ است. بنابر اولین رابطهٔ تعامد در مورد سرشت‌های اسکیم‌های شرکت‌پذیر (قضیهٔ ۴.۱.۵ در [۱۱])، اگر $\chi,\psi\in\mathrm{Irr}(S)$ آن‌گاه

$$[\chi,\psi]=\delta_{\chi,\psi}\frac{\chi(1)}{m_\chi}. \tag{۳}$$

بنابراین سرشت χ از $\mathbb{C}S$ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $[\chi,\chi]=\frac{\chi(1)}{m_\chi}$. توجه کنید در حالتی که $(X,S)=(G,\{R_i\}_{0\le i\le n})$ اسکیم شرکت‌پذیر ارائه شده در مثال ۱ باشد، ضرب داخلی معرفی شده در بالا همان ضرب داخلی سرشت‌ها در گروه‌ها (تعریف ۲.۱۶ در [۷]) است. زیرا در این حالت $\mathrm{Irr}(S)=\mathrm{Irr}(G)$ و نمایش Γ همان نمایش منظم ضرب از راست از G است، از این‌رو، بنابر لم ۲.۱۱ در [۷]، به‌ازای هر $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ داریم $m_\chi=\chi(1)$. در نتیجه در این حالت ضرب داخلی ارائه شده در (۱) به‌صورت $[\chi,\psi]=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\psi(g)}$ است. بنابراین سرشت χ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $[\chi,\chi]=1$.

فرض کنید χ یک سرشت از $\mathbb{C}S$ باشد. فرض کنید χ_H تحدید سرشت χ از $\mathbb{C}S$ به زیر جبر $\mathbb{C}H$ باشد. در این‌صورت بنابر رابطهٔ (۲) داریم:

$$n_H[\chi_H,\chi_H]=\sum_{R_i\in H}\frac{\chi(A_i)\overline{\chi(A_i)}}{n_i}\le\sum_{R_i\in S}\frac{\chi(A_i)\overline{\chi(A_i)}}{n_i}=n_S[\chi,\chi].$$

از این‌رو

$$[\chi_H,\chi_H]\le\frac{n_S}{n_H}[\chi,\chi]. \tag{۴}$$

به‌وضوح در (۴) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\chi(A_i)=0$ به‌ازای هر $R_i\in S\setminus H$.

لم ۳: فرض کنید (X,S) یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی و H یک زیرمجموعه بسته از S باشد. فرض کنید $\chi\in\mathrm{Irr}(S)$ به‌طوری‌که $\chi(A(R))=0$ به‌ازای هر $R\in S\setminus H$. اگر $\psi=\chi_H\in\mathrm{Irr}(H)$ آن‌گاه $m_\chi=\frac{n_S}{n_H}m_\psi$.

---
1. Standard multiplicities

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.7.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.13]

اثبات: چون $\chi(A(R))=0$ به‌ازای هر $R\in S\setminus H$، طبق رابطهٔ (۴) $[\chi_H,\chi_H]=\frac{n_S}{n_H}[\chi,\chi]$. ازاین‌رو، بنابر تساوی (۳) داریم $\frac{\psi(1)}{m_\psi}=\frac{n_S}{n_H}\frac{\chi(1)}{m_\chi}$. حال چون $\mathbb{C}S$ یک جبر جابه‌جایی است داریم $\chi(1)=\psi(1)=1$ و در نتیجه $m_\chi=\frac{n_S}{n_H}m_\psi$.

مثال ۴: فرض کنیم G یک گروه متناهی و $C=(G,S)$ اسکیم شرکت‌پذیر گروهی G باشد. در این‌صورت جبر مجاورت اسکیم شرکت‌پذیر C با $Z(\mathbb{C}G)$ یک‌ریخت است که در آن $Z(\mathbb{C}G)$ مرکز گروه جبر $\mathbb{C}G$ است [۲].
بنابراین با توجه به سرشت‌های تحویل‌ناپذیر $Z(\mathbb{C}G)$ (فصل ۳ از [۷]) داریم:

$$\mathrm{Irr}(S)=\{\omega_\chi \mid \chi\in\mathrm{Irr}(G)\},$$

که در آن

$$\omega_\chi(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)})=\frac{|\mathrm{Cl}_G(g)|\chi(g)}{\chi(1)},$$

که $\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}=\sum_{h\in\mathrm{Cl}_G(g)}h$. همچنین چون $|G|=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(1)^2$، بنابر تساوی (۱) داریم $m_{\omega_\chi}=\chi(1)^2$ [۲، (۷.۱۵)].

فرض کنید (X,S) یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی باشد. در این‌صورت همه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر $\mathbb{C}S$ خطی هستند. فرض کنیم $S=\{R_i\}_{0\le i\le d}$ و قرار دهید $A_i=A(R_i)$. در این‌صورت جدول سرشت اسکیم شرکت‌پذیر (X,S) برابر یک ماتریس $(d+1)\times(d+1)$ مانند P است که درایه (i,j)-ام آن برابر $\chi_i(A_j)$ است. در واقع $P=\{\chi_i(A_j)\}_{0\le i,j\le d}$.

مثال ۵: فرض کنید G یک گروه متناهی و $T=(\chi_i(g_j))_{0\le i,j\le h}$ جدول سرشت G باشد. فرض کنید (G,S) اسکیم شرکت‌پذیر گروهی روی G و P جدول سرشت آن باشد. در این‌صورت، بنابر قضیهٔ ۲.۷ از [۲]، این رابطهٔ بین P و T وجود دارد:

$$T=\begin{pmatrix}\sqrt{m_{\chi_0}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{m_{\chi_h}}\end{pmatrix}.P.\begin{pmatrix}\frac{1}{|\mathrm{Cl}_G(g_0)|} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{|\mathrm{Cl}_G(g_h)|}\end{pmatrix}.$$

اگر (X,T) یک فیوژن (X,S) باشد، آن‌گاه جدول سرشت (X,T) را می‌توان به‌کمک جدول سرشت (X,S) به‌دست آورد. برای این منظور از قضیهٔ ۶ که در [۳] آورده شده است، استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۶: فرض کنید $C=(X,S)$ یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی باشد و $P=\{\chi_i(A_j)\}_{0\le i,j\le d}$ جدول سرشت آن باشد. فرض کنید $E_0=\{0\},E_1,\ldots,E_e$ یک افراز از $\{0,1,\ldots,d\}$ باشد. قرار دهید $\bar{R}_\alpha=\bigcup_{i\in E_\alpha}R_i$. در این‌صورت $\bar{C}=\left(X,\{\bar{R}_\alpha\}_{0\le\alpha\le e}\right)$ یک فیوژن (X,S) است اگر و تنها اگر

۱. به‌ازای هر $\alpha\in\{0,1,\ldots,e\}$، داشته باشیم

$$\bigcup_{i\in E_\alpha} R_{i'} = \bigcup_{j\in E_{\alpha'}} R_j ,$$

به‌ازای یک $\alpha' \in \{0,1,\dots,e\}$.

۲. افراز $E_0^* = \{0\}$، $E_1^*,\dots,E_e^*$ از $\{0,1,\dots,d\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $r,t \in E_\alpha^*$ و هر $0\le\beta\le e$،

$$\sum_{i\in E_\beta} \chi_r(A_i) = \sum_{i\in E_\beta} \chi_t(A_i) .$$

دراین‌صورت $\bar{P}=\{\bar{\chi}_i(\bar{A}_j)\}_{0\le i,j\le e}$ جدول سرشت اسکیم $\bar{C}$ است که در آن $\bar{A}_j = A(\bar{R}_j)$ و $\bar{\chi}_i(\bar{A}_j) = \sum_{k\in E_j} \chi_i(A_k)$. هم‌چنین به‌ازای هر $0\le\alpha\le e$،

$$m_{\bar{\chi}_i} = \sum_{r\in E_i^*} m_{\chi_r}$$

(توجه کنید که در ماتریس $\bar{P}$ سطرهای تکراری حذف شده است.)

جدول سرشت سه‌تایی‌های کامینا

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. گروه G را دارای خاصیت سه‌تایی کامینا گویند هر گاه زیرگروه‌های نرمال M و N از G که $N\subseteq M$ موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $g\in G\setminus M$، داشته باشیم، $\mathrm{Cl}_G(g)=gN$، [۸]. در حالتی که $M=N$، جفت (G,N) را یک جفت کامینا گویند و اگر $M=N=G'$، آن‌گاه گروه G را یک گروه کامینا گویند. بنابراین شرط سه‌تایی کامینا تعمیمی از شرط کامینا است. نتایج بسیار زیادی در مورد خواص و ویژگی‌های گروه‌های کامینا تا کنون ارائه شده است. اما در مورد گروه‌هایی که دارای خاصیت سه‌تایی کامینا هستند، بجز چند حالت خاص نتایج زیادی وجود ندارد. لویس[1] گروه‌هایی که تمامی سرشت‌های غیرخطی آنها روی عناصر غیرمرکزی گروه، صفر هستند را بررسی کرده است [۱۰]، که به اختصار به آنها VZ− گروه‌ها گفته می‌شود. این گروه‌ها در واقع دارای خاصیت سه‌تایی کامینا به‌ازای $M=Z(G)$ و $N=G'$ هستند. لویس سرشت‌های تحویل‌ناپذیر این گروه‌ها را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G/G' و $Z(G)$ تعیین کرده است. هم‌چنین لویس در مقاله دیگری گروه‌هایی با خاصیت سه‌تایی کامینا به‌ازای $M=Z(G)G'$ و $N=G'$ را بررسی کرده است و به‌طور مشابه یک مشخصه‌سازی از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر این گروه‌ها ارائه کرده است [۹].

فرض کنیم (G,M,N) یک سه‌تایی کامینا باشد. در این بخش سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه G را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G/N و M تعیین می‌کنیم. برای این منظور در ادامه این مقاله فرضیات زیر را نظر می‌گیریم و از آنها در لم‌های بعد استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم (G,M,N) یک سه‌تایی کامینا باشد. فرض کنیم $M=\bigcup_{i=0}^{t}\mathrm{Cl}_G(g_i)$. قرار می‌دهیم $\bar{M}=\{\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)} \mid 0\le i\le t\}$ که در آن $\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}=\sum_{h\in \mathrm{Cl}_G(g_i)} h$، و $\mathbb{C}\bar{M}$ را زیرجبر $Z(\mathbb{C}G)$ تولید شده به‌وسیلهٔ $\bar{M}$ روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم.

لم ۷: با توجه به فرضیات بالا، به‌ازای هر $0\le i\le t$ قرار دهید:

$$T_i = \{(x,y)\in M\times M \mid xy^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_i)\} .$$

1. M.L.Lewis

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.7.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.13]

در این‌صورت $(M,\{T_i\}_{0\le i\le t})$ یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی است و جبر مجاورت آن یکریخت با $\mathbb{C}\bar{M}$ است.

اثبات: همان‌طور که در مثال ۲ اشاره کردیم $C=(M,\{T_i\}_{0\le i\le t})$ یکی از فیوژن‌های اسکیم شرکت‌پذیر گروهی روی M است. به‌ازای هر i، قرار دهید:

$$A_i = A(T_i).$$

در این‌صورت به‌ازای هر $0\le i,j\le t$،

$$A_iA_j=\sum_{k=0}^{t}\lambda_{ijk}A_k$$

که در آن $\lambda_{ijk}=\left|\{z\in M \mid xz^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_i),\ zy^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_j)\}\right|$ به‌ازای عناصر $x,y\in M$ به‌طوری‌که $xy^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_k)$. از طرف دیگر به ازای هر $0\le i,j\le t$،

$$\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\,\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)}=\sum_{k=0}^{t}\mu_{ijk}\overline{\mathrm{Cl}_G(g_k)},$$

که در آن $\mu_{ijk}=\left|\{(a,b)\in M\times M \mid a\in \mathrm{Cl}_G(g_i),\ b\in \mathrm{Cl}_G(g_j),\ \ ab=c\}\right|$ به‌ازای یک عنصر دلخواه $c\in \mathrm{Cl}_G(g_k)$.

نشان می‌دهیم به‌ازای هر $0\le i,j,k\le t$، داریم $\lambda_{ijk}=\mu_{ijk}$. برای این منظور فرض کنید $x,y\in M$ به‌طوری‌که $c=xy^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_k)$. فرض کنید λ_{ijk} عنصر $z\in M$ وجود دارد که $xz^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_i)$ و $zy^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_j)$. اگر قرار دهیم $a=xz^{-1}$ و $b=zy^{-1}$ آن‌گاه حداقل λ_{ijk} عنصر $(a,b)\in M\times M$ وجود دارد که $ab=xy^{-1}=c$. بنابراین $\mu_{ijk}\ge\lambda_{ijk}$. برعکس، فرض کنیم μ_{ijk} عنصر $(a,b)\in M\times M$ وجود دارد که $ab=xy^{-1}\in \mathrm{Cl}_G(g_k)$. قرار می‌دهیم $z=by$. در این‌صورت حداقل μ_{ijk} عنصر $z\in M$ وجود دارد که $xz^{-1}=a\in \mathrm{Cl}_G(g_i)$ و $zy^{-1}=b\in \mathrm{Cl}_G(g_j)$. از این‌رو، $\lambda_{ijk}\ge\mu_{ijk}$. بنابراین $\lambda_{ijk}=\mu_{ijk}$.

در نتیجه به ازای هر $0\le i,j\le t$،

$$A_iA_j=\sum_{k=0}^{t}\lambda_{ijk}A_k$$

اگر و تنها اگر

$$\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\,\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)}=\sum_{k=0}^{t}\lambda_{ijk}\overline{\mathrm{Cl}_G(g_k)}.$$

بنابراین اگر $W(C)$ را جبر مجاورت اسکیم شرکت‌پذیر C در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$\theta: W(C)\to \mathbb{C}\bar{M}$$
$$A_i\to \overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}$$

یک یکریختی جبری است. در نتیجه $\mathbb{C}\bar{M}$ با جبر مجاورت C یکریخت است.

لم ۸: فرض کنید $\{\psi_1,\dots,\psi_r\}$ مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر M باشند به‌طوری‌که دو به دو در G مزدوج نیستند. در این‌صورت $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}\bar{M})=\{W_{\psi_1},\dots,W_{\psi_r}\}$ که

$$W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)})=\sum_{\mathrm{Cl}_M(m)\subseteq \mathrm{Cl}_G(g_i)}\omega_{\psi_i}(\mathrm{Cl}_M(m)).$$

به‌علاوه به‌ازای هر i،

$$m_{W_{\psi_i}}=|G:I_G(\psi_i)|\,m_{\omega_{\psi_i}}$$

که در آن $I_G(\psi_i)=\{g\in G \mid \psi_i^{\,g}=\psi_i\}$ گروه لختی ψ_i در G است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.7.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.13]

اثبات: چون طبق لم بالا، $\mathbb{C}\bar{M}$ جبر مجاورت یک فیوژن از اسکیم شرکت‌پذیر گروهی روی M است، طبق قضیهٔ ۶، افرازی از $\mathrm{Irr}(Z(\mathbb{C}M))$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر دو سرشت تحویل‌ناپذیر متعلق به یک کلاس مانند ω_θ و ω_φ باید داشته باشیم

$$\omega_\theta\left(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\right)=\omega_\varphi\left(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\right)\ ,\ \forall\, 0\le i\le t\,.$$

اما عبارت بالا برقرار است اگر و تنها اگر $\varphi=\theta^h$، به‌ازای یک $h\in G$. در نتیجهٔ تمامی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر $G-$ مزدوج با φ در کلاس φ از افراز ذکر شده قرار می‌گیرند. از این‌رو، متناظر با کلاس φ، سرشت تحویل‌ناپذیر $W_\varphi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{C}\bar{M})$ تعریف می شود به‌طوری‌که

$$W_\varphi(\mathrm{Cl}_G(g_i))=\sum_{\mathrm{Cl}_M(m)\subseteq\mathrm{Cl}_G(g_i)}\omega_\varphi(\mathrm{Cl}_M(m)).$$

به‌علاوه $m_{W_\varphi}=\sum_{\theta\in T_\varphi}m_{\omega_\theta}$ که در آن T_φ مجموعه تمام $G-$مزدوج‌های φ است. حال چون T_φ مدار φ تحت عمل G روی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر M با عمل تزویج است [۷، فصل ۶]، از این‌رو، طبق قضیهٔ مدار-پایدارساز داریم $\left|T_\varphi\right|=\left|G:I_G(\varphi)\right|$. بنابراین $m_{W_\varphi}=\left|G:I_G(\varphi)\right|m_{\omega_\varphi}$.

در لم ۹ و قضیهٔ ۱۰ از نمادهایی معرفی شده در لم ۸ استفاده شده است.

لم ۹: فرض کنید $\{\psi_1,\dots,\psi_r\}$ مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر M باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $N\not\subseteq \ker\psi_i$ و ψ_iها دو به دو $G-$ مزدوج نیستند. در این‌صورت به‌ازای هر i، نگاشت

$$\bar{W}_{\psi_i}:Z(\mathbb{C}G)\to\mathbb{C}$$

به‌طوری‌که

$$\begin{cases}\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)})=W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}), & g\in M\\ W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)})=0, & g\in G\setminus M\end{cases}$$

یک سرشت تحویل‌ناپذیر $Z(\mathbb{C}G)$ است و به‌علاوه

$$m_{\bar{W}_{\psi_i}}=\left|G:M\right|m_{W_{\psi_i}}\,.$$

اثبات: فرض کنیم $G=\bigcup_{i=0}^{n}\mathrm{Cl}_G(g_i)$. در این‌صورت $G\setminus M=\bigcup_{i=t+1}^{n}\mathrm{Cl}_G(g_i)$. برای این‌که نشان دهیم $\bar{W}_{\psi_i}\in\mathrm{Irr}(Z(\mathbb{C}G))$، کافی است نشان دهیم به‌ازای هر $0\le i,j\le n$ داریم

$$\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\ \overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)})=\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\ \bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)}).$$

ابتدا فرض کنیم $0\le i,j\le t$. چون $M\trianglelefteq G$، داریم

$$\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\ \overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)}=\sum_{i=0}^{t}\lambda_{ijk}\overline{\mathrm{Cl}_G(g_k)}.$$

دراین‌صورت چون $W_{\psi_i}\in\mathrm{Irr}(\mathbb{C}\bar{M})$ و $(\bar{W}_{\psi_i})_{\mathbb{C}\bar{M}}=W_{\psi_i}$ دیده می‌شود که

$$\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\,\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)})=\sum_{i=0}^{t}\lambda_{ijk}\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_k)})$$
$$=\sum_{i=0}^{t}\lambda_{ijk}W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_k)})$$
$$=W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\,\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)})$$
$$=W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)})W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)})$$
$$=\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)})\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)}).$$

حال فرض کنیم $0\leq i\leq t+1$ و $t+1\leq j\leq n$ و یا $t+1\leq i,j\leq n$. در این‌صورت

$$(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\,\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)})=\sum_{k=t+1}^{n}\lambda_{ijk}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_k)})$$

از این‌رو،

$$\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\;\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)})=\sum_{k=t+1}^{n}\lambda_{ijk}\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_k)})$$
$$=0=\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)})\,\bar{W}_{\psi_i}\,(\overline{\mathrm{Cl}_G(g_j)}).$$

بنابراین $\bar{W}_{\psi_i}:Z(\mathbb{C}G)\to\mathbb{C}$ یک همریختی جبری است و در نتیجه $\bar{W}_{\psi_i}\in\mathrm{Irr}(Z(\mathbb{C}G))$. به‌علاوه چون $\left(\bar{W}_{\psi_i}\right)_{\mathbb{C}\bar{M}}=W_{\psi_i}$ و $\bar{W}_{\psi_i}$ روی تمام عناصر $Cla(G)\setminus\bar{M}$ صفر است، که در آن $Cla(G)=\left\{\overline{\mathrm{Cl}_G(g_i)}\,|\,0\leq i\leq n\right\}$، طبق لم ۳ داریم $m_{\bar{W}\psi_i}=|G:M|m_{W_{\psi_i}}$.

در زیر نتیجه اصلی این مقاله را می‌آوریم.

قضیهٔ ۱۰: فرض کنید (G,M,N) یک سه‌تایی کامینا باشد. فرض کنید $\mathrm{Irr}(G/N)=\{\chi_1,\ldots,\chi_m\}$ و $\{\psi_1,\ldots,\psi_r\}$ مجموعه‌ای از تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر M باشد که به‌ازای هر i، $N\not\subseteq ker\psi_i$ و ψ_iها دو به دو $G-$ مزدوج نیستند. در این‌صورت

$$\mathrm{Irr}(G)=\left\{\bar{\chi}_1,\ldots,\bar{\chi}_m,\bar{\psi}_1,\ldots,\bar{\psi}_r\right\},$$

که در آن به‌ازای هر $g\in G$،

$$\bar{\chi}_i(g)=\chi_i(gN),$$

و

$$\begin{cases}\bar{\psi}_i(g)=0, & g\in G\setminus M\\ \bar{\psi}_i(g)=\dfrac{|G|\psi_i(1)}{|\mathrm{Cl}_G(g)|\sqrt{|M||I_G(\psi_i)|}}W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}), & g\in M,\end{cases}$$

که

$$W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)})=\sum_{\mathrm{Cl}_M(m)\subseteq\mathrm{Cl}_G(g)}\omega_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_M(m)}).$$

اثبات: طبق لم ۲.۲۲ از [۷]، به‌ازای هر $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G/N)$، سرشت $\bar{\chi}_i \in \mathrm{Irr}(G)$ که $\bar{\chi}_i(g)=\chi_i(gN)$ قابل تعریف است. بنابراین $\{\bar{\chi}_1,\dots,\bar{\chi}_m\}$ مجموعه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G است که $N \not\subseteq \ker \chi_i$. هم‌چنین طبق لم ۹، به‌ازای هر $1\le i\le r$ ، سرشت تحویل‌ناپذیر $\bar{W}_{\psi_i} \in \mathrm{Irr}(Z(\mathbb{C}G))$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} m_{\bar{W}_{\psi_i}} &= |G:M|\, m_{W\psi_i} \\ &= |G:M||G:I_G(\psi_i)|\psi_i^{\,2}(1). \end{aligned}$$

(در تساوی آخر در بالا از لم ۸ استفاده شده است.) به‌علاوه طبق مثال ۴، درجه سرشت تحویل‌ناپذیر $\bar{W}_{\psi_i}$ برابر

$$\deg \bar{W}_{\psi_i} = \sqrt{m_{\bar{W}_{\psi_i}}} = \frac{|G|\psi_i(1)}{\sqrt{|M||I_G(\psi_i)|}},$$

است. بنابراین به‌کمک مثال ۵ به‌ازای هر $1\le i\le r$، سرشت تحویل‌ناپذیر $\bar{\psi}_i$ از G وجود دارد به‌طوری‌که

$$\bar{\psi}_i(g) = \frac{(\deg \bar{W}_{\psi_i})(\bar{W}_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}))}{|\mathrm{Cl}_G(g)|}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{|G|\psi_i(1)}{|\mathrm{Cl}_G(g)|\sqrt{|M||I_G(\psi_i)|}} W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}), & g\in M \\ 0, & g \in G\setminus M \end{cases}$$

که $W_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}) = \sum_{\mathrm{Cl}_M(m)\subseteq \mathrm{Cl}_G(g)} \omega_{\psi_i}(\overline{\mathrm{Cl}_M(m)})$. بنابراین $\{\bar{\psi}_1,\dots,\bar{\psi}_r\}$ زیرمجموعه‌ای از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G است که $N \not\subseteq \ker \psi_i$.

حال فرض کنید $\theta \in \mathrm{Irr}(G)-\mathrm{Irr}(G/N)$. در این‌صورت چون $N\not\subseteq \ker\theta$، عنصر $g\in N$ وجود دارد به‌طوری‌که $\theta(g)\neq\theta(1)$ و یا به‌طور معادل

$$\omega_\theta(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}) \neq |\mathrm{Cl}_G(g)|.$$

حال چون به ازای هر $h\in G\setminus M$ داریم

$$\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}\;\overline{\mathrm{Cl}_G(h)} = |\mathrm{Cl}_G(g)|\overline{\mathrm{Cl}_G(h)},$$

از تساوی

$$\omega_\theta(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)})\omega_\theta(\overline{\mathrm{Cl}_G(h)}) = |\mathrm{Cl}_G(g)|\omega_\theta(\overline{\mathrm{Cl}_G(h)}),$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\omega_\theta(\overline{\mathrm{Cl}_G(h)})=0\,.$$

بنابراین $\theta(h)=0$ به ازای هر $h\in G\setminus M$.

از طرف دیگر فرض کنید $\psi\in\mathrm{Irr}(M)$ به‌طوری‌که $(\theta_M,\psi)\neq 0$. در این‌صورت چون $(\omega_\theta)_{\mathbb{C}\bar{M}} = W_\psi$، از این‌رو، به‌ازای هر $g\in M$،

$$\omega_\theta(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}) = W_\psi(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)})$$

که در آن

$$W_\psi(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)}) = \sum_{\mathrm{Cl}_G(m)\subseteq \mathrm{Cl}_G(g)} \omega_\psi(\overline{\mathrm{Cl}_M(m)}).$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.7.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.13]

پس به‌ازای هر $g\in G$، $\omega_\theta(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)})=\bar{W}_\psi(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)})$ که در آن

$$\begin{cases}\bar{W}_\psi(\overline{\mathrm{Cl}_G(g)})=\omega_\psi(\mathrm{Cl}_G(g)), & g\in M\\ \bar{W}_\psi(\mathrm{Cl}_G(g))=0, & g\in G\setminus M.\end{cases}$$

این نشان می‌دهد که $\theta=\bar{\psi}_i$ به‌ازای یک $1\le i\le r$، به‌طوری‌که $W_\psi=W_{\psi_i}$. بنابراین مجموعهٔ $\{\bar{\chi}_1,\dots,\bar{\chi}_m,\bar{\psi}_1,\dots,\bar{\psi}_r\}$ برابر تمامی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G است.

مثال۱۱: سه‌تایی کامینا $(G,Z(G),G')$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathrm{Irr}(G/G')=\{\chi_1,\dots,\chi_m\}$ و

$$\mathrm{Irr}(Z(G))-\mathrm{Irr}(Z(G)/G')=\{\psi_1,\dots,\psi_r\}.$$

در این‌صورت طبق قضیه بالا،

$$\mathrm{Irr}(G)=\{\bar{\chi}_1,\dots,\bar{\chi}_m,\bar{\psi}_1,\dots,\bar{\psi}_r\}$$

که در آن به‌ازای هر $g\in G$، $\bar{\chi}_i(g)=\chi_i(gG')$ و

$$\begin{cases}\bar{\psi}_i(g)=\sqrt{\dfrac{|G|}{|Z(G)|}}\psi_i(g), & g\in Z(G)\\ \bar{\psi}_i(g)=0, & g\in G\setminus Z(G).\end{cases}$$

نتیجه‌گیری

بررسی و تعیین جدول سرشت گروه‌های متناهی یکی از مسائل مهم در نظریهٔ نمایش گروه‌ها به‌شمار می‌رود. چنان‌که در مثال ۵ اشاره شد یک تناظر یک به یک و پوشا بین جدول سرشت یک گروه متناهی G و جدول سرشت $Z(\mathbb{C}G)$ وجود دارد. از طرفی چون $Z(\mathbb{C}G)$ را می‌توان به‌عنوان جبر مجاورت اسکیم شرکت‌پذیرگروهی روی G در نظر گرفت، می‌توان از نتایج و قضایای موجود در نظریه نمایش اسکیم‌های شرکت‌پذیر برای تعیین جدول سرشت $Z(\mathbb{C}G)$ استفاده کرد. بر همین اساس در این مقاله برای تعیین زیر مجموعه‌ای از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر یک سه‌تایی کامینا (G,M,N) که N در هسته آنها قرار ندارد، از نتایج موجود در مورد جدول سرشت فیوژن‌های یک اسکیم شرکت‌پذیر استفاده کرده‌ایم و به‌عنوان یک نتیجه اصلی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه G را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G/N و M ارائه داده‌ایم.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم که زحمت داوری این مقاله را پذیرفته و با نظرات ارزشمند خود به بهبود این مقاله کمک کردند، تشکر می‌کنیم.

منابع

1. Bagherian J., "A class of imprimitive association schemes", Comm. Algebra, 44 (2016) 3692-3704.
2. Bannai E., Ito T., "Algebraic Combinatorics I: Association Schemes", Benjamin/Cummings, Menlo Park (1984).

3. Bannai E., "Subschemes of some association schemes", J. Algebra, 144 (1991) 167-188.
4. French C., Zieschang P. H., "A Schur–Zassenhaus Theorem for association schemes", J. Algebra, 435 (2015) 88-123.
5. Hanaki A., "Clifford theory for association schemes", J. Algebra, 321 (2009) 1686-1695.
6. Hirasaka M., Muzychuk M., Zieschang P. H., "A generalization of Sylow's theorems on finite groups to association schemes", Math. Z., 241 (2002) 665-672.
7. Isaacs I. M., "Character Theory of Finite Groups", Academic Press, New York (1976).
8. Johnson K. W., Mattarei S., Sehgal S. K., "Weak Cayley tables", J. London Math. Soc., (2) 61 (2000) 395-411
9. Lewis M. L., "Generalizing Camina groups and their character tables", J. Group Theory, 12 (2009) 209-218.
10. Lewis M. L., "Character tables of groups where all nonlinear irreducible characters vanish off the center", in: Proceeding of Ischia Group Theory, (2008) 174-182.
11. Zieschang P. H., "An Algebraic Approach to Association Schemes", in: Lect. Notes in Math., vol. 1628, Springer-Verlag, Berlin (1996).
12. Zieschang P. H., "Theory of Association Schemes", Springer Monographs in Mathematics, Springer-Berlin (2005).