روش مونت-کارلو چند مرحله‌ای ضعیف برای شبیه‌سازی مشتقات مالی در حالت معادلات انتشار-پرش

آزاده قاسمی‌فرد*
دانشگاه مازندران، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی
محمدتقی جهاندیده
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

دریافت ۹۷/۰۲/۲۸ پذیرش ۹۹/۰۴/۲۵

چکیده

در این مقاله با الهام از پیشرفت‌های اخیر در زمینهٔ به‌کارگیری روش مونت-کارلو چند مرحله‌ای (MLMC)[1] به ارزش‌گذاری اختیار معاملات می‌پردازیم. ابتدا با استفاده از روش اویلر ضعیف، تخمین عددی ارزش دارایی پایه که در یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی چند بعدی با نوفهٔ لوی[2] صدق می‌کند محاسبه می‌شود و سپس به‌کمک روش مونت-کارلو چند مرحله‌ای ضعیف، قیمت مورد انتظار اختیار خرید به‌دست می‌آید. در این پژوهش به‌عنوان بهبودی بر کار بلومسنی[3] و با رویکردی جدید در نظریه، همگرایی‌ها را در فضای $L^p(\Omega)$ با $p \geq 2$ و نه فقط ۲ بیان و اثبات می‌کنیم. هم‌چنین درصدد اجرای الگوریتم MLMC ضعیف برای معادلات غیرخطی در حالتی هستیم که مؤلفه‌های X_i و X_j در ابعاد i و j ، مستقل نیستند. در پایان، کارایی روش با استفاده از چند مثال عددی برای فرایندهای مختلف با اختیار خرید نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی، روش مونت-کارلو چند مرحله‌ای ضعیف، تخمین ضعیف، روش اویلر[4]، فرایند لوی.

مقدمه

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال کامل مجهز به پالایه $\{\mathcal{F}_t\}$ باشد. فرایند تصادفی n بعدی (X_t) را در نظر بگیرید که در معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (۱) صدق می‌کند

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dZ_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{۱}$$

که در آن $a:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی) جملهٔ رانش[5] جبران‌شده[6]، $b:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ و $Z_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,q})$، یک فرایند لوی q بعدی شامل یک حرکت براونی q بعدی و یک فرایند پواسون جبران‌شده است که در نتیجه Z_t یک مارتینگل است و این انتخاب با نظریهٔ قیمت‌گذاری عادلانه[7] قابل توجیه است [۱۸]. فرض می‌کنیم a و b نگاشت‌های پیوستهٔ لیپشیتس هستند که حداکثر رشد خطی دارند و در نتیجه معادلهٔ (۱) خوش‌تعریف و دارای جواب یکتاست. هدف محاسبهٔ قیمت یک اختیار معامله، با عایدی $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ که یک تابع

*نویسنده مسئول a.ghasemi@umz.ac.ir

1. Multilevel Monte-Carlo
2. Lévy
3. Belomestny
4. Euler
5. Drift
6. Compensated
7. Fair pricing

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

پیوستهٔ لیپشیتس است، در یک بازار بدون آربیتراژ به‌صورت $\mathbb{E}[f(X_T)]$ است. برای رسیدن به مقصود به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدا تخمین عددی ارزش دارایی با استفاده از روش اویلر ضعیف محاسبه شده، سپس به‌کمک روش مونت-کارلوی چند مرحله‌ای ضعیف قیمت اختیار معامله به‌دست می‌آید، البته ماهیت الگوریتم به‌گونه‌ای است که هر دو مرحله به‌صورت هم‌زمان پیش می‌روند.

از حدود سال ۱۹۸۰ ریاضی‌دانان مختلفی به ارائهٔ روش‌های حل عددی معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی در قالب‌های همگرایی قوی و ضعیف و روش‌های صریح و ضمنی پرداختند. با این وجود از به‌کارگیری این روش‌ها در ریاضیات مالی زمان زیادی نمی‌گذرد. در سال ۱۹۸۵، پلاتن و ریبالدو[1] روشی ضعیف مبتنی بر گسسته‌سازی را برای نیم-مارتینگل‌ها معرفی کردند [۱۹]. در سال ۱۹۸۶ به‌روش عددی آورینا[2] و آرتماو[3] [۱] و تلاش‌های دراموند[4] و همکارانش [۷] می‌توان اشاره کرد. میکلوشس[5] و پلاتن[6] در سال ۱۹۸۸ بسط تیلور قوی و سازگار با پرش را برای فرایندهای ایتو بیان بیان کردند [۱۶]. کلودن[7] و همکارانش روشی ضعیف به‌همراه برونیابی برای معادلات انتشار[8] در سال ۱۹۹۵ مطرح کردند [۱۲]. بارژ[9] و بارژ نیز در سال ۱۹۹۶ روش رونگه-کوتای مرتبهٔ بالا را معرفی کردند [۵]. یک روش ضمنی ضعیف عاری از مشتق مبتنی بر روش‌های پیشگو-اصلاحگر در سال ۲۰۰۶ به‌وسیلهٔ بروتی-لیبراتی[10] و پلاتن ابداع شد [۴]. در مورد بررسی‌های انجام شده در زمینهٔ ریاضیات مالی می‌توان به مقالهٔ نایینومیا[11] و ویکتور[12] بر اساس یک روش همگرای ضعیف برای معادلات انتشار و کاربرد جواب حاصل در ارزش‌گذاری مشتقات مالی در سال ۲۰۰۸ اشاره کرد [۱۷]. در سال ۲۰۱۱ نیز سیوپچا[13] و تایکمن[14] روش تیلور قوی و ضعیف را در مدل لایبر[15] برای ارزش‌گذاری مشتقات مالی به‌کار گرفتند [۲۱]. کاستیبل[16] و همکاران نیز روش درخت چندجمله‌ای را برای تخمین عددی جواب یک معادلهٔ انتشار-پرش[17] به همراه رژیم در ارزش‌گذاری مشتقات مالی معرفی کردند [۶].

روش مونت-کارلوی چند مرحله‌ای اولین بار در سال ۲۰۰۸ به‌منظور کاهش هزینهٔ محاسباتی مقدار مورد انتظار[18] جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی با استفاده از روش مونت-کارلوی استاندارد، به‌وسیلهٔ جایلز [۹] معرفی شد. در این مقاله نشان داده شد که هزینهٔ محاسباتی برای تابع عایدی لیپشیتس از $\mathcal{O}(\epsilon^{-3})$ به $\mathcal{O}(\epsilon^{-2}(\log\epsilon)^2)$ کاهش می‌یابد. پس از معرفی MLMC پژوهش‌گران زیادی به استفاده و بررسی آن پرداختند. در سال ۲۰۱۰ مارکسن[19] الگوریتم MLMC را برای معادلات تصادفی با نوفهٔ لوی بهبود داد [۱۴]. در همان سال جایلز و شیا[20] با بهره‌گیری از روش‌های پرش-سازوار[21]، الگوریتم را برای معادلات انتشار-پرش به‌کار بستند [۲۲]. در [۱۰] نیز روش MLMC برای تابع بازدهی غیر لیپشیتس آنالیز و بررسی شد. روش مونت-کارلو چند مرحله‌ای نیاز به شرایطی اولیه دارد تا قابل اجرا

1. Rebolledo
2. Averina
3. Artemav
4. Drummond
5. Mikulevicius
6. Platen
7. Kloeden
8. Diffusion
9. Burrage
10. Bruti-Liberati
11. Ninomiya
12. Victoir
13. Siopacha
14. Teichmann
15. LIBOR
16. Costabile
17. Jump-diffusion
18. Expectation
19. Marxen
20. Xia
21. Jump-adapted

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

باشد. تا سال ۲۰۱۴ پژوهش‌گران به‌منظور تأمین این شرایط فقط قادر به استفاده از روش‌های تخمین قوی بودند. از طرفی در فضاهای چند بعدی به‌دلیل وجود نواحی لوی[1]، که محاسبهٔ آن‌ها دشوار و زمانبر است، به‌کار بردن روش‌های عددی قوی با مرتبهٔ بالا به‌منظور کاهش هزینهٔ محاسباتی به‌وسیلهٔ MLMC مقرون به صرفه نیست. به‌عنوان اولین تلاش برای عدم استفاده از روش‌های تخمین قوی، جایلز و سپراچ[2] روش مونت-کارلوی چند مرحله‌ای متضاد[3] را به عنوان بهبودی بر MLMC برای افزایش سرعت شبیه‌سازی معادلات انتشار در حالت چند بعدی معرفی کردند [۸]. در روش آن‌ها با استفاده از روش میلشتین[4] بدون نواحی لوی (که دارای مرتبهٔ همگرایی قوی کم‌تری است) به‌همراه الگوریتم MLMC متضاد، نرخ کاهش واریانس به اندازهٔ به‌کارگیری روش MLMC با روش میلشتین کامل به‌دست آمد. تلاش دوم در زمینهٔ عدم به‌کارگیری روش‌های تخمین قوی، در سال ۲۰۱۷ به‌وسیلهٔ بلومسنی و نگپتیان[5] با معرفی روش MLMC ضعیف انجام شد [۳]. آنها نه تنها روش MLMC را با روش اویلر ضعیف به‌کار بردند بلکه هزینهٔ محاسباتی آن نیز افزایش نیافت. بنابراین روش مونت-کارلو چند مرحله‌ای ضعیف از این نظر قابل توجه است که دیگر نیازی به استفاده از روش‌های تخمین قوی ندارد.

در این مقاله، با الهام از ایدهٔ بلومسنی و با رویکردی جدید در نظریه، درصدد بهبود همگرایی‌ها برای روش MLMC ضعیف در فضای $L^p(\Omega)$ برای $p \geq 2$ و همین‌طور ارائهٔ مثال برای معادلات غیرخطی با مؤلفه‌های وابستهٔ X هستیم. ایدهٔ اصلی بر اساس نمایش جملهٔ $X_{r\Delta_c}^{\Delta_f}$ بر بازهٔ زمانی Δ_c، یعنی بسط $X_{r\Delta_c}^{\Delta_f}$ بر اساس $X_{(r-1)\Delta_c}^{\Delta_f}$ استوار است که به تفصیل به تشریح آن می‌پردازیم. بنابراین طرح مقاله بدین‌صورت است، در بخش دو روش مونت-کارلوی چند مرحله‌ای و روش مونت-کارلوی چند مرحله‌ای ضعیف را شرح می‌دهیم. در بخش سوم با رویکرد نظری جدید، به‌روش MLMC به‌همراه روش اویلر ضعیف می‌پردازیم. در بخش چهار، شبیه‌سازی مدل به همراه نتایج عددی به‌عنوان شاهدی بر صحت نظریه ارائه می‌شود. در بخش پنج نیز نتیجه‌گیری بیان شده است.

روش مونت-کارلوی چند مرحله‌ای

الگوریتم MLMC با تخفیف عملیات محاسباتی و کاهش واریانس، خیلی زود برتری خود را بر مونت-کارلوی استاندارد یافت و در شبیه‌سازی فضاهای چندبعدی و به‌ویژه علوم مالی جایگاه ویژه‌ای یافت. این روش، محاسبات را در چندین مرحله به شیوه‌ای پیش می‌برد که تعداد مسیرهای بهینه که در مراحل مختلف شبیه‌سازی به‌کار می‌روند به‌گونه‌ای با هم متفاوتند که در مرحله‌ای که بازه‌های زمانی بیش‌تری وجود دارد مسیرهای نمونه‌ای کم‌تری انتخاب می‌شود و به این ترتیب هزینهٔ محاسبات را کاهش می‌دهد.

در توضیح آن فرض کنید $\Delta_l = T/2^l$، $l = 0,\ldots,L$ و X_T^l تخمین عددی گسستهٔ X_T با روش عددی مبتنی بر Δ_l باشد. اساس روش MLMC بر پایهٔ مجموع تلسکوپی (۲) است:

$$\mathbb{E}[f(X_T^L)] = \mathbb{E}[f(X_T^0)] + \sum_{l=1}^{L}\mathbb{E}[f(X_T^l) - f(X_T^{l-1})], \qquad (۲)$$

که در آن ظریف‌ترین تخمین (که هزینهٔ محاسباتی بالایی دارد) به‌صورت مجموع تخمین‌های پی در پی (با هزینه‌های محاسباتی کمتر) نوشته شده و سپس روش مونت-کارلو برای تخمین مقادیر مورد انتظار در مجموع به‌کار گرفته

1. Lévy area
2. Szpruch
3. Antithetic
4. Milstein
5. Nagapetyan

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

می‌شود. به‌عبارت دقیق‌تر، به‌طور مستقل برای هر $l=1,\dots,L$، تعداد N_l شبیه‌سازی از X_T^l و X_T^{l-1} انجام می‌شود و سپس تقریب MLMC برای تخمین $\mathbb{E}[f(X_T)]$ بدین‌صورت محاسبه می‌شود:

$$\mathbb{E}[f(X_T^L)]=\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} f(X_T^{0,i})+\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{N_l}\sum_{i=1}^{N_l}[f(X_T^{l,i})-f(X_T^{l-1,i})].$$

برای این‌که بتوان روش MLMC را به‌کار برد شرایطی مورد نیاز است که جایلز [۹] به بیان آنها پرداخته است.

فرض کنید $P=f(X_T)$ و $P_l=f(X_T^l)$، $l=1,\dots,L$ که در نتیجه معادلهٔ (۲) به‌صورت (۳) بازنویسی می‌شود:

$$\mathbb{E}[P_L]=\mathbb{E}[P_0]+\sum_{l=1}^{L}\mathbb{E}[P_l-P_{l-1}], \qquad (۳)$$

هم‌چنین فرض کنید Y_0 برآوردگر[1] تخمین $\mathbb{E}[P_0]$ بر اساس N_0 شبیه‌سازی و Y_l، $l\geq 1$ برآوردگر تخمین $\mathbb{E}[P_l-P_{l-1}]$ با استفاده از N_l شبیه‌سازی باشد، یعنی:

$$Y_l=\frac{1}{N_l}\sum_{i=1}^{N_l}(P_l^i-P_{l-1}^i).$$

قضیه [۹] (پیچیدگی محاسباتی). اگر ثابت‌های مثبت c_1,c_2,c_3 , b, $a\geq\frac{1}{2}$ به‌گونه‌ای موجود باشند که این شرایط برقرار باشند،

۱. $|\mathbb{E}[P_l-P]|\leq c_1\Delta_l^a$,

۲. $\mathbb{E}[Y_l]=\begin{cases}\mathbb{E}[P_0], & l=0\\ \mathbb{E}[P_l-P_{l-1}], & l>0\end{cases}$،

۳. C_l هزینهٔ محاسباتی Y_l، در $C_l\leq c_2N_l\Delta_l^{-1}$ صدق کند،

۴. $\mathbb{V}(Y_l)\leq c_3N_l^{-1}\Delta_l^b$,

در این صورت ثابت c_4 وجود دارد که برای هر $e<\frac{1}{e}$ اعداد L و N_l وجود دارند که تقریب MLMC

$$Y=\sum_{l=0}^{L}Y_l$$

دارای خطای میانگین مربع[2]

$$MSE\equiv\mathbb{E}\Big[\big(Y-\mathbb{E}[P]\big)\Big]^2<e^2$$

و هزینهٔ محاسباتی

$$C\leq\begin{cases}c_4e^{-2}, & b>1,\\ c_4e^{-2}(\log e)^2, & b=1,\\ c_4e^{-2-(1-b)/a}, & 0<b<1,\end{cases}$$

است.

در الگوریتم مونت-کارلوی چند مرحله‌ای مقدار بهینه برای N_l با استفاده از کمینه‌سازی هزینهٔ کل محاسباتی $\sum_{l=0}^{L}N_l\Delta_l^{-1}$، به شرط $\mathbb{V}(Y)\leq\frac{1}{2}e^2$ به‌دست می‌آید که به‌همراه شرط $\big(\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[P]\big)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}e$، مقدار MSE

1. Estimator
2. Mean square error

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

از ε^2 کم‌تر خواهد بود. مقدار بهینه برای N_l عبارت است از [۹]:

$$N_l = 2\varepsilon^{-2}\sqrt{\mathbb{V}(Y_l)\Delta_l}\left(\sum_{i=0}^{L}\sqrt{\mathbb{V}(Y_i)/\Delta_i}\right).$$

از بین شرایط مورد نیاز برای اجرای روش MLMC، فقط برقراری شرط آخر دشوار است. شرط اول به معنای همگرایی ضعیف روش عددی استفاده شده برای تخمین X از مرتبهٔ a است. شرط دوم نا اریبی برآوردگر تخمین مقادیر مورد انتظار را نشان می‌دهد و شرط سوم که دور از ذهن هم نیست، هزینهٔ محاسباتی هر مرحله را کران‌دار می‌کند. استانداردترین راه برقراری شرط چهارم برای یک تابع عایدی لیپشیتس، از طریق همگرایی قوی روش عددی از مرتبهٔ $b/2$ است، زیرا

$$\mathbb{V}\left[f(X_T^l)-f(X_T^{l-1})\right]\le c_f\left(\mathbb{E}\left[\left|X_T^l-X_T\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\left|X_T^{l-1}-X_T\right|^2\right]\right)\le c_f\Delta_l^b,$$

که در نتیجه روش همگرای ضعیف از مرتبهٔ $a=b/2$ نیز خواهد بود. اما نکته این‌جا است که ما به قیمت اختیار معامله (به‌عنوان یک مقدار مورد انتظار) علاقه‌مندیم و بنابراین به‌کار بردن همگرایی قوی ایدهٔ مناسبی نیست (آن هم زمانی که شبیه‌سازی دقیق مسیرهای لوی دشوار است)، از این‌رو، به‌منظور برطرف کردن این مشکل بلومسنی روش MLMC ضعیف را معرفی کرد [۳].

روش مونت-کارلوی چند مرحله‌ای ضعیف

بلومسنی نشان داد که روش مونت-کارلوی چند مرحله‌ای را می‌توان با روش‌های عددی تخمین ضعیف نیز به‌کار گرفت. او با بهره گرفتن از یک ایدهٔ جفت‌سازی[1] بین مراحل گسسته‌سازی متوالی $\left(X^{l-1},X^l\right)$ در معادله‌های دیفرانسیل تصادفی با نوفهٔ لوی نشان داد که هزینهٔ محاسباتی با حالتی که تخمین عددی اویلر قوی در شبیه‌سازی X به‌کار رفته یکسان است. به این معنا که در اجرای روش گسسته‌سازی اویلر ضعیف برای دستیابی به دقت $\mathcal{O}(\varepsilon)$، هزینهٔ محاسباتی همانند روش اویلر قوی $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2}(\log\varepsilon)^2)$ است. به بیان دیگر می‌توان گفت که بلومسنی برقراری شرط ۴ از شرایط مورد نیاز برای به‌کارگیری روش MLMC را مستقل از همگرایی قوی روش عددی به‌دست آورد، یعنی نشان داد که بدون اعمال شرایط محدودکننده بر توابع شرکت کننده در معادلات دیفرانسیل تصادفی انتشار-پرش، روش اویلر ضعیف دارای واریانس مرحله‌ای مرتبهٔ ۱ است که مشابه معادلات انتشار با روش اویلر قوی است و این مطلب حاکی از ارزشمندی روش MLMC ضعیف است.

در توضیح آن فرض کنید که $n_f=2\times n_c$، $\Delta_f=T/n_f$، $\Delta_c=T/n_c$ به‌ترتیب گام‌های زمانی ظریف[2] و درشت[3] باشند، $z_j^f\in\mathbb{R}^q$ $j=1,\dots,n_f$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع (تقریب مناسبی از نموهای لوی در بازهٔ ظریف‌تر) باشند و $z_j^c\in\mathbb{R}^q$ یعنی تقریب نموها در بازهٔ درشت‌تر، به‌گونه‌ای محاسبه شوند که اختلاف آن‌ها که به‌صورت $\mathcal{R}_j$ در

$$\mathcal{R}_j \doteq z_j^c - z_{2j-1}^f - z_{2j}^f,\quad j=1,\dots,n_c,$$

تعریف شده، به اندازهٔ کافی کوچک باشد. بلومسنی ثابت کرد که اگر $\|\mathbb{E}[z_j^f]\|=\mathcal{O}(\Delta_f)$، $\mathbb{E}[\|z_j^f\|^2]=\mathcal{O}(\Delta_f)$ و $\mathbb{E}[\|\mathcal{R}_j\|^2]=\mathcal{O}(\Delta_f^2)$، برای $\Delta_f\to 0$ داریم [۳]:

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\le j\le n_c}\left\|X_{j\Delta_c}^{\Delta_f}-X_{j\Delta_c}^{\Delta_c}\right\|^2\right]=\mathcal{O}(\Delta_f),$$

1. Coupling
2. Fine
3. Coarse

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

که در آن $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی است و شرط ۴ را به‌ازای $b=1$ محقق می‌سازد. او در اثبات این مطلب، جملهٔ $X^{\Delta_f}_{r\Delta_c}-X^{\Delta_c}_{r\Delta_c}$ را بر حسب $X^{\Delta_f}_{(r-1)\Delta_c}-X^{\Delta_c}_{(r-1)\Delta_c}$ بسط داده و با کران‌دار ساختن سایر جملات موجود و استفاده از نامساوی دوب[1] به نتیجهٔ دلخواه می‌رسد. در بخش بعد به‌روش MLMC و همگرایی‌ها با رویکردی جدید می‌پردازیم. (فونت ۱۱)

MLMC با روش اویلر ضعیف

فرض کنید $N\in\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی)، $\Delta=T/N$ و $X_0\in\mathbb{R}^n$ بردار تصادفی مقدار اولیه باشد. به‌کارگیری روش اویلر برای تخمین عددی X_i، مؤلفه‌ی iام X، که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند عبارت است از:

$$X^{\Delta}_{r\Delta,i}=X^{\Delta}_{(r-1)\Delta,i}+a_i(X^{\Delta}_{(r-1)\Delta})+\sum_{j=1}^{q}b_{ij}(X^{\Delta}_{(r-1)\Delta})\Delta Z_{r,j}, \qquad (۴)$$

که در آن $\Delta Z_{r,j}=Z_{r\Delta,j}-Z_{(r-1)\Delta,j}$، $r=1,\dots,N,\ j=1,\dots,q$ و $\mathbb{E}\left[\|X_0\|^h\right]<\infty$ و $h=1,\dots$.

مفروضات

در این قسمت مفروضات لازم برای اثبات شرط چهارم مورد نیاز الگوریتم MLMC به‌ازای $b=1$ (کاهش واریانس مرتبهٔ اول) برای روش اویلر ضعیف ارائه می‌گردد. فرض کنید $a\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ و $b\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^q)$، دارای مشتقات مرتبهٔ اول کران‌دار یکنواخت باشند. به‌عبارت دقیق‌تر برای هر $x,x'\in\mathbb{R}^n$، $1\le i\le n$ و $1\le j,l\le q$، ثابت C موجود است که

$$\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_l}(x)\right|\le C,\quad \left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_l}(x)\right|\le C.$$

که $|\cdot|$ نماد قدر مطلق است و در نتیجه با نرم اقلیدسی داریم:

$$|a_i(x)-a_i(x')|\le C\|x-x'\|,\quad |a_i(x)|\le C(1+\|x\|),$$
$$|b_{ij}(x)-b_{ij}(x')|\le C\|x-x'\|,\quad |b_{ij}(x)|\le C(1+\|x\|).$$

به‌منظور اجرای موفقیت آمیز الگوریتم MLMC، باید برقراری شرایط ۱ و ۴ را فراهم کنیم.

اگر روش اویلر (۴) همگرای قوی از مرتبهٔ $b/2$ باشد، یعنی

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\le r\le N}\|X^{\Delta}_{j\Delta}-X_{j\Delta}\|^2\right]\lesssim\Delta^b,$$

در این صورت شرایط ۱ و ۴ به‌ازای $a=b/2$ برقرار خواهند بود. اما چنان‌که گفته شد ما علاقه‌مند به‌روش ضعیف هستیم، به این معنا که می‌خواهیم نمو لوی $\Delta Z_{r,j}$ را با متغیرهای تصادفی گسسته که شبیه‌سازی آنها ساده‌تر است، جای‌گزین کنیم. برای این منظور فرض کنید $N_f=2\times N_c$ و $\Delta_f=T/N_f$ و $\Delta_c=T/N_c$، به‌ترتیب مربوط به گسسته‌سازی ظریف و گسسته‌سازی درشت باشند (هر بازهٔ زمانی درشت به دو بازهٔ ظریف تقسیم می‌شود). اساس روش همانند بلومسنی به این صورت است که ابتدا $z^{f}_{r,j}$ به طریقی انتخاب می‌شود که توزیع آن به اندازهٔ کافی به توزیع $\Delta_f Z_{r,j}$ نزدیک باشد و سپس $z^{c}_{r,j}$ به‌گونه‌ای تعریف می‌شود که

$$z^{c}_{r,j}=z^{f}_{2r-1,j}+z^{f}_{2r,j},\quad r=1,\dots,N_c,\quad j=1,\dots,q. \qquad (۵)$$

1. Doob

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

هم‌چنین فرض می‌شود که بردارهای تصادفی $z_1^f,\ldots,z_{N_f}^f$ مستقل و هم‌توزیع (نموهای لوی) و گشتاورهای آن‌ها به‌ازای عدد صحیح و ثابت $g \geq 1$ در

$$\left\|\mathbb{E}[z_r^f]\right\| = \mathcal{O}(\Delta_f), \quad \mathbb{E}\left[\left\|z_r^f\right\|^g\right] = \mathcal{O}(\Delta_f^{\frac{g}{2}}) \qquad (۶)$$

صدق کند. همگرایی ضعیف روش اویلر با مرتبهٔ $v=1$ در [۲۰] و [۱۸] قضیه‌های ۳، ۴ و ۱۲ اثبات شده است. در این‌جا همگرایی به‌ازای رده‌ای از توابع $g \in C_P^{2(v+1)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$، شامل توابع $2(v+1)$ بار مشتق‌پذیر پیوسته که به‌همراه مشتقات خود تا مرتبهٔ $2(v+1)$ دارای رشد چندجمله‌ای هستند، بررسی می‌شود. بنابراین اگر از روش اویلر ضعیف استفاده کنیم شرط اول به‌ازای $a=1$ برقرار است. اکنون به مقدمات لازم برای برقراری شرط ۴ می‌پردازیم. از آن‌جاکه ردهٔ توابع $C_P^4(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ شامل توابع لیپشیتس و بنابراین تابع عایدی مورد نظرمان است، لم ۱ را داریم.

لم ۱. عدد ثابت K_p، مستقل از Δ به‌گونه‌ای وجود دارد که

$$\left|\mathbb{E}[g(X_{N\Delta}^{\Delta})] - \mathbb{E}[g(X_T)]\right| \leq K_p\Delta,$$
$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq r\leq N}\left\|X_{r\Delta}^{\Delta}\right\|^p\right] \leq K_p,$$

که در آن $p \geq 1$، $g \in C_P^4(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ و $\Delta = T/N$ گام زمانی گسسته‌سازی است.

اثبات. نامساوی اول که همگرایی روش اویلر ضعیف است و در [۱۸] قضیه‌های ۳، ۴ و ۱۲ ثابت شده است، بنابراین کافی است که به نامساوی دوم بپردازیم یعنی ثابت کنیم تخمین اویلر ضعیف دارای گشتاور مرتبهٔ p کران‌دار یکنواخت است. برای این منظور با استناد به [۱۵, لم ۹,۱] کافی است برقراری دو نامساوی مورد نیاز را اثبات کنیم.

برای این منظور روش اویلر را به‌صورت برداری

$$X_{r\Delta}^{\Delta} = X_{(r-1)\Delta}^{\Delta} + A(t_{r-1}, X_{(r-1)\Delta}^{\Delta}, \Delta; z_r),$$
$$A(t,x,\Delta;z) = a(x)\Delta + \sum_{j=1}^{q} b_j(x) z_j,$$

بازنویسی می‌کنیم که در آن $b_j:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$، ستون j م b است، باید ثابت کنیم:

$$\| A(t_{r-1},x,\Delta;z_r)\| \leq M(z_r)(1+\|x\|)\Delta^{\frac{1}{2}},$$
$$\left\|\mathbb{E}\left[A(t_{r-1},x,\Delta;z_r)\right]\right\| \leq K(1+\|x\|)\Delta,$$

که در آن K عددی ثابت و $M(z_r)$ شامل گشتاورهای z_r است.

با استفاده از مفروضات (۶)، A را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$A(t,x,\Delta;z) = a(x)\Delta + \sqrt{\Delta}\sum_{j=1}^{q} b_j(x)\hat{z}_j,$$

به‌طوری‌که $\hat{z}_j = \sqrt{\Delta} z_j$

برای نامساوی اول، به‌ازای ثابت‌های c_1 و c_2 و c_3 داریم:

$$\begin{aligned}\left\|A(t_{r-1},x,\Delta;z_r)\right\| &\leq \|a(x)\|\Delta + \sqrt{\Delta}\sum_{j=1}^{q}\left\|b_j(x)\right\|\cdot\left|\hat{z}_{r,j}\right| \\ &\leq c_1(1+\|x\|)\Delta + c_2(1+\|x\|)\left\|\hat{z}_r\right\|\sqrt{\Delta}, \\ &\leq c_3(1+\|x\|)(1+\left\|\hat{z}_r\right\|)\sqrt{\Delta}.\end{aligned}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

که در مراحل مذکور از رشد خطی a، رشد خطی b_j که از b_{lj} نتیجه می‌شود و $\Delta \le \sqrt{T}\sqrt{\Delta}$ استفاده شده است.

برای نامساوی دوم، به‌ازای ثابت c_4 داریم:

$$\left\|\mathbb{E}\left[A(t_{r-1},x,\Delta z_r)\right]\right\| \le \|a(x)\|\Delta + \sqrt{\Delta}\sum_{j=1}^{q}\|b_j(x)\|\cdot\left|\mathbb{E}[z_{r,j}]\right| \le c_4(1+\|x\|)\Delta,$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است، زیرا $\left|\mathbb{E}[z_r^f]\right| = 0$ و a دارای رشد خطی است. بنابراین چون فرض کردیم که X_0 دارای گشتاورهای کران‌دار است، بنابر [۱۵، لم ۹,۱]، $X_{r\Delta}^{\Delta}$ دارای گشتاورهای مرتبهٔ p یکنواخت کران‌دار نسبت به N و $r=1,\dots,N$ هستند.

فرض می‌کنیم تابع عایدی f و توزیع ζ_L طوری انتخاب شده‌اند که

$$\left|\mathbb{E}[f(X_T^{\Delta_L}(\zeta_L))] - \mathbb{E}[f(X_T)]\right| \le K\Delta_L.$$

بنابراین اگر از روش اویلر ضعیف استفاده کنیم شرط اول به‌ازای $\alpha = 1$ برقرار است. اکنون به مقدمات لازم برای برقراری شرط ۴ می‌پردازیم

لم ۲. با توجه به این‌که a_i و b_{ij} دارای مشتقات مرتبهٔ اول کران‌دار هستند، ثابت K_p مستقل از Δ وجود دارد که

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\le r\le N}\left|a_i(X_{r\Delta}^{\Delta})\right|^p\right] \le K_p, \quad \mathbb{E}\left[\max_{0\le r\le N}\left|b_{ij}(X_{r\Delta}^{\Delta})\right|^p\right] \le K_p. \qquad (۷)$$

اثبات. توابع a,b دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول کران‌دار هستند و بنابراین زمانی که $\|x\|\to\infty$، دارای رشد خطی هستند و در نتیجه کران مطلوب از لم قبل حاصل می‌شود [۸، نتیجه ۴,۳].

در ادامه ثابت می‌کنیم که تخمین‌های متوالی اویلر (ظریف و درشت) به طرز مناسبی کران‌دار می‌شوند.

لم ۳. برای هر $p \ge 2$، تخمین اویلر $X_{r\Delta}^{\Delta}$ به‌صورت

$$\max_{0\le r\le N}\mathbb{E}\left[\left\|X_{r\Delta}^{\Delta} - X_{(r-1)\Delta}^{\Delta}\right\|^p\right] \le K_p\Delta^{\frac{p}{2}},$$

کران‌دار می‌شود، که K_p یک ثابت مستقل از Δ است.

اثبات. با شروع از معادلهٔ (۴) و نامساوی

$$\left|\sum_{s=1}^{M} x_s\right|^p \le M^{p-1}\sum_{s=1}^{M}|x_s|^p, \qquad (۸)$$

داریم:

$$\mathbb{E}\left[\left|X_{r\Delta,i}^{\Delta} - X_{(r-1)\Delta,i}^{\Delta}\right|^p\right] \le 2^{p-1}\left(\mathbb{E}\left[\left|a_i(X_{(r-1)\Delta}^{\Delta})\Delta\right|^p\right] + \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{q} b_{ij}(X_{(r-1)\Delta}^{\Delta})z_{r,j}\right|^p\right]\right).$$

جملهٔ اول از مرتبهٔ $\mathcal{O}(\Delta^p)$ است زیرا $\mathbb{E}\left[\left|a_i(X_{(r-1)\Delta}^{\Delta})\right|^p\right]$ به‌طور یکنواخت کران‌دار است.

در مورد جملهٔ دوم، به‌دلیل مستقل بودن $z_{r,j}$ از $X_{(r-1)\Delta}^{\Delta}$، نامساوی (۸) به‌همراه (۶) و کران‌داری یکنواخت $\mathbb{E}\left[\left|b_{ij}(X_{(r-1)\Delta}^{\Delta})\right|^p\right]$، نتیجه می‌دهد:

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{q} b_{ij}(X_{(r-1)\Delta}^{\Delta})z_{r,j}\right|^p\right] \le q^{p-1}\sum_{j=1}^{q}\mathbb{E}\left[\left|b_{ij}(X_{(r-1)\Delta}^{\Delta})\right|^p\right]\mathbb{E}\left[\|z_r\|^p\right] = \mathcal{O}(\Delta^{\frac{p}{2}}).$$

از طرف دیگر، با استفادهٔ دوباره از نامساوی (۸) داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

$$\mathbb{E}\left[\left\|X^{\Delta}_{r\Delta}-X^{\Delta}_{(r-1)\Delta}\right\|^{p}\right]\le n^{p-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|X^{\Delta}_{r\Delta,i}-X^{\Delta}_{(r-1)\Delta,i}\right|^{p}\right],$$

بنابراین جای‌گذاری دو کران به‌دست آمده برای هر i ما را به نتیجهٔ دلخواه می‌رساند.

اکنون با استفاده از نماد f برای تخمین ظریف و نماد c برای تخمین درشت، مولفهٔ iم تخمین اویلر ضعیف عبارت است از:

$$X^{c}_{r\Delta_c,i}=X^{c}_{(r-1)\Delta_c,i}+a_i(X^{c}_{(r-1)\Delta_c})\Delta_c+\sum_{j=1}^{q}b_{ij}(X^{c}_{(r-1)\Delta_c})z^{c}_{r,j}, \tag{۹}$$

$$X^{f}_{r\Delta_c,i}=X^{f}_{(2r-1)\Delta_f,i}+a_i(X^{f}_{(2r-1)\Delta_f})\frac{\Delta_c}{2}+\sum_{j=1}^{q}b_{ij}(X^{f}_{(2r-1)\Delta_f})z^{f}_{2r,j}. \tag{۱۰}$$

در ادامه لم اصلی را که جملهٔ $X^{f}_{r\Delta_c,i}$ را بر بازهٔ زمانی Δ_c نمایش می‌دهد، بیان و ثابت می‌کنیم.

لم ۴. معادلهٔ تفاضلی (۱۰) را می‌توان به‌صورت

$$X^{f}_{r\Delta_c,i}=X^{f}_{(r-1)\Delta_c,i}+a_i(X^{f}_{(r-1)\Delta_c})\Delta_c+\sum_{j=1}^{q}b_{ij}(X^{f}_{(r-1)\Delta_c})z^{c}_{r,j}+D^{f}_{r-1,i}+H^{f}_{r-1,i},\ \ i=1,\dots,n,$$

بیان کرد که در آن برای $p\ge 2$، ثابت K_p به‌گونه‌ای موجود است که

$$\max_{0\le r\le N}\mathbb{E}\left[\left\|D^{f}_{r-1}\right\|^{p}\right]\le K_p\Delta_f^{p},\quad \max_{0\le r\le N}\mathbb{E}\left[\left\|H^{f}_{r-1}\right\|^{p}\right]\le K_p\Delta_f^{\frac{3p}{2}}.$$

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$X^{f}_{(2r-1)\Delta_f,i}=X^{f}_{(r-1)\Delta_c,i}+a_i(X^{f}_{(r-1)\Delta_c})\frac{\Delta_c}{2}+\sum_{j=1}^{q}b_{ij}(X^{f}_{(r-1)\Delta_c})z^{f}_{2r-1,j}, \tag{۱۱}$$

با جای‌گذاری $X^{f}_{(2r-1)\Delta_f,i}$ در (۱۰) و استفاده از تساوی

$$z^{c}_{r,j}z^{c}_{r,k}=(z^{f}_{2r-1,j}+z^{f}_{2r,j})(z^{f}_{2r-1,k}+z^{f}_{2r,k}),$$

بعد از بازنویسی داریم:

$$X^{f}_{r\Delta_c,i}=X^{f}_{(r-1)\Delta_c,i}+a_i(X^{f}_{(r-1)\Delta_c})\Delta_c+\sum_{j=1}^{q}b_{ij}(X^{f}_{(r-1)\Delta_c})z^{c}_{r,j}+H^{1}_{r-1,i}+D^{1}_{r-1,i},$$

که در آن

$$H^{1}_{r-1,i}=\left(a_i(X^{f}_{(2r-1)\Delta_f})-a_i(X^{f}_{(r-1)\Delta_c})\right)\frac{\Delta_c}{2},$$

$$D^{1}_{r-1,i}=\sum_{j=1}^{q}\left(b_{ij}(X^{f}_{(2r-1)\Delta_f})-b_{ij}(X^{f}_{(r-1)\Delta_c})\right)z^{f}_{2r,j}.$$

با استفاده از بسط تیلور برای H^{1}_{r-1} به‌دست می‌آید:

$$a_i(X^{f}_{(2r-1)\Delta_f})-a_i(X^{f}_{(r-1)\Delta_c})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\xi_1)(X^{f}_{(2r-1)\Delta_f,j}-X^{f}_{(r-1)\Delta_c,j}),$$

که ξ_1 روی خط بین $X^{f}_{(2r-1)\Delta_f}$ و $X^{f}_{(r-1)\Delta_c}$ است. بنابراین

$$H^{1}_{r-1,i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\xi_1)(X^{f}_{(2r-1)\Delta_f,j}-X^{f}_{(r-1)\Delta_c,j})\frac{\Delta_c}{2}.$$

به‌طور مشابه بسط تیلور برای $D^{1}_{r-1,i}$، نتیجه می‌دهد:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

$$b_{ij}(X^f_{(2r-1)\Delta_f})-b_{ij}(X^f_{(r-1)\Delta_c})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\ _2)(X^f_{(2r-1)\Delta_f,k}-X^f_{(r-1)\Delta_c,k}),$$

که $_2$ روی خط بین $X^f_{(2r-1)\Delta_f}$ و $X^f_{(r-1)\Delta_c}$ است. در نتیجه $D^1_{r-1,i}$ برابر است با

$$D^1_{r-1,i}=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\ _2)(X^f_{(2r-1)\Delta_f,k}-X^f_{(r-1)\Delta_c,k})z^f_{2r,j}.$$

با جای‌گذاری به‌جای $X^f_{(2r-1)\Delta_f,j}-X^f_{(r-1)\Delta_c,j}$ از روش اویلر (۱۱) داریم:

$$D^1_{r-1,i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(\ _2)(a_i(X^f_{(r-1)\Delta_c})\frac{\Delta_c}{2}+\sum_{j=1}^{q}b_{ij}(X^f_{(r-1)\Delta_c})z^f_{2r-1,j})z^f_{2r,j}.$$

بنابراین $D^1_{r-1,i}$ به دو جملهٔ $H^2_{r-1,i}$ و $D^f_{r-1,i}$ تجزیه می‌شود که عبارتند از:

$$H^2_{r-1,i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(\ _2)a_i(X^f_{(r-1)\Delta_c})\frac{\Delta_c}{2}z^f_{2r,j},$$

$$D^f_{r-1,i}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(\ _2)b_{ij}(X^f_{(r-1)\Delta_c})z^f_{2r-1,j}z^f_{2r,j}.$$

قرار می‌دهیم. $H^f_{r-1}=H^1_{r-1}+H^2_{r-1}$ در ادامه آن‌چه باقی می‌ماند، یافتن کران برای $\mathbb{E}[\|D^f_{r-1}\|^p]$ و $\mathbb{E}[\|H^f_{r-1}\|^p]$ است. با استفاده از لم (۳) و کران‌داری یکنواخت مشتق a داریم:

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\ _1)(X^f_{(2r-1)\Delta_f,j}-X^f_{(r-1)\Delta_c,j})\frac{\Delta_c}{2}\right|^p\right]\le C^p\mathbb{E}\left[\left\|X^f_{(2r-1)\Delta_f}-X^f_{(r-1)\Delta_c}\right\|^p\right]\cdot\left(\frac{\Delta_c}{2}\right)^p$$
$$=\mathcal{O}(\Delta_f^{\frac{3p}{2}}).$$

با استناد به استقلال $z^f_{2r,j}$ از $X^f_{(r-1)\Delta_c}$ و کران‌داری یکنواخت مشتق b و لم (۲) داریم:

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(\ _2)a_i(X^f_{(r-1)\Delta_c})\frac{\Delta_c}{2}z^f_{2r,j}\right|^p\right]\le C^p\mathbb{E}\left[\left\|a_i(X^f_{(r-1)\Delta_c})\right\|^p\right]\mathbb{E}\left[\|z^f_{2r}\|^p\right]\cdot\left(\frac{\Delta_c}{2}\right)^p=\mathcal{O}(\Delta_f^{\frac{3p}{2}}),$$

که در نتیجه با استفاده از نامساوی (۸)، به‌دست می‌آید $\mathbb{E}[\|H^f_{r-1}\|^p]=\mathcal{O}(\Delta_f^{\frac{3p}{2}})$.

به‌روش مشابه و با استفاده از فرض (۶) داریم:

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(\ _2)b_{ij}(X^f_{(r-1)\Delta_c})z^f_{2r-1,j}z^f_{2r,j}\right|^p\right]\le C^p\mathbb{E}\left[\left\|b_{ij}(X^f_{(r-1)\Delta_c})\right\|^p\right]\mathbb{E}\left[\|z^f_{2r-1}\|^p\right]\mathbb{E}\left[\|z^f_{2r}\|^p\right]$$
$$=\mathcal{O}(\Delta_f^p),$$

و در پایان $\mathbb{E}[\|D^f_{r-1}\|^p]=\mathcal{O}(\Delta_f^p)$.

تا کنون مقدمات لازم برای به‌دست آوردن مرتبهٔ اول ($b=1$) برای واریانس مرحله‌ای ($\mathbb{V}(Y_l)$) یعنی برقراری شرط ۴ برای روش اویلر فراهم شده است، بنابراین قضیهٔ ۵ را داریم.

قضیهٔ ۵. برای هر $p\ge 2$، اگر $\mathbb{E}\left[\|z^f_r\|^g\right]=\mathcal{O}(\Delta_f^{\frac{g}{2}})$ و $g\ge 1$، در این صورت برای الگوریتم MLMC به‌همراه روش اویلر ضعیف داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\le r\le N}\left\|X^{f}_{r\Delta_c}-X^{c}_{r\Delta_c}\right\|^{p}\right]\le L_p\Delta_f^{\frac{p}{2}},$$

که در آن K_p یک ثابت مستقل از Δ است.

اثبات. قرار می‌دهیم $S_m=\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left\|X^{f}_{r\Delta_c}-X^{c}_{r\Delta_c}\right\|^{p}\right]$، از نامساوی (۸) نتیجه می‌شود:

$$S_m\le n^{p-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left|X^{f}_{r\Delta_c,i}-X^{c}_{r\Delta_c,i}\right|^{p}\right]. \qquad (*)$$

با کم کردن رابطهٔ (۹) از نتیجهٔ لم (۴) و مجموع‌گیری روی r گام زمانی اول به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}X^{f}_{r\Delta_c,i}-X^{c}_{r\Delta_c,i}&=\sum_{l=0}^{r-1}\left(a_i(X^{f}_{l\Delta_c,i})-a_i(X^{c}_{l\Delta_c,i})\right)\Delta_c\\&+\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{q}\left(b_{ij}(X^{f}_{l\Delta_c,i})-b_{ij}(X^{c}_{l\Delta_c,i})\right)z^{c}_{l,j}\\&+\sum_{l=0}^{r-1}D^{f}_{l,i}+\sum_{l=0}^{r-1}H^{f}_{l,i}.\end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی (۸) داریم:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left|X^{f}_{r\Delta_c,i}-X^{c}_{r\Delta_c,i}\right|^{p}\right]\le 4^{p-1}\Bigg(&\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left|\sum_{l=0}^{r-1}\left(a_i(X^{f}_{l\Delta_c,i})-a_i(X^{c}_{l\Delta_c,i})\right)\Delta_c\right|^{p}\right]\\&+\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left|\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{q}\left(b_{ij}(X^{f}_{l\Delta_c,i})-b_{ij}(X^{c}_{l\Delta_c,i})\right)z^{c}_{l,j}\right|^{p}\right]\\&+\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\sum_{l=0}^{r-1}\left|D^{f}_{l,i}\right|^{p}\right]+\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\sum_{l=0}^{r-1}\left|H^{f}_{l,i}\right|^{p}\right]\Bigg).\end{aligned}$$

(**)

ادامهٔ اثبات با یافتن کران برای هر یک از مقادیر مورد انتظار در (**) پیش می‌رود. با شروع از اخرین جمله که ساده‌ترین است، داریم:

$$\max_{r\le m}\left|\sum_{l=0}^{r-1}H^{f}_{l,i}\right|^{p}\le m^{p-1}\sum_{l=0}^{m-1}\left|H^{f}_{l,i}\right|^{p},$$

بنابراین با استفاده از کران محاسبه شده در لم (۴) و به‌ازای ثابت c_1 نتیجه می‌شود:

$$\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left|\sum_{l=0}^{r-1}H^{f}_{l,i}\right|^{p}\right]\le m^{p-1}\sum_{l=0}^{m-1}\mathbb{E}\left[\left|H^{f}_{l,i}\right|^{p}\right]\le c_1(m\Delta_f)^{p}\Delta_f^{\frac{p}{2}}.$$

به‌طریق مشابه برای جملهٔ اول ثابت c_2 وجود دارد به‌طوری‌که

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left|\sum_{l=0}^{r-1}\Big(a_i(X^f_{l\Delta_c,i})-a_i(X^c_{l\Delta_c,i})\Big)\Delta_c\right|^p\right] &\le r^{p-1}\sum_{l=0}^{r-1}\mathbb{E}\left[\left|a_i(X^f_{l\Delta_c,i})-a_i(X^c_{l\Delta_c,i})\right|^p\right]\Delta_c{}^p\\ &= r^{p-1}\sum_{l=0}^{r-1}\mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_i}(\ _1)(X^f_{l\Delta_c,i}-X^c_{l\Delta_c,i})\right|^p\right]\Delta_c{}^p\\ &\le r^{p-1}C^p\sum_{l=0}^{r-1}\mathbb{E}\left[\left\|X^f_{l\Delta_c}-X^c_{l\Delta_c}\right\|^p\right]\Delta_c{}^p\\ &\le c_2(m\Delta_c)^{p-1}\sum_{r=0}^{m-1}S_r\Delta_c.\end{aligned}$$

در مورد دو جملهٔ دیگر، با توجه به‌ویژگی مارتینگلی آنها، می‌توانیم از فرم گسستهٔ نامساوی بورخولدر-دیویس-گاندی[1] [۱۳] استفاده کنیم، که با استفاده از لم (۴) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left|\sum_{l=0}^{r-1}D^f_{l,i}\right|^p\right] &\le c_3\mathbb{E}\left[\left(\sum_{r=0}^{m-1}(D^f_{r,i})^2\right)^{\frac{p}{2}}\right]\\ &\le c_3 m^{\frac{p}{2}-1}\sum_{r=0}^{m-1}\mathbb{E}\left[\left|D^f_{r,i}\right|^p\right]\le c_4(m\Delta_f)^{\frac{p}{2}}\Delta_f^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}$$

به‌طور مشابه، برای جملهٔ دوم نتیجه به‌صورت

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left|\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{q}\Big(b_{ij}(X^f_{l\Delta_c,i})-b_{ij}(X^c_{l\Delta_c,i})\Big)z^{\ c}_{l,j}\right|^p\right]\le\\ &\qquad c_5 m^{\frac{p}{2}-1}q^{p-1}\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{q}\mathbb{E}\left[\left|\Big(b_{ij}(X^f_{r\Delta_c,i})-b_{ij}(X^c_{r\Delta_c,i})\Big)z^{\ c}_{r,j}\right|^p\right],\end{aligned}$$

حاصل می‌شود. از طرف دیگر، به‌دلیل مستقل بودن $z^{\ c}_{r,j}$ از $X^f_{r\Delta_c,i}$ و $X^c_{r\Delta_c,i}$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\Big(b_{ij}(X^f_{r\Delta_c,i})-b_{ij}(X^c_{r\Delta_c,i})\Big)z^{\ c}_{r,j}\right|^p\right] &= \mathbb{E}\left[\left|b_{ij}(X^f_{r\Delta_c,i})-b_{ij}(X^c_{r\Delta_c,i})\right|^p\right]\mathbb{E}\left[\left|z^{\ c}_{r,j}\right|^p\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i}(\ _2)(X^f_{r\Delta_c,i}-X^c_{r\Delta_c,i})\right|^p\right]\mathbb{E}\left[\left|z^{\ c}_{r,j}\right|^p\right]\\ &\le C^p\mathbb{E}\left[\left\|X^f_{r\Delta_c}-X^c_{r\Delta_c}\right\|^p\right]\mathbb{E}\left[\left\|z^{\ c}_{r}\right\|^p\right],\end{aligned}$$

که در آن از کران‌داری یکنواخت مشتق b استفاده کرده‌ایم. بنابراین با توجه به این‌که $\mathbb{E}\left[\left\|z^{\ c}_{r}\right\|^g\right]=\mathcal{O}(\Delta_f^{\frac{g}{2}})$، $g\ \ge 1$، به‌ازای ثابت c_6 داریم:

$$\mathbb{E}\left[\max_{r\le m}\left|\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{q}\Big(b_{ij}(X^f_{l\Delta_c,i})-b_{ij}(X^c_{l\Delta_c,i})\Big)z^{\ c}_{l,j}\right|^p\right]\le c_6(m\Delta_f)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{r=0}^{m-1}S_r\Delta_f.$$

در این مرحله تمام کران‌های به‌دست آمده برای جملات (**) را جمع‌بندی کرده و در (*) جای‌گذاری می‌کنیم. با در

1. Burkholder-Davis-Gundy

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

نظر داشتن این‌که $m\Delta \le T$، ثابت c_7 موجود است به‌طوری‌که

$$S_m \le n^p 4^{p-1}(c_1 T^p \Delta_f^{\frac{p}{2}} + c_2 T^{p-1}\sum_{r=0}^{m-1} S_r \Delta_c + c_4 T^{\frac{p}{2}} \Delta_f^{\frac{p}{2}} + c_6 T^{\frac{p}{2}-1}\sum_{r=0}^{m-1} S_r \Delta_f)$$
$$\le c_7(\Delta_f^{\frac{p}{2}} + \sum_{r=0}^{m-1} S_r \Delta_f).$$

اکنون استفاده از نامساوی گرانوال[1] در حالت گسسته [۳] ما را به نتیجهٔ مطلوب می‌رساند

$$S_m \le \Delta_f^{\frac{p}{2}} \exp(\sum_{r=0}^{m-1} \Delta_f) \le K_p \Delta_f^{\frac{p}{2}}.$$

توجه: برای تابع عایدی لیپشیتس f، قرار دادن $p=2$ در قضیهٔ ۵ نتیجه می‌دهد

$$\mathbb{V}[f(X_N^f) - f(X_N^c)] = \mathcal{O}(\Delta_f).$$

توجه: در توضیح اهمیت حالت $p>2$ می‌توان به الگوریتم MLMC متضاد که به‌وسیلهٔ جایلز [۸] معرفی شد اشاره کرد. در بررسی‌ها و شبیه‌سازی‌هایی که به‌وسیلهٔ این روش به‌همراه روش اویلر ضعیف انجام دادیم متوجه شدیم که واریانس با یک ضریب ثابت در مقایسه با MLMC ضعیف کاهش می‌یابد. اگر به اثبات قضیهٔ ۵,۲ این مقاله رجوع شود، مشاهده می‌شود که برای توابع عایدی ناپیوسته مانند اختیار خرید اروپایی به برقراری روابط برای p های بزرگ نیاز است.

نتایج عددی

در این بخش هزینهٔ محاسباتی برای $RMSE = \{5e-3, 1e-3, 5e-4, 2e-4, 1e-4\}$ و واریانس و همگرایی برای آخرین مقدار $RMSE$ گزارش شده‌اند. با انتخاب اولیهٔ $L=6$، الگوریتم MLMC به‌گونه‌ای طراحی شده که امکان افزایش L را در صورت نیاز به‌صورت خودکار داراست. چنان‌که پیش‌تر توضیح دادیم در تکمیل کار بلومسنی، الگوریتم را برای معادلات غیرخطی و مؤلفه‌های وابستهٔ X به‌کار بسته‌ایم.

فرایندهای انتشار

فرایند n بعدی (X_t) را در نظر بگیرید

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \quad t \in [0,T].$$

که W_t یک حرکت براونی q بعدی است. روش اویلر ضعیف برای حل این معادله عبارت است از:

$$X_0^\Delta = X_0, \quad \Delta = \frac{T}{N},$$

$$X_{j\Delta}^\Delta = X_{(j-1)\Delta}^\Delta + a(X_{(j-1)\Delta}^\Delta)\Delta + \sum_{k=1}^{q} b_k(X_{(j-1)\Delta}^\Delta)z_{j,k}, \quad j=1,\dots,N,$$

که در آن متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $z_{j,k}$ در رابطهٔ

$$\left|\mathbb{E}[z_{j,k}]\right| + \left|\mathbb{E}[z_{j,k}]^3\right| + \left|\mathbb{E}[z_{j,k}]^2 - \Delta\right| = \mathcal{O}(\Delta^2), \quad k=1,\dots,q$$

صدق می‌کنند. ساده ترین راه برای تولید چنین متغیرهای تصادفی از توزیع دو نقطه‌ای (برنولی) زیر است [۱۱]

$$\mathbb{P}(z_{j,k} = \pm\sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2}, \quad k=1,\dots,q.$$

مشاهده می‌شود که توزیع متغیرهای تصادفی $z_{j,k}^l$ در مرحلهٔ lم الگوریتم MLMC با توزیع دو جمله‌ای[2] به‌صورت

1. Grönwall
2. Binomial

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

$$\frac{z_{j,k}^{l}}{2\sqrt{\Delta_L}}+2^{L-l-1}\sim \mathrm{Bin}\left(2^{L-l},\frac{1}{2}\right),$$

در ارتباط است [۳] که در آن Bin توزیع دوجمله‌ای است. برای تسریع در تولید متغیرهای تصادفی می‌توان از روش‌های جستجو در جدول[1] استفاده کرد [۳].

مثال ۶. فرض کنید

$$dX_1(t)=rX_1(t)dt+s_{1,1}\sin(X_1(t))dW_1(t)+s_{1,2}(X_1(t)+X_2(t))dW_2(t),$$
$$dX_2(t)=rX_2(t)dt+s_{2,1}X_2(t)dW_1(t)+s_{2,2}\cos(X_2(t))dW_2(t),$$

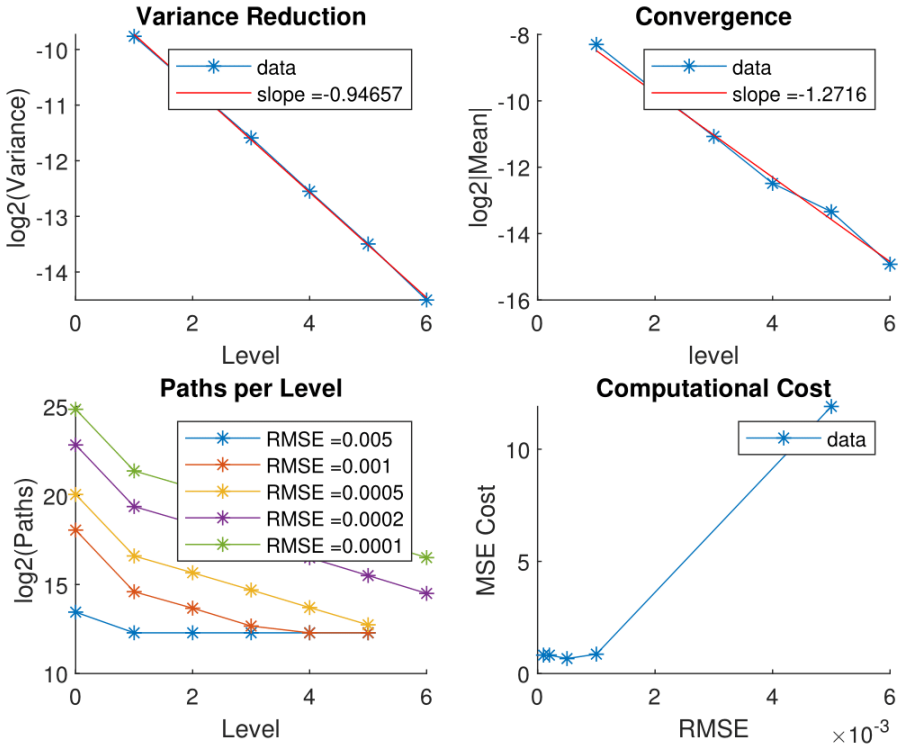
که در آن حرکت‌های براونی مستقل و توابع تلاطم[2] وابسته به x_1, x_2 و غیرخطی انتخاب شده‌اند و مؤلفه‌های $X_1(t)$ و $X_2(t)$ وابسته هستند. در این مقاله علاقه‌مند به تابع عایدی اختیار خرید سبدی[3] اروپایی در حالت دوبعدی به‌صورت

$$f\left(X_1(T),X_2(T)\right)=e^{-rT}\max\left(X_1(T)+X_2(T)-K,0\right),$$

هستیم. با انتخاب پارامترها به‌صورت

$$r=0.05,\quad T=1,\quad K=2,\quad X_{0,1}=1,\quad X_{0,2}=1,$$
$$s_{1,1}=0.05,\quad s_{1,2}=0.1,\quad s_{2,1}=0.15,\quad s_{2,2}=0.2.$$

الگوریتم MLMC را به‌گونه‌ای به‌کار می‌گیریم که با تغییر $RMSE$، تعداد مراحل به‌صورت خودکار انتخاب می‌شود.



شکل ۱. اختیار خرید سبدی اروپایی

در شکل ۱ برای تابع عایدی اختیار خرید سبدی اروپایی نتایج بر طبق انتظار ظاهر شده است. مرتبهٔ $a=1$ (شیب خط برآورد شده) برای همگرایی ضعیف و $b=1$ برای واریانس مرحله به مرحله به‌ترتیب در نمودار بالا سمت راست و بالا سمت چپ قابل مشاهده است. هم‌چنین بر اساس قضیهٔ پیچیدگی محاسباتی به‌ازای $b=1$ مرتبهٔ

1. Table lookup
2. Volatility
3. Basket option

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

$\mathcal{O}(\epsilon^{-2}(\log\epsilon)^2)$ برای هزینهٔ محاسباتی $C = N_0 + \sum_{l=1}^{L} N_l(2^l + 2^{l-1})$ پیش‌بینی می‌شود که در نمودار پایین سمت راست ترسیم شده است. بنابراین انتظار می‌رود که $C^2\epsilon^2$ وابستگی اندکی متناسب با $(\log\epsilon)^2$ به ϵ^2 داشته باشد [۹]. در نمودار پایین سمت چپ نیز تعداد مسیرهای بهینه N_l مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد مراحل کاهش می‌یابند.

فرایندهای انتشار-پرش

فرایند انتشار-پرش (X_t) را در نظر بگیرید

$$dX_t = r(X_{t-})dt + s(X_{t-})dW_t + r(X_{t-})dJ_t,$$

که در آن $X_{t-} = \lim_{s\to t-} X_s$ و

$$J_t = \sum_{i=1}^{N_t}(Y_i - 1),$$

و N_t یک فرایند شمارشی[1] است. اگر متغیرهای تصادفی Y_i مستقل و هم‌توزیع و N_t یک فرایند پواسون باشد، J_t به فرایند پواسون مرکب تبدیل می‌شود. برای شبیه‌سازی فرایندهای پرش به این صورت عمل می‌شود که زمان‌های پرش N_t شبیه‌سازی شده و به نقاط گسسته‌سازی زمان افزوده می‌شوند. با استفاده از آن‌چه در [۳] آمده است، تعداد پرش‌ها در مرحلهٔ lم و گام زمانی iم از

$$\eta_{l,i} \sim \mathrm{Bin}(2^{L-l}, 2^{-L}\lambda_l),$$

تولید می‌شود که λ_l شدت فرایند پواسون است.

مثال ۷. (فرایند انتشار-پرش از نوع مرتون). معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید

$$dX_1(t) = (r - \lambda_1(e^{m_1+0.5\sigma_1^2} - 1))X_1(t)dt + s_{1,1}\sin(X_1(t))dW_1(t) + s_{1,2}(X_1(t) + X_2(t))dW_2(t) + X_1(t)dJ_1(t),$$

$$dX_2(t) = (r - \lambda_2(e^{m_2+0.5\sigma_2^2} - 1))X_2(t)dt + s_{2,1}X_2(t)dW_1(t) + s_{2,2}\cos(X_2(t))dW_2(t) + X_2(t)dJ_2(t),$$

که در آن

$$J_k(t) = \sum_{j=1}^{N^k(t)}(Y_j^k - 1), \quad \log(Y_j^k) \sim N(m_k, \sigma_k^2), \quad k = 1, 2.$$

و Y_j^k به‌صورت دقیق شبیه‌سازی می‌شوند. با انتخاب پارامترها به‌صورت

$$r = 0.05, \quad T = 1, \quad K = 2,$$
$$X_{0,1} = 1, \quad \lambda_1 = 0.5, \quad m_1 = 0.05, \quad \sigma_1 = 0.25,$$
$$X_{0,2} = 1, \quad \lambda_2 = 0.6, \quad m_2 = 0.06, \quad \sigma_2 = 0.35,$$
$$s_{1,1} = 0.05, \quad s_{1,2} = 0.1, \quad s_{2,1} = 0.15, \quad s_{2,2} = 0.2,$$

و شبیه‌سازی ضعیف دو فرایند پواسون مرکب مستقل و دو حرکت براونی مستقل که از یک‌دیگر نیز مستقل هستند، نتیجهٔ اجرای الگوریتم MLMC در ذیل آورده شده است.

نتایج در حالت انتشار-پرش نیز گواه بر صحت نظریه است. در نمودارها، همگرایی و واریانس مرتبهٔ اول و هزینهٔ محاسباتی با مرتبهٔ کم‌تر از ۲ به‌صورت $\mathcal{O}(\epsilon^{-2}(\log\epsilon)^2)$ مشهود است و بر طبق انتظار تعداد مسیرهای بهینه کاهش

1. Counting process

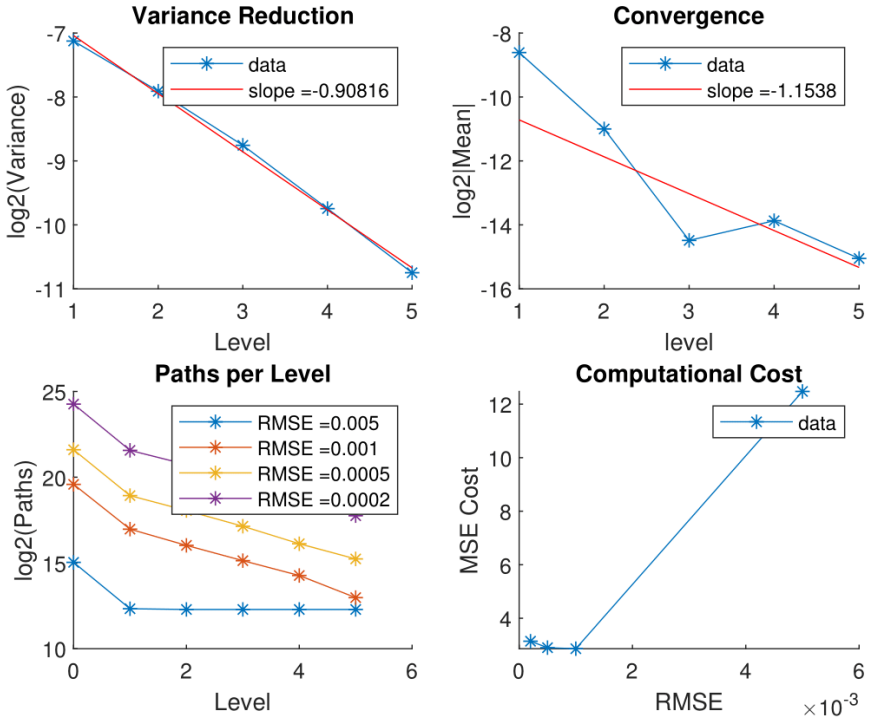
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

یافته است.

مثال ۸. (مدل هستون[1] پرشی). بیتس[2] در سال ۱۹۹۶ [۲]، مدل هستون را به‌همراه پرش از نوع مرتون بدین‌صورت معرفی کرد:

$$dX(t) = (r - l\,(e^{m+0.5q^2} - 1))X(t)dt + \sqrt{v(t)}X(t)dW_1(t) + X(t)dJ(t), \qquad X(0) = X_0,$$
$$dv(t) = k\,(w - v(t))dt + x\sqrt{v(t)}dW_2(t), \qquad v(0) = v_0,$$

که در آن J فرایند پرش همانند قبل، W_1 و W_2 دو حرکت براونی با ضریب همبستگی[3] r هستند. اگرچه این معادله در شرط لیپشیتس صدق نمی‌کند، اما نتیجهٔ اجرای الگوریتم راضی‌کننده است.



شکل ۲. اختیار خرید سبدی اروپایی با مدل مرتون

در این مثال نوفه‌ها و همین‌طور X و v وابسته هستند و ما از تبدیل لامبرتی[4] برای تبدیل معادله به معادله‌ای با ضرایب خطی و نا منفی نگه داشتن v استفاده کردیم. با انتخاب پارامترها به صورت

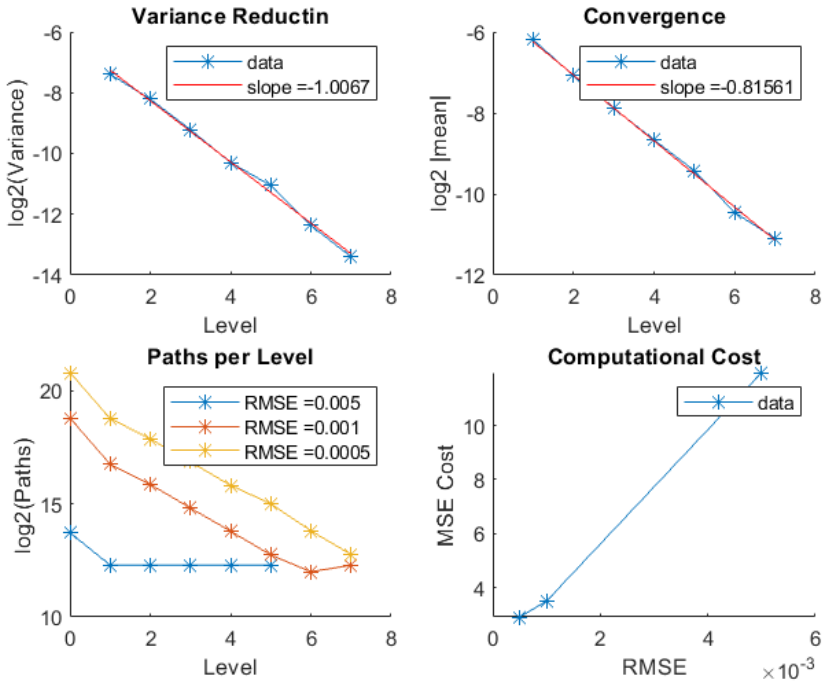
$$X_0 = 1, \quad T = 1, \quad K = 1, \quad r = 0.05, \quad l = 1, \quad m = 0.05, \quad q = 0.25,$$
$$v_0 = 0.04, \quad r = -0.5, \quad k = 5, \quad w = 0.04, \quad x = 0.25,$$

و تابع عایدی $f(X(T)) = e^{-rT}\max(X(T) - K, 0)$ نمودارها به‌صورت زیر هستند.

در شکل ۳ مرتبهٔ همگرایی کم‌تر از ۱ است ولی مرتبهٔ واریانس کاملاً مطلوب است. این مثال حاکی از آن است که الگوریتم برای نوفه‌های وابسته نیز به‌خوبی عمل می‌کند و فقط اندکی بی‌نظمی در تعداد مسیرهای بهینه در مراحل پایانی مشاهده می‌شود.

1. Heston
2. Bates
3. Correlation
4. Lamperti

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]



شکل ۳. اختیار خرید اروپایی با مدل هستون

نتیجه‌گیری

در این مقاله، با به‌کارگیری روش اویلر ضعیف به‌همراه الگوریتم MLMC به ارزش‌گذاری اختیار معاملات در فضای چندبعدی پرداختیم. مشاهده شد که برای روش اویلر، همگرایی ضعیف و کاهش واریانس از مرتبهٔ اول بوده و هزینهٔ محاسباتی در مقایسه با روش مونت-کارلو کاهش می‌یابد. همگرایی‌ها را در فضای $L^p(\Omega)$ با $p \geq 2$ و نه فقط ۲ ثابت کردیم. مثال‌های عددی نتیجهٔ اجرای الگوریتم را برای اختیار خرید با معادلات غیرخطی و مؤلفه‌های وابستهٔ X نشان می‌دهند.

منابع

1. Averina T. A., Artemev S. S., "A new family of numerical methods for solving stochastic differential equations", Soviet. Math. Dokl.,33(3) (1986) 736-738.
2. Bates David S., "Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche mark options", The Review of Financial Studies, 9(1) (1996) 69-107.
3. Belomestny Denis, Nagapetyan, Tigran. "Multilevel path simulation for weak approximation schemes with application to Lévy-driven SDEs", Bernoulli, 23(2) (2017) 927-950.
4. Bruti-Liberati Nicola, Platen Eckhard., "On weak predictor-corrector schemes for jump-diffusion processes in finance", Quantitative Finance Resaerch Center (2006).
5. Burrage Kevin, Burrage P. M., "High strong order explicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations", Applied Numerical Mathematics, 22 (1) (1996) 81-102.
6. Costabile Massimo, Leccadito Arturo, Massabó Ivar, Russo Emilio, "Option pricing under regime-switching jump-diffusion models", Journal of Computational and Applied Mathematics, 256 (2014) 152-167.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]

7. Drummond I. T., Hoch A., Horgan R. R., "Numerical integration of stochastic differential equations with variable diffusivity", Journal of Physics A: Mathematical and General, 19 (18) (1986) 3871-3881.
8. Giles Michael B., Lukasz Szpruch, "Antithetic multilevel Monte-Carlo estimation for multi-dimensional SDEs without Lévy area simulation", The Annals of Applied Probability, 24 (4) (2014) 1585-1620.
9. Giles Michael B., "Multilevel Monte-Carlo path simulation", Operations Research, 56 (3) (2008) 607-617.
10. Giles Michael B., Higham Desmond J., Mao Xuerong, "Analysing multi-level Monte Carlo for options with non-globally Lipschitz payoff", Finance and Stochastics, 13 (3) (2009) 403-413.
11. Kloeden Peter E., Platen Eckhard, "Numerical solution of stochastic differential equations", volume 23 of Applications of Mathematics (New York) Springer-Verlag, Corrected Third Printing (1999).
12. Kloeden Peter E., Platen Eckhard, Hofmann N., "Extrapolation methods for the weak approximation of Itô diffusions", SIAM journal on numerical analysis, 32 (5) (1995) 1519-1534.
13. Kunita Hiroshi, "Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations", Vol. 24, Cambridge university press (1997).
14. Marxen Henning, "The multilevel Monte-Carlo method used on a Lévy driven SDE", Monte-Carlo Methods and Applications, 16 (2) (2010) 167-190.
15. Milstein Grigorii N., "Numerical integration of stochastic differential equations", Volume 313 of Springer Science & Business Media (1994).
16. Mikulevičius Remigijus, Platen Eckhard, "Time discrete Taylor approximations for Itô processes with jump component", Mathematische Nachrichten, 138 (1) (1988) 93-104.
17. Ninomiya Syoiti, Victoir Nicolas, "Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing", Applied Mathematical Finance, 15 (2) (2008) 107-121.
18. Platen Eckhard, Bruti-Liberati Nicola, "Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance", volume 64 of Springer (2010).
19. Platen Eckhard, Rebolledo Rolando, "Weak convergence of semimartingales and discretisation methods. Stochastic Processes and their Applications", 20 (1) (1985) 41-58.
20. Protter Philip, Talay Denis, "The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations", The Annals of Probability, 25 (1) (1997) 393-423.
21. Siopacha Maria, Teichmann Josef, "Weak and strong Taylor methods for numerical solutions of stochastic differential equations", Quantitative Finance, 11 (4) (2011) 517-528.
22. Xia Yuan, Giles Michael B., "Multilevel path simulation for jump-diffusion SDEs", Monte-Carlo, and Quasi Monte-Carlo Methods 2010, Springer, Berlin, Heidelberg (2012) 695-708.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-28]

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.353]