



# A numerical method for solving a class of distributed order time-fractional diffusion with respect to Caputo-Prabhakar fractional derivative

Alireza Ansari<sup>1</sup>  , Mohammad Hossein Derakhshan<sup>2</sup> 

1. Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

✉E-mail: [alireza\\_1038@yahoo.com](mailto:alireza_1038@yahoo.com)

2. Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

E-mail: [m.h.derakhshan.20@gmail.com](mailto:m.h.derakhshan.20@gmail.com)

---

---

## Article Info

## ABSTRACT

---

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:

9 November 2019

Received in revised form:

30 January 2021

Accepted:

2 May 2021

Published online:

20 June 2023

### Keywords:

Distributed order time-fractional diffusion equation, Caputo-Prabhakar fractional derivative, Spline function, Finite difference.

### Introduction

The study of the distributed order fractional differential equations and their applications in the various fields of engineering and sciences have been considered during the past decade in the literature. In this paper, we treat a new extension of the both Riemann-Liouville and the Caputo senses as the single and distributed order Caputo-Prabhakar fractional derivative.

The main purpose of this paper is to present a numerical method for solving a class of distributed order time-fractional diffusion equation with respect to the Caputo-Prabhakar fractional derivative. In this respect, we use a numerical method based on the B-spline interpolation along with the finite difference method to analyze the following class of distributed order time-fractional diffusion equation

$$\int_0^1 \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x, t) d\mu = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t),$$

where  $C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma}$  and  $\omega(\mu)$  are the Caputo-Prabhakar fractional derivative and the weight function, respectively.

For this purpose, we first consider the Caputo-Prabhakar fractional derivative as a linear combination of the B-spline functions, and then we approximate the second-order derivative in the above equation using the finite difference method. By substituting the associated approximations into the distributed order time-fractional diffusion equation, the numerical solution is obtained. We also state the convergence analysis and the error analysis for the proposed method in the sense of the Caputo-Prabhakar fractional derivative. Finally, we give three numerical examples for the performance and accuracy of the numerical method.

---

### Material and methods

For *discretization* of the distributed order time-fractional diffusion with respect to the Caputo-Prabhakar fractional derivative, we apply the following methods:

1. To approximate the Caputo-Prabhakar fractional derivative, we use the linear B-spline interpolation,
2. The composite midpoint quadrature rule is applied to approximate the distributed order fractional operator,
3. We approximate the first order derivative and second-order derivative by using finite difference method.

### Results and discussion

In this paper, numerical results of some test problems are illustrated to demonstrate the computational efficiency, stability and accuracy of the presented method. From reported numerical results in the tables and figures, we observe that the approximate solutions have a good accuracy. According to the achieved results, the established method is very effective and accurate in all cases.

### Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The integral term containing the distributed order Caputo-Prabhakar fractional derivative was discretized by implementation of the mid-point quadrature rule. Moreover, the distributed order Caputo-Prabhakar fractional derivative was approximated by using linear B-spline interpolation.
- The proposed explicit spline method and the finite difference algorithm are convergent and unconditionally stable.
- The experimental results are in accordance with the theoretical results and show that this proposed method is reliable for solving the fractional diffusion equations.

---

**How to cite:** Ansari, A.R., Derakhshan, M.H. (2023). A numerical method for solving a class of distributed order time-fractional diffusion with respect to Caputo-Prabhakar fractional derivative. *Mathematical Researches*, 9 (1), 30-54.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---



Kharazmi University

## یک روش عددی برای حل یک کلاس از معادلات دیفرانسیل جزئی پخش زمان - کسری از مرتبه توزیعی برحسب مشتق کسری کپوتو-پربهاکار

علیرضا انصاری<sup>۱</sup>، محمدحسین درخشان<sup>۲</sup>۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران. رایانامه: [alireza\\_1038@yahoo.com](mailto:alireza_1038@yahoo.com)۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران. رایانامه: [m.h.derakhshan.20@gmail.com](mailto:m.h.derakhshan.20@gmail.com)

## چکیده

## اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

در این مقاله یک روش عددی مبتنی بر درونیایی خطی بی‌اسپلین به همراه یک روش تفاضل متناهی برای حل عددی یک کلاس از معادلات دیفرانسیل جزئی پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی به شکل زیر

$$\int_0^1 \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x, t) d\mu = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t),$$

استفاده می‌کنیم، که در آن  $C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma}$  و  $\omega(\mu)$  به ترتیب مشتق کسری کپوتو-پربهاکار و تابع وزن مرتبه کسری هستند. برای این منظور، ما ابتدا مشتق کسری کپوتو-پربهاکار را به صورت ترکیب خطی از توابع بی‌اسپلین در نظر می‌گیریم و سپس با استفاده از روش تفاضل متناهی، مشتق مرتبه دوم در معادله را تقریب می‌زنیم. با جایگذاری این دو تقریب در معادله پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی، جواب عددی را به دست می‌آوریم. همچنین آنالیز همگرایی برای روش پیشنهادی و آنالیز خطا برای مشتق کسری کپوتو-پربهاکار را بیان می‌کنیم و در پایان سه مثال برای دقت و کارایی روش عددی پیشنهادی را ارائه می‌کنیم.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۱۸

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۱۲

تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

## واژه‌های کلیدی:

معادله دیفرانسیل پخش

زمان-کسری،

مرتبه توزیعی، کپوتو-پربهاکار،

تابع اسپلین،

تفاضل متناهی.

استناد: انصاری، علیرضا؛ درخشان، محمدحسین؛ (۱۴۰۲). یک روش عددی برای حل یک کلاس از معادلات دیفرانسیل جزئی پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی برحسب مشتق کسری کپوتو-پربهاکار. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۱)، ۵۴-۳۰.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱- مقدمه

حسابگان مرتبه کسری نام یک نظریه در مورد انتگرال‌ها و مشتق‌های از مرتبه دلخواه است که مفاهیم مشتق‌گیری از مرتبه صحیح و انتگرال‌گیری چندگانه را تعمیم می‌دهد. به عبارت دیگر حسابگان مرتبه کسری شاخه‌ای از ریاضیات است که مشتق‌ها و انتگرال‌ها در آن از مرتبه کسری هستند و این موضوع در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از دانشمندان علوم پایه و مهندسی قرار گرفته است. معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری در بسیاری از مسائل علوم پایه و علوم مهندسی از جمله فیزیک، شیمی، مکانیک، الکترونیک و غیره کاربردهای فراوانی دارد [۱، ۲]. بسیاری از پدیده‌ها در رشته‌های مختلف توسط معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری به طور دقیق قابل مدل‌بندی هستند [۳، ۵]. از جمله می‌توان به پدیده‌هایی در مسائل کنترل، مدل‌های آماری، مسائل اقتصادی، الکترومغناطیس، الکتروشیمی، کیهان‌شناسی، صوت‌شناسی، انتقال گرما، خطوط مخابرات و علوم مواد اشاره کرد. اتخاذ محاسبات کسری در مدل‌سازی ریاضی در طول دهه‌های گذشته توسعه یافته و منجر به پژوهش‌های قابل توجه‌ای در مسایل علمی مختلف شده است [۶، ۷]. به تازگی با توجه به پتانسیل این گونه معادلات برای توصیف پدیده‌های فیزیکی و ریاضی، مدل‌هایی مبتنی بر معادلات دیفرانسیل کسری مرتبه توزیعی و مرتبه متغیر به یک علاقمندی پژوهشی در حال رشد تبدیل شده است [۸، ۹]. معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی در تمامی زمینه‌های فیزیکی و ریاضی برای مدل‌سازی کاربرد دارد. به عنوان مثال، مدلی از رفتار تنش در محیط ناکشسان [۱۰]، مدل‌هایی از پوسته‌های کروی و پیچشی [۱۱]، مدل‌های دی‌الکتریک و معادلات پخش [۱۲]، مدلی از روابط ورودی-خروجی برای یک سیستم خطی متغیر با زمان [۱۳] و مدل حرارتی [۱۴] را می‌توان برشمرد. در پژوهش‌های انجام شده توسط دانشمندان، چندین تعریف متفاوت از انتگرال کسری و مشتق بیان می‌شود که برخی از آنها مانند انتگرال ریمان-لیوویل<sup>۱</sup>، مشتق کیوتو<sup>۲</sup> و مشتق ریمان-لیوویل کاملاً مورد مطالعه قرار گرفته و در مدل‌های کاربردی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۵]. در این مقاله به معرفی تعمیم جدیدی از مشتقات کسری از نوع ریمان-لیوویل و کیوتو پرداخته می‌شود که برحسب جملات تابع پربهاکار<sup>۳</sup> بیان می‌شود که برای اولین بار توسط پربهاکار معرفی شد [۱۶]. این تابع در حالت‌های خاص توابع میتگ-لفلر<sup>۴</sup> تک پارامتری و دو پارامتری را نتیجه می‌دهد [۱۷].

در این مقاله برای اولین بار است که یک نوع معادله دیفرانسیل کسری معرفی شده از مرتبه توزیعی شامل مشتق کسری پربهاکار مطالعه می‌شود. به دلیل کاربرد گسترده این دسته از معادلات در علوم کاربردی و به طور کلی نبودن یک جواب دقیق تحلیلی، رویکرد عددی برای این نوع از معادلات اهمیت ویژه‌ای دارد. نویسندگان حوزه معادلات دیفرانسیل کسری بیشتر در مطالعه خود از مشتقات کسری ریمان-لیوویل و کیوتو برای حل سیستم‌های کسری مرتبه توزیعی با استفاده از روش‌های عددی استفاده کرده‌اند [۲۱، ۱۸]. برای مثال، در [۲۲] از یک روش عددی مبتنی بر روش متناهی فشرده برای حل معادلات پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی روی دامنه کراندار استفاده می‌شود. در [۲۳] یک معادله پخش زمان-

<sup>1</sup> Riemann-Liouville

<sup>2</sup> Caputo

<sup>3</sup> Prabhakar

<sup>4</sup> Mittag-Leffler

کسری از مرتبه توزیعی بیان می‌شود و با استفاده از روش تفاضل ضمنی به بررسی جواب‌های تقریبی آن پرداخته می‌شود. در [۲۴] از روش تفاضل صریح برای حل معادله پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی استفاده می‌شود. در [۲۵] یک روش عددی صریح برای به دست آوردن جواب‌های تقریبی از معادلات پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی با واحد غیرخطی به کار برده می‌شود. در [۲۶] از یک روش عددی جدید مبتنی بر روش چندجمله‌ای‌های چپیشف<sup>۵</sup> برای حل معادله پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی ارائه می‌شود. در [۲۷] به وجود و یکتایی جواب‌ها برای معادله پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی پرداخته می‌شود. در [۲۸]، یک روش عددی مبتنی بر روش موجک-چپیشف برای حل معادلات کسری یک و دو بعدی از مرتبه توزیعی مطالعه می‌شود. در [۲۹] به حل سیستم‌های کسری مرتبه توزیعی شامل معادلات پخش روی فضای دوبعدی و سیستم‌های غیرخطی اشاره می‌شود.

در این مقاله، ما بر روی معادلات دیفرانسیل پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی شامل مشتق کسری پربهاکار متمرکز می‌شویم که این مشتق کسری از ساختار مشتق کسری ریمان-لیوویل تبعیت می‌کند با این تفاوت که به جای هسته این مشتق کسری از تابع میتگ-لفلر سه پارامتری که به عنوان تابع پربهاکار شناخته می‌شود، استفاده می‌شود [۳۱،۳۰]. از کاربردهای مهم تابع پربهاکار می‌توان به توصیف پدیده‌های آرام‌سازی در دی الکتریک تصادفی از نوع هاواریلیک-نگامی<sup>۶</sup> [۳۳،۳۲]، مدلی از سیستم‌های ناهمگن و اختلال یافته در پدیده‌های خطی و غیرخطی [۳۴]، نظریه احتمال [۳۵] و ویسکوالاستیسیته کسری [۳۶] اشاره کرد. هدف اصلی در این مقاله استفاده از یک روش گسسته‌سازی مبتنی بر درونیایی خطی بی‌اسپلاین و روش تفاضل متناهی برای به دست آوردن جواب‌های تقریبی یک معادله پخش زمان-کسری مرتبه توزیعی شامل مشتق کسری پربهاکار  $C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}} \gamma$  از مرتبه  $0 < \mu \leq 1$  به صورت زیر است:

$$\int_0^1 \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}} \gamma u(x, t) d\mu = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in \Omega = (0, L) \times (0, T] \subseteq \mathbb{R}^2,$$

تحت شرایط مرزی و اولیه زیر است:

$$\begin{cases} u(x, 0) = g(x) & x \in (0, L), \\ u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(L, t) = \varphi_L(t), & t \in (0, T], \end{cases}$$

که در آن  $\omega(\mu) > 0$  تابع وزن مرتبه کسری و  $\int_0^1 \omega(\mu) d\mu = \beta > 0$  است. با توجه به کاربرد گسترده این کلاس از معادلات در علوم کاربردی مانند بیولوژیک، مکانیک سیالات، پلاسما و شیمی و به دلیل کمبود یک راه حل دقیق تحلیلی، رویکرد عددی برای حل این مساله بسیار مهم است. بنابراین انگیزه اصلی این مقاله به دست آوردن جواب‌های تقریبی معادله معرفی شده در رابطه (۱) است. در این جهت این مقاله به صورت زیر سازماندهی می‌شود. در بخش دوم تعاریف و لم‌هایی که در

<sup>5</sup> Chebyshev

<sup>6</sup> Havriliak–Negami

بخش‌های بعدی استفاده می‌شود، ارائه می‌کنیم. در بخش سوم روش عددی پیشنهادی برای حل معادله (۱) بیان می‌شود. در بخش چهارم با ارایه سه مثال به بررسی دقت و کارایی روش پیشنهادی می‌پردازیم.

## ۲- تعاریف و مقدمات اولیه

**تعریف ۱:** فرض کنیم  $\alpha$  یک عددی حقیقی باشد و  $f \in L^1(0, b)$  به طوری که  $0 < t < b < +\infty$ . در این صورت انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

$${}_0^+ I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(u) (t-u)^{\alpha-1} du = (f * K_\alpha)(t), \quad t > 0, 0 \leq \alpha < 1, \quad (2)$$

که  $K_\alpha = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ . همچنین مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$  به شکل زیر بیان می‌شود:

$${}_0^+ D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t f(u) (t-u)^{-\alpha} du, \quad t > 0, 0 \leq \alpha < 1. \quad (3)$$

به‌علاوه برای تابع به طور مطلق پیوسته  $f$ ، مشتق کسری کپوتو از مرتبه  $\alpha$  به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۵]:

$${}_0^+ D_t^\alpha f(t) = {}_0^+ I_t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{-\alpha} \frac{d}{du} f(u) du. \quad (4)$$

**تعریف ۲:** فرض کنیم  $f * K_\alpha \in W^{1,1}[0, b]$  که  $W^{1,1}[0, b]$  فضای سوبولوف است و به صورت

$$W^{1,1}[0, b] = \left\{ f \in L^1[0, b] : \frac{d}{dt} f \in L^1[0, b] \right\},$$

تعریف شده است. در این صورت انتگرال کسری پربهاکار به صورت زیر برای  $\rho, \mu, \omega, \gamma \in \mathbb{R}$  (به طوری که  $\mu > 0, \rho > 0$ ) تعریف می‌شود [۱۵]:

$$(E_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^\gamma f)(t) = \int_0^t (t-u)^{\mu-1} E_{\rho, \mu}^\gamma(\omega(t-u)^\rho) f(u) du = \left( f * e_{\rho, \mu, \omega}^\gamma \right)(t), \quad (5)$$

که در آن  $E_{\rho, \mu}^\gamma(\omega t^\rho) = e_{\rho, \mu, \omega}^\gamma = t^{\mu-1} E_{\rho, \mu}^\gamma(\omega t^\rho)$  تابع پربهاکار است که در سال ۱۹۷۱ توسط پربهاکار به صورت زیر معرفی شده است [۱۵]:

$$E_{\rho, \mu}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+n)}{n! \Gamma(\rho n + \mu)} z^n. \quad (6)$$

**تعریف ۳:** فرض کنیم شرایط تعریف ۲ برای تابع  $f$  برقرار باشد و  $(\cdot) \in W^{1,1}[0, b]$  و  $f * e^{-\gamma}_{\rho, 1-\mu, \omega}(\cdot)$  در این صورت مشتق کسری پربهاکار به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

$$({}_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}} \gamma f)(t) = \frac{d}{dt} E_{\rho, 1-\mu, \omega, 0^+}^{-\gamma} f(t), t > 0, \quad (7)$$

که  $\rho, \mu, \omega, \gamma \in \mathbb{R}$  و  $\mu > 0, \rho > 0$ . همچنین مشتق کسری کپوتو-پربهاکار به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$({}_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{C}} \mathbb{D} \gamma f)(t) = E_{\rho, 1-\mu, \omega, 0^+}^{-\gamma} \frac{d}{dt} f(t), t > 0. \quad (8)$$

**تعریف ۴:** عملگر دیفرانسیل کسری مرتبه توزیعی  ${}_{\rho, \omega(\mu), \omega, 0^+}^{\mathbb{C}} \mathbb{D} \gamma$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{\rho, \omega(\mu), \omega, 0^+}^{\mathbb{C}} \mathbb{D} \gamma u(x, t) = \int_0^1 \omega(\mu) {}_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{C}} \mathbb{D} \gamma u(x, t) d\mu, \quad (9)$$

که  $\omega(\mu)$  تابع وزن است.

**لم ۱:** فرض کنیم  $\rho, \mu, \omega, \gamma \in \mathbb{R}$  و  $\mu > 0, \rho > 0$ . در این صورت داریم [۳۷]:

$$\int_0^t u^{\mu-1} E_{\rho, \mu}^{\gamma}(\omega u^{\rho}) du = t^{\mu} E_{\rho, \mu+1}^{\gamma}(\omega t^{\rho}). \quad (10)$$

### ۳- گسسته‌سازی عملگر کسری مرتبه توزیعی

در این بخش یک روش گسسته‌سازی برای معادله پخش زمان-کسری مرتبه توزیعی داده شده در رابطه (۱)، معرفی می‌شود. برای استفاده از روش گسسته‌سازی، گام‌های زمان و مکان به ترتیب با نمادهای  $\Delta x$  و  $\Delta t$  نشان داده شده است و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_m &= m \Delta x, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M \in \mathbb{N}, \\ \Delta x &= \frac{L}{M}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \\ t_n &= n \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن  $\Delta x, \Delta t \in \mathbb{R}^+$ . برای استفاده از روش گسسته‌سازی در ابتدا با استفاده از تعریف ۳، مشتق کسری کپوتو-پربهاکار در نقطه  $t_n$  محاسبه می‌شود، که برای این نمایش داریم:

$${}_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{C}} \mathbb{D} \gamma u(x, t) = \int_0^{t_n} (t_n - \zeta)^{-\mu} E_{\rho, 1-\mu}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^{\rho}) \frac{\partial u}{\partial t}(x, \zeta) d\zeta. \quad (12)$$

سپس با استفاده از درونیایی خطی بی‌اسپلین که با نماد  $s_n(x, t)$  نشان داده می‌شود، مشتق مرتبه اول  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  در

رابطه (۱۲) به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \approx s_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( -\frac{t-t_{k+1}}{t_k-t_{k+1}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_k) + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_{k+1}) \right). \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۲) معادله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_n} (t_n - \zeta)^{-\mu} E_{\rho, 1-\mu}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) s_n(x, \zeta) d\zeta = \\ & \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} ((t_n - \zeta)^{-\mu} E_{\rho, 1-\mu}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) \frac{\zeta - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} d\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_k) \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} ((t_n - \zeta)^{-\mu} E_{\rho, 1-\mu}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) \frac{\zeta - t_k}{t_{k+1} - t_k} d\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_{k+1}). \end{aligned} \quad (14)$$

اکنون می‌توان با توجه به معادله (۱۴) قضیه زیر را بیان نمود.

**قضیه ۱:** فرض کنیم  $u(x, t)$  یک تابع در  $C^3(\Omega)$  (مجموعه‌ای از توابع که مشتقات اول، دوم و سوم پیوسته دارند) است. در این صورت داریم:

$$C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}\gamma} u(x, t_n) \approx (\Delta t)^{1-\mu} \left[ \sum_{k=0}^n a_{k,n}^{(\mu)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_k) \right], \quad (15)$$

که در آن ضرایب مورد نظر به شکل زیر قابل محاسبه هستند:

$$a_{k,n}^{(\mu)} = \begin{cases} (n-1)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma}(\omega((n-1)\Delta t)^\rho) + n^{1-\mu} (E_{\rho, 2-\mu}^{-\gamma}(\omega(n\Delta t)^\rho) - n E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma}(\omega(n\Delta t)^\rho)), & k=0, \\ (n-k+1)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma}(\omega((n-k+1)\Delta t)^\rho) - 2(n-k)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma}(\omega((n-k)\Delta t)^\rho) \\ + (n-k-1)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma}(\omega((n-k-1)\Delta t)^\rho), & 1 \leq k \leq n-1, \\ E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma}(\omega(\Delta t)^\rho), & k=n. \end{cases} \quad (16)$$



**برهان:** برای اثبات کافی است ابتدا از معادله (۱۴) استفاده کنیم، سپس با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و رابطه (۱۰) به راحتی به نتیجه مورد نظر می‌رسیم.

لم ۲: فرض کنیم  $(\rho > 0, 0 < \mu < 1)$ ,  $\rho, \mu, \omega, \gamma \in \mathbb{R}$ . در این صورت ضرایب  $a_{k,n}^{(\mu)}$  که در معادله (۱۶) داده شده است، در ویژگی‌های زیر صدق می‌کنند:

۱. ضرایب  $a_{k,n}^{(\mu)}$  برای  $k = 0, 1, \dots, n-1$  مثبت هستند.

۲. سری  $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,n}^{(\mu)}$  همگرا و مثبت است.

**برهان:** در ابتدا برای  $1 \leq k \leq n-1$  ضرایب  $a_{k,n}^{(\mu)}$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} a_{k,n}^{(\mu)} &= (n-k+1)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega((n-k+1)\Delta t)^\rho) - 2(n-k)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega((n-k)\Delta t)^\rho) \\ &\quad + (n-k-1)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega((n-k-1)\Delta t)^\rho) \\ &= (n-k+1)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega((n-k+1)\Delta t)^\rho) - (n-k)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega((n-k)\Delta t)^\rho) \\ &\quad - ((n-k)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega((n-k)\Delta t)^\rho) - (n-k-1)^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega((n-k-1)\Delta t)^\rho)). \end{aligned}$$

حال قضیه مقدار میانگین را برای تابع پیوسته  $g(x) = x^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega x^\rho)$  به کار می‌بریم. توجه می‌کنیم که با استفاده

از رابطه  $\frac{d}{dx} (x^{2-\mu} E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega x^\rho)) = x^{1-\mu} E_{\rho, 2-\mu}^{-\gamma} (\omega x^\rho)$  و در نظر گرفتن نقاط  $\delta_1 \in (n-k, n-k+1)$  و  $\delta_2 \in (n-k-1, n-k)$  خواهیم داشت [۳۷]:

$$a_{k,n}^{(\mu)} = \delta_1^{1-\mu} E_{\rho, 2-\mu}^{-\gamma} (\omega \delta_1^\rho) - \delta_2^{1-\mu} E_{\rho, 2-\mu}^{-\gamma} (\omega \delta_2^\rho),$$

که نشان می‌دهد ضرایب  $a_{k,n}^{(\mu)}$  برای  $0 < \mu < 1$  و  $\delta_1 > \delta_2$  مثبت هستند و داریم:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,n}^{(\mu)} = n^{1-\mu} E_{\rho, 2-\mu}^{-\gamma} (\omega n^\rho) - E_{\rho, 3-\mu}^{-\gamma} (\omega n^\rho).$$

بنابراین برهان کامل می‌شود.

**قضیه ۲:** فرض کنیم  $u(x, t)$  یک تابع در  $C^3(\Omega)$  و  $t_n = n\Delta t \in (0, T]$  در این صورت ثابت مثبتی مانند  $\beta_\mu$  وجود دارد به طوری که رابطه (۱۵) در نامساوی زیر صدق می کند:

$$\left| C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}\gamma} u(x, t_n) - (\Delta t)^{1-\mu} \left[ \sum_{k=0}^n a_{k,n}^{(\mu)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_k) \right] \right| \leq \kappa \beta_\mu (\Delta t)^{1-\mu}, \quad (17)$$

که در آن  $\alpha = \left| E_{\rho, 1-\mu}^{-\gamma}(\omega(t_n)^\rho) \right|$ ,  $\beta_\mu = n^{2-\mu}$ ,  $\kappa > 0$ ,  $\kappa > 0$  و  $\max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, \eta_k) \right| \leq \kappa$  و  $\eta_k$  یک مقدار دلخواه در بازه  $(0, T]$  است.

**برهان:** با استفاده از درونیایی خطی بی اسپلین  $s_k(x, t)$ ، مشتق مرتبه اول  $\frac{\partial u_k}{\partial t}(x, t)$  در بازه  $(t_k, t_{k+1})$  به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}(x, t) = s_k(x, t) + \frac{(t_k - t_{k+1})(t - t_{k+1})}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial t^3}(x, \eta_k). \quad (18)$$

بنابراین با استفاده از رابطه های (۱۲) و (۱۸) داریم:

$$C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}\gamma} u(x, t_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} ((t_n - \zeta)^{-\mu} E_{\rho, 1-\mu}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) (s_k(x, \zeta) + \frac{(\zeta - t_k)(\zeta - t_{k+1})}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial \zeta^3}(x, \eta_k)) d\zeta \quad (19)$$

$$= (\Delta t)^{1-\mu} \left[ \sum_{k=0}^n a_{k,n}^{(\mu)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_k) \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} ((t_n - \zeta)^{-\mu} E_{\rho, 1-\mu}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) \left( \frac{(\zeta - t_k)(\zeta - t_{k+1})}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial \zeta^3}(x, \eta_k) \right) d\zeta,$$

که  $\eta_k \in (t_k, t_{k+1})$  می توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} & \left| C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}\gamma} u(x, t_n) - (\Delta t)^{1-\mu} \left[ \sum_{k=0}^n a_{k,n}^{(\mu)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_k) \right] \right| \\ & \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - \zeta)^{-\mu} E_{\rho, 1-\mu}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) \left( \frac{(\zeta - t_k)(\zeta - t_{k+1})}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial \zeta^3}(x, \eta_k) \right) d\zeta \right| \quad (20) \\ & \leq n \times t_n^{1-\mu} \times (\Delta t)^2 \times \alpha \times \kappa = n \times t_n^{1-\mu} \times (n\Delta t)^{1-\mu} \times (\Delta t)^2 \times \alpha \times \kappa = \alpha \kappa \beta_\mu (\Delta t)^{3-\mu}, \end{aligned}$$

که در آن  $\alpha = \left| E_{\rho, 1-\mu}^{-\gamma} (\omega(t_n)^\rho) \right|$ ،  $\beta_\mu = n^{2-\mu}$ ،  $\kappa$ ،  $\max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, \eta_k) \right| \leq \kappa$ . بنابراین اثبات این قضیه کامل می‌شود.

**قضیه ۳:** فرض کنیم  $u(x, t)$  یک تابع در  $C^3(\Omega)$  است. در این صورت عملگر کسری مرتبه توزیعی داده شده در معادله (۹)، دارای تقریب عددی زیر است:

$$\int_0^1 \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x, t) d\mu = \sum_{k=0}^n b_{k,n} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_k) + O(h^2 + (\Delta t)^{2+\frac{h}{2}}), \quad (21)$$

که

$$b_{k,n} = \int_0^1 \omega(\mu) (\Delta t)^{1-\mu} a_{k,n}(\mu) d\mu \approx h \sum_{i=1}^l \omega(v_i) (\Delta t)^{1-v_i} a_{k,n}(v_i), \quad (22)$$

و  $h = \frac{1}{l}$  اندازه گامها در بازه  $[0, 1]$ ،  $v_i = \frac{\mu_{i-1} + \mu_i}{2}$ ،  $\mu_i = ih, i = 1, 2, 3, \dots, l \in \mathbb{N}$  است.

**برهان:** ابتدا بازه  $[0, 1]$  را به  $l$  زیربازه یکسان  $[\mu_{i-1}, \mu_i], i = 1, 2, 3, \dots, l \in \mathbb{N}$  با دامنه  $h = \frac{1}{l}$  تقسیم می‌کنیم. سپس در این بازه نقطه میانی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$v_i = \frac{\mu_{i-1} + \mu_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, l \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

با استفاده از انتگرال گیری نقطه میانی، خواهیم داشت:

$$\left| \int_0^1 \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x_m, t) d\mu - h \sum_{i=1}^l \omega(v_i) C_{\rho, v_i, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x_m, t) \right| \leq \sum_{i=1}^l \frac{h^3}{4!} |\Lambda''(\alpha_i)|, \quad \alpha_i \in (v_{i-1}, v_i),$$

$$\leq \sum_{i=1}^l \frac{h^3}{4!} \max_{1 \leq i \leq l} |\Lambda''(\alpha_i)| = \frac{h^3}{4!} |\Lambda''(\alpha)|, \quad \alpha \in (0, 1),$$

که در آن  $\Lambda(\alpha) = \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x_m, t)$  و  $\Lambda''(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq l} |\Lambda''(\alpha_i)|$ . در نتیجه با استفاده از تعریف مشتق کسری کپوتو-پرهباکار نابرابری بالا به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x_m, t) d\mu \\
&= h \sum_{i=1}^1 \omega(v_i) C_{\rho, v_i, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x_m, t) + O(h^2) \\
&= h \sum_{i=1}^1 \omega(v_i) \int_0^{t_n} (t_n - \zeta)^{-v_i} E_{\rho, 1-v_i}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) \frac{\partial u}{\partial \zeta}(x_m, \zeta) d\zeta + O(h^2) \\
&= h \sum_{i=1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} \omega(v_i) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - \zeta)^{-v_i} E_{\rho, 1-v_i}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) \frac{\partial u_k}{\partial \zeta}(x_m, \zeta) d\zeta + O(h^2).
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

با به کار بردن معادله (۱۸) ، رابطه (۲۴) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x_m, t) d\mu \\
&= h \sum_{i=1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} \omega(v_i) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - \zeta)^{-v_i} E_{\rho, 1-v_i}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) (s_k(x_m, \zeta) \\
&+ \frac{(\zeta - t_k)(\zeta - t_{k+1})}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial \zeta^3}(x_m, \eta_k)) d\zeta + O(h^2) \\
&= \sum_{k=0}^n b_{k,n} \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_k) + h \sum_{i=1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} \omega(v_i) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - \zeta)^{-v_i} E_{\rho, 1-v_i}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) \left( \frac{(\zeta - t_k)(\zeta - t_{k+1})}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial \zeta^3}(x_m, \eta_k) \right) \\
&+ O(h^2),
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

که در آن  $\eta_k \in (t_k, t_{k+1})$  با ساده سازی معادله (۲۵) داریم:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}^\gamma} u(x_m, t) d\mu - \sum_{k=0}^n b_{k,n} \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_k) \\
&= h \sum_{i=1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} \omega(v_i) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - \zeta)^{-v_i} E_{\rho, 1-v_i}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) \left( \frac{(\zeta - t_k)(\zeta - t_{k+1})}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial \zeta^3}(x_m, \eta_k) \right) + O(h^2).
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

اکنون با فرض این که  $u(x_m, t) \in C^2[(0, 1)]$  و  $\omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0}^{\mathbb{D}^\gamma}$  در نهایت از رابطه (۲۶) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & h \sum_{i=1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} \omega(v_i) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - \zeta)^{-v_i} E_{\rho, 1-v_i}^{-\gamma}(\omega(t_n - \zeta)^\rho) \left( \frac{(\zeta - t_k)(\zeta - t_{k+1})}{2} \frac{\partial^3 u_k}{\partial \zeta^3}(x_m, \eta_k) \right) + O(h^2) \\ & = O(h^2 + (\Delta t)^{3-v_1}) = O(h^2 + (\Delta t)^{2+\frac{h}{2}}), \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن  $v_1 = 1 - \frac{h}{2}$ . بنابراین برهان کامل می‌شود.

برای به دست آوردن جواب‌های تقریبی معادله (۱) تحت شرایط مرزی و اولیه داده شده، مشتقات مرتبه اول و دوم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) = \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n))}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2),$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_{n-1}))}{2(\Delta t)} + O(\Delta t^2). \quad (28)$$

چون تابع  $u(x_m, t_n)$  به صورت

$$u(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_{n+1}) + u(x_m, t_{n-1}))}{2} + O(\Delta t^2),$$

تقریب زده می‌شود، بنابراین با قراردادن تابع  $u(x_m, t_n)$  در  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n)$ ، مشتق مرتبه دوم  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n)$  به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) &= \frac{u(x_{m+1}, t_n) - u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_{n-1}) + u(x_{m-1}, t_n)}{(\Delta x)^2} \\ &+ O(\Delta x^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2). \end{aligned} \quad (29)$$

پس با جایگذاری رابطه‌های (۲۱)، (۲۸) و (۲۹) در معادله (۱) به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=0}^n b_{k,n} \frac{u_m^{k+1} - u_m^{k-1}}{2(\Delta t)} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^{n+1} - u_m^{n-1} + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} + f(x_m, t_n) \quad (30)$$

$$+ O(h^2 + \Delta x^2 + \Delta t^2 + (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2), \quad n=1, \dots, N-1, \quad m=1, \dots, M-1.$$

با نادیده گرفتن جمله  $O(h^2 + \Delta x^2 + \Delta t^2 + (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2)$  در عبارت بالا نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$u_m^{n+1} = \frac{2\lambda}{b_{n,n} + 2\lambda} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{b_{n,n} - 2\lambda}{b_{n,n} + 2\lambda} u_m^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{k,n}}{b_{n,n} + 2\lambda} (u_{m+1}^{k-1} - u_m^{k+1}) \quad (31)$$

$$+ \frac{2\Delta t}{b_{n,n} + 2\lambda} f(x_m, t_n), \quad n=1, \dots, N-1, \quad m=1, \dots, M-1,$$

که  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  بنا براین با در نظر گرفتن رابطه (۳۱) و شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر:

$$u_0^n = \varphi_0(t_n), \quad u_M^n = \varphi_L(t_n), \quad n=0, 1, \dots, N,$$

$$u_m^0 = g(x_m), \quad m=0, 1, \dots, M,$$

جواب‌های تقریبی رابطه (۱) قابل نمایش خواهند بود. بررسی همگرایی روش عددی پیشنهادی برگرفته از یک فرآیند مشابه در مرجع [۲۴] است. فرض کنیم که برای  $n=0, 1, 2, \dots, N$  و  $m=0, 1, 2, \dots, M$ ،  $u_m^n$  به ترتیب، جواب تقریبی از معادله (۳۱) با استفاده از روش عددی و جواب دقیق معادله (۱) باشند. در این صورت مقدار خطا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_m^n = U_m^n - u_m^n.$$

فرض کنیم که  $E^n = [\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \dots, \varepsilon_M^n]^T$  و  $\|E^n\|_\infty = \max_{0 \leq m \leq M} |\varepsilon_m^n|$  در این صورت داریم:

$$\Lambda(h, \Delta t) \|E^{r+1}\|_\infty = \Lambda(h, \Delta t) \left| \varepsilon_p^{r+1} \right| + \frac{2|\varepsilon_p^r| - 2|\varepsilon_p^r|}{(\Delta x)^2}$$

$$\leq \Lambda(h, \Delta t) \left| \varepsilon_p^{r+1} \right| + \frac{|\varepsilon_{p+1}^r| + |\varepsilon_{p-1}^r| - |\varepsilon_p^{r-1}| - |\varepsilon_p^{r+1}|}{(\Delta x)^2}$$

$$\leq \left| \Lambda(h, \Delta t) \varepsilon_p^{r+1} + \frac{\varepsilon_{p+1}^r - \varepsilon_p^{r+1} - \varepsilon_p^{r-1} + \varepsilon_p^r}{(\Delta x)^2} \right|,$$

که در آن  $\Lambda(h, \Delta t) = h \sum_{i=1}^1 \sum_{k=0}^{r-1} \omega(v_i)(\Delta t)^{1-v_i} a_{k,n}^{(v_i)} > 0$  و  $p \in \{1, 2, \dots, M\}, r = n - 1$  اکنون با استفاده از معادلات (۳۰) و (۳۱)، نابرابری زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Lambda(h, \Delta t) \|E^{r+1}\|_{\infty} &\leq \left| \Lambda(h, \Delta t) \varepsilon_p^{r+1} + \sum_{k=0}^r b_{k,n} \frac{\varepsilon_p^{k+1} - \varepsilon_p^{k-1}}{2 \Delta t} \right| \\ &= \left| \Lambda(h, \Delta t) \varepsilon_p^{r-1} + \sum_{k=0}^{r-1} b_{k,n} \frac{\varepsilon_p^{k+1} - \varepsilon_p^{k-1}}{2 \Delta t} \right|. \end{aligned}$$

با به‌کاربردن نابرابری مثلثی برای عبارت بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Lambda(h, \Delta t) \|E^{r+1}\|_{\infty} &\leq \Lambda(h, \Delta t) \left| \varepsilon_p^{r-1} + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{b_{k,n}}{\Delta t} \left( \frac{|\varepsilon_p^{k+1}| + |\varepsilon_p^{k-1}|}{2} \right) \right| \\ &\leq \Lambda(h, \Delta t) \|E^{r-1}\|_{\infty} + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{b_{k,n}}{\Delta t} \|E^k\|_{\infty}. \end{aligned} \tag{۳۲}$$

با توجه به مقادیر  $\Lambda(h, \Delta t) > 0$  و  $C = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$ ، از معادله (۳۲) می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} \|E^{r+1}\|_{\infty} &\leq \|E^{r-1}\|_{\infty} + \frac{1}{\Lambda(h, \Delta t)} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{b_{k,n}}{\Delta t} \|E^k\|_{\infty} \\ &\leq \left( \kappa_1 + \frac{\kappa_2}{\Lambda(h, \Delta t)} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{b_{k,n}}{\Delta t} \right) \|E^0\|_{\infty} \\ &\leq (\kappa_1 + \kappa_2) \|E^0\|_{\infty} \leq 2C \|E^0\|_{\infty}, \end{aligned}$$

لذا برای هر خطای اولیه دلخواه  $E^0$  یک عدد مثبت مستقل از  $h$ ،  $\Delta x$  و  $\Delta t$  وجود دارد به طوری که

$$\|E^{r+1}\|_{\infty} \leq C \|E^0\|_{\infty}.$$

بنابراین روش پیشنهادی همگرا است.

## ۴- نتایج عددی

در این بخش به بررسی سه مثال برای نشان دادن و کارایی روش پیشنهادی در این مقاله می‌پردازیم. برای ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\|E\|_{\infty} = \max_{1 \leq n \leq N-1, 1 \leq m \leq M-1} |u(x_m, t_n) - u_m^n|,$$

$$p(\cdot) = \log \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{\|\varepsilon_1\|_{\infty}}{\|\varepsilon_2\|_{\infty}},$$

که در آن  $\|\varepsilon_i\|_{\infty}$  ماکزیمم خطا برای طول گام  $\tau_i$  ( $i=1,2$ ) است.

**مثال ۱:** مسئله پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\int_0^1 \Gamma(3-\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}} u(x, t) d\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t))$$

$$+ \frac{t^{\mu} E_{\rho, 1+\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})}{\Gamma(3-\mu)} + x(2-x), \quad (33)$$

با شرایط مرزی و اولیه زیر

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & x \in (0, 2), \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, & t \in (0, 1]. \end{cases} \quad (34)$$

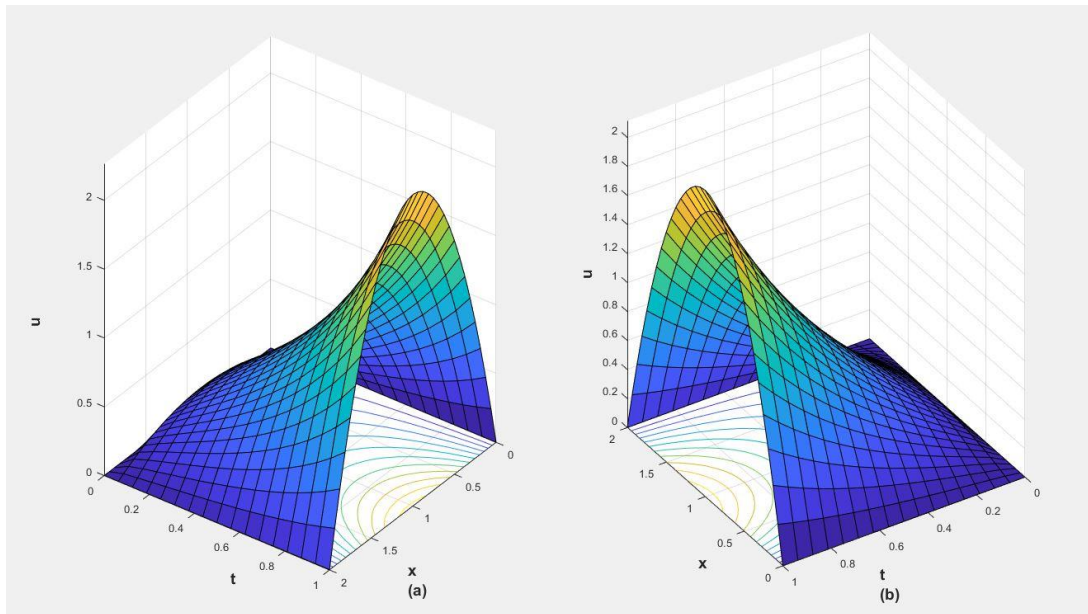
تحت شرایط بیان شده در رابطه (۳۴) جواب دقیق این معادله دیفرانسیل به صورت زیر داده می‌شود:

$$u(x, t) = \frac{x(2-x) t^{\mu} E_{\rho, 1+\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})}{\Gamma(3-\mu)}. \quad (35)$$

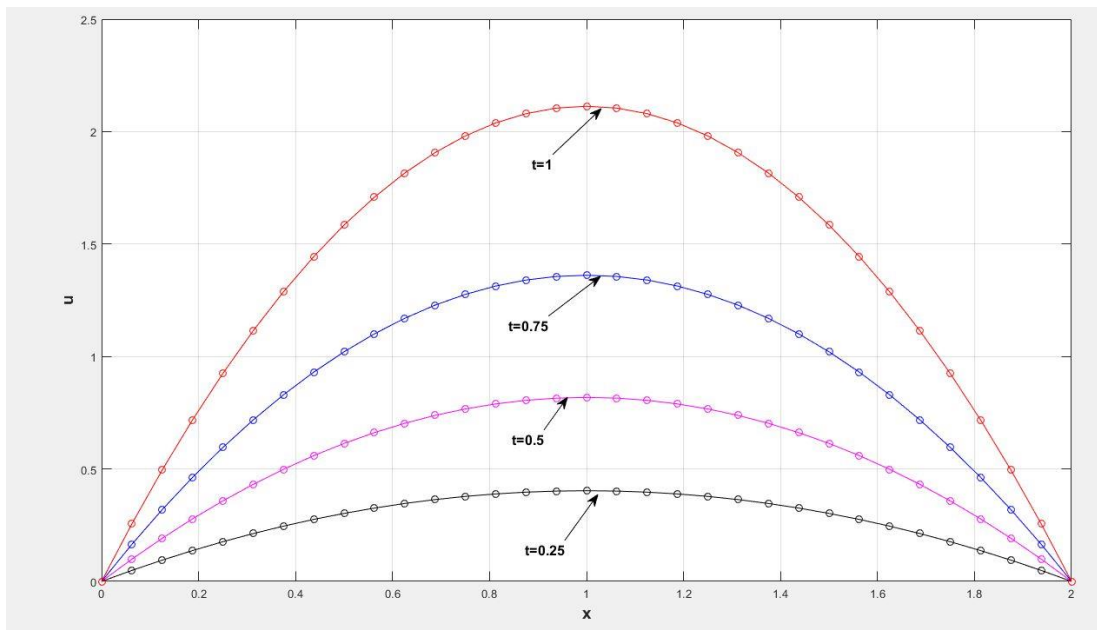
این مثال را با استفاده از روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف  $\Delta x$  و  $\Delta t$  حل می‌کنیم. در این مثال فرض می‌شود  $\Delta x = h$  و جواب‌های تقریبی این مثال با قرار دادن  $\Delta t = (\Delta x)^3$  و  $\Delta t = (\Delta x)^2$  تقریب زده می‌شوند و نتایج عددی این جواب‌ها برای مقادیر مختلفی از پارامترهای  $\rho$ ،  $\omega$  و  $\gamma$  در شکل ۱ نشان داده می‌شوند. تصویری از جواب‌های تقریبی و دقیق برای مقادیر مختلفی از  $t$  و  $\mu = 0.5$  در شکل ۲ نمایش داده می‌شود. در جدول (۱) ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی با استفاده از روش پیشنهادی گزارش شده است. از جدول ۱ واضح است که برای  $\Delta t = (\Delta x)^2$  و  $\Delta t = (\Delta x)^3$  داریم

$$p_x = p_h = 3p_t \quad \text{و} \quad p_x = p_h = 2p_t$$





شکل ۱: جواب‌های تقریبی مثال ۱ با اندازه گام‌های مختلف  $h = 0.0625$  و  $\Delta t = (\Delta x)^2$ . (a): تصویری از جواب‌های تقریبی برای  $\rho = 0.5, \omega = 1, \gamma = 0.75, \mu = 0.5$ . (b): تصویری از جواب‌های تقریبی برای  $\rho = 0.75, \omega = 1, \gamma = 0.95, \mu = 0.5$ .



شکل ۲: جواب‌های تقریبی مثال ۱ با اندازه گام‌های مختلف  $h = 0.0625$  و  $\Delta t = (\Delta x)^2$  برای مقادیر مختلفی از  $t = \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ .

جدول ۱: ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی با استفاده از روش پیشنهادی برای مثال ۱

$\Delta x = h$	$\rho = 0.5, \omega = 1, \mu = 0.5, \gamma = 0.75$		$\rho = 0.75, \omega = 1, \mu = 0.5, \gamma = 0.95$			
	$\ E_{\Delta t=(\Delta x)^2}\ _{\infty}$	$p_t$	$\ E_{\Delta t=(\Delta x)^2}\ _{\infty}$	$p_t$	$\ E_{\Delta t=(\Delta x)^3}\ _{\infty}$	$p_t$
0.5	$8.43 \times 10^{-3}$	-	$3.45 \times 10^{-3}$	-	$7.55 \times 10^{-4}$	-
0.25	$3.23 \times 10^{-3}$	0.69	$6.47 \times 10^{-4}$	1.20	$4.40 \times 10^{-4}$	0.25
0.125	$9.09 \times 10^{-4}$	0.91	$2.30 \times 10^{-4}$	0.74	$2.97 \times 10^{-5}$	1.29
0.0625	$3.31 \times 10^{-4}$	0.72	$4.20 \times 10^{-5}$	1.22	$3.37 \times 10^{-6}$	1.04

مثال ۲: معادله پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\int_0^1 C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\gamma} u(x, t) d\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t)) + x(x-1) - 2t^{\mu} E_{\rho, 1+\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho}), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1], \quad (36)$$

تحت شرایط مرزی و اولیه:

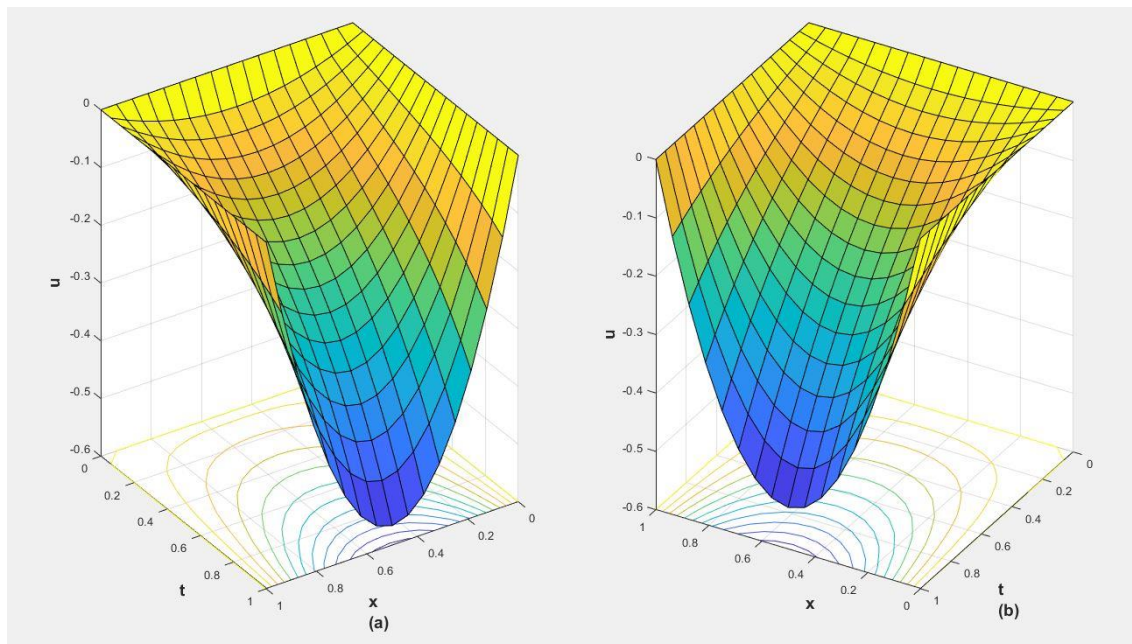
$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, 1]. \end{cases} \quad (37)$$

با توجه به شرایط اولیه و مرزی، برای این مثال جواب دقیق به صورت زیر داده شده است:

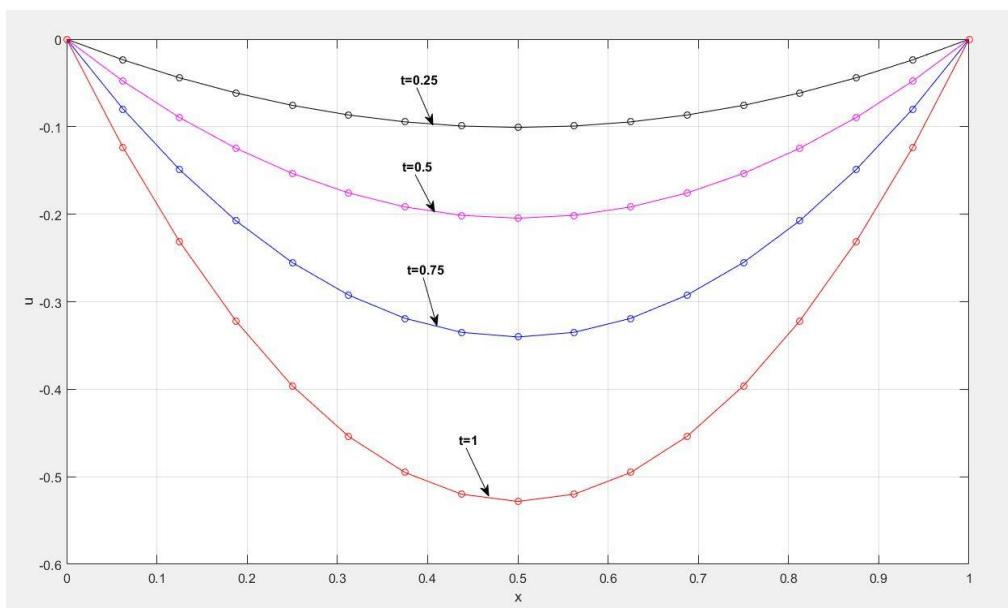
$$u(x, t) = x(x-1) t^{\mu} E_{\rho, 1+\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho}). \quad (38)$$

با استفاده از روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف  $\Delta x$  و  $\Delta t$  این مثال را حل می‌کنیم. در این مثال فرض می‌شود  $\Delta x = h$ ، نشان داده می‌شود. تصویری از جواب‌های تقریبی و دقیق برای مقادیر مختلفی از  $t$  و  $\mu = 0.5$  در شکل ۴ نمایش داده می‌شود. همچنین در جدول ۲، ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی با استفاده از روش پیشنهادی گزارش شده است. از

$$جدول ۲ واضح است که برای  $\Delta t = (\Delta x)^2$  و  $\Delta t = (\Delta x)^3$  داریم  $p_x = p_h = 2p_t$  و  $p_x = p_h = 3p_t$ .$$



شکل ۳: جواب‌های تقریبی مثال ۲ با اندازه گام‌های مختلف  $h = 0.0625$  و  $\Delta t = (\Delta x)^2$ . (a): تصویری از جواب‌های تقریبی برای  $\rho = 0.5, \omega = 1, \gamma = 0.75, \mu = 0.5$ . (b): تصویری از جواب‌های تقریبی برای  $\rho = 0.75, \omega = 1, \gamma = 0.95, \mu = 0.5$ .



شکل ۴: جواب‌های تقریبی مثال ۱ با اندازه گام‌های مختلف  $h = 0.0625$  و  $\Delta t = (\Delta x)^2$  برای مقادیر مختلفی از  $t = \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ .

جدول ۲: ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی با استفاده از روش پیشنهادی برای مثال ۲

$\Delta x = h$	$\rho = 0.5, \omega = 1, \mu = 0.5, \gamma = 0.75$		$\rho = 0.75, \omega = 1, \mu = 0.5, \gamma = 0.95$			
	$\ E_{\Delta t=(\Delta x)^2}\ _{\infty}$	$P_t$	$\ E_{\Delta t=(\Delta x)^2}\ _{\infty}$	$P_t$	$\ E_{\Delta t=(\Delta x)^3}\ _{\infty}$	$P_t$
0.5	$9.53 \times 10^{-4}$	-	$4.55 \times 10^{-4}$	-	$8.65 \times 10^{-5}$	-
0.25	$4.33 \times 10^{-4}$	0.56	$7.57 \times 10^{-5}$	1.29	$5.50 \times 10^{-6}$	1.32
0.125	$11.09 \times 10^{-5}$	0.98	$3.40 \times 10^{-5}$	0.57	$4.07 \times 10^{-6}$	0.14
0.0625	$4.41 \times 10^{-5}$	0.66	$5.30 \times 10^{-6}$	1.34	$3.37 \times 10^{-6}$	0.09

مثال ۳. معادله کسری مرتبه توزیعی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\int_0^1 \omega(\mu) C_{\rho, \mu, \omega, 0^+}^{\mathbb{D}} u(x, t) d\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t)) + f(x, t),$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \pi),$$

و شرایط مرزی

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in (0, 0.5],$$

که در آن  $\omega(\mu) = \Gamma(\kappa - \mu + 1)$  و

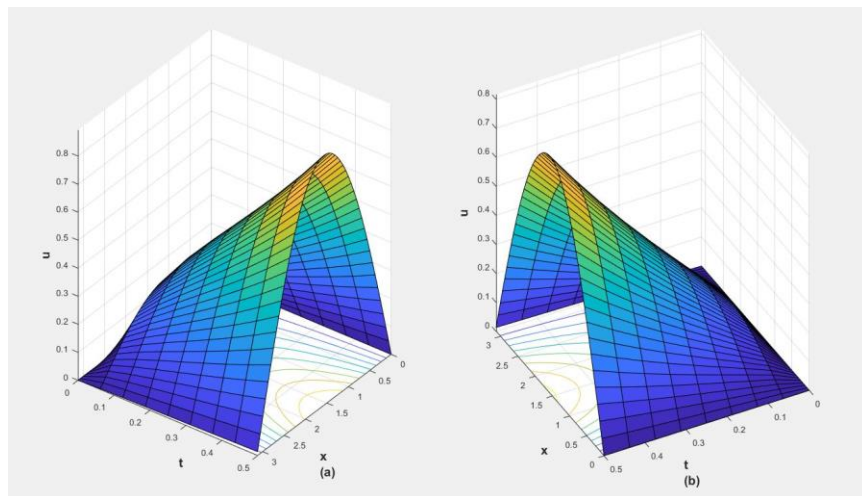
$$f(x, t) = \sin(x) + \frac{\sin(x) t^{\mu} E_{\rho, 1+\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})}{\Gamma(\kappa - \mu + 1)}.$$

تحت این شرایط جواب دقیق برای این مسئله  $u(x, t) = \frac{\sin(x) t^{\mu} E_{\rho, 1+\mu}^{\gamma}(\omega t^{\rho})}{\Gamma(\kappa - \mu + 1)}$  است. برای این مسئله، فرض می‌کنیم

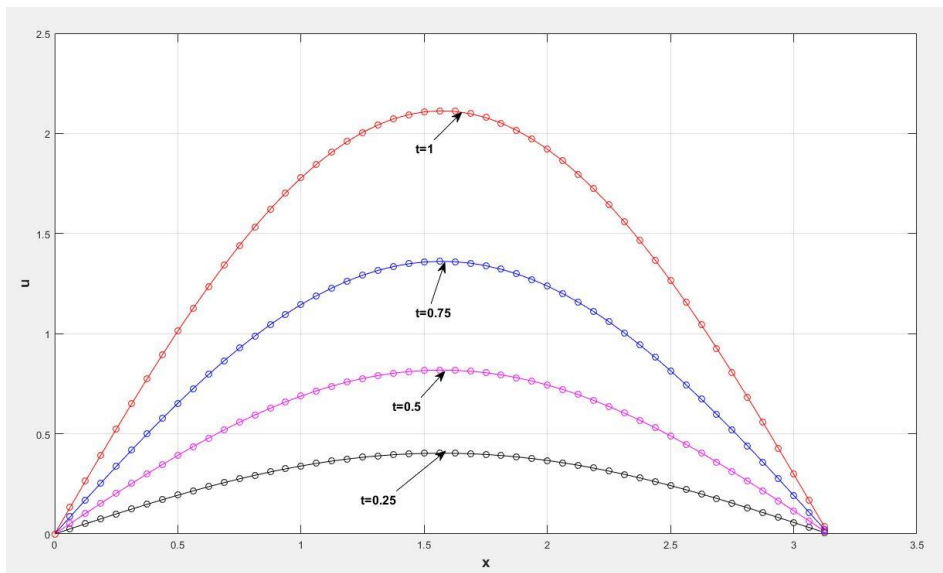
$\Delta x = h$  و جواب عددی  $u(x, t)$  را با قرار دادن  $\Delta t = (\Delta x)^2$  و  $\Delta t = (\Delta x)^3$  تقریب می‌زنیم. نتایج عددی جواب‌های تقریبی برای مقایسه مختلفی از پارامترهای  $\rho$ ،  $\omega$  و  $\gamma$  و  $\kappa = \frac{3}{2}$  در شکل ۵ نشان داده شده است. به علاوه، تصویری از

جواب‌های تقریبی و دقیق برای مقادیر مختلفی از  $t$ ،  $\mu = 0.5$  و  $\kappa = \frac{3}{2}$  در شکل ۶ نمایش داده می‌شود. ماکزیمم خطا و مرتبه همگرایی با استفاده از روش پیشنهادی برای این مسئله در جدول ۳ گزارش شده است. جدول ۳ نشان می‌دهد روش

پیشنهادی، دقت و کارایی مناسبی برای حل این‌نوع از مسئله‌ها را دارد. از جدول ۳ واضح است که برای  $\Delta t = (\Delta x)^2$  و  $p_x = p_h = 3p_t$  و  $p_x = p_h = 2p_t$  داریم  $\Delta t = (\Delta x)^3$ .



شکل ۵: جواب‌های تقریبی مثال ۳ با اندازه گام‌های مختلف  $h = 0.0625$  و  $\Delta t = (\Delta x)^2$  (a): تصویری از جواب‌های تقریبی برای  $\rho = 0.5, \omega = 1, \gamma = 0.75, \mu = 0.5$  (b): تصویری از جواب‌های تقریبی برای  $\rho = 0.75, \omega = 1, \gamma = 0.95, \mu = 0.5$ .



شکل ۶: جواب‌های تقریبی مثال ۱ با اندازه گام‌های مختلف  $h = 0.0625$  و  $\Delta t = (\Delta x)^2$  برای مقادیر مختلفی از  $t = \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ .

جدول ۳: ماکزیمم خطا و مرتبه همگرایی با استفاده از روش پیشنهادی برای مثال ۳

$\Delta x = h$	$\rho = 0.5, \omega = 1, \mu = 0.5, \gamma = 0.75, \kappa = \frac{3}{2}$		$\rho = 0.75, \omega = 1, \mu = 0.5, \gamma = 0.95, \kappa = \frac{3}{2}$			
	$\ E_{\Delta t=(\Delta x)^2}\ _{\infty}$	$p_t$	$\ E_{\Delta t=(\Delta x)^2}\ _{\infty}$	$p_t$	$\ E_{\Delta t=(\Delta x)^3}\ _{\infty}$	$p_t$
0.5	$7.43 \times 10^{-4}$	-	$5.06 \times 10^{-4}$	-	$3.95 \times 10^{-4}$	-
0.25	$3.13 \times 10^{-4}$	0.62	$2.04 \times 10^{-4}$	0.65	$1.63 \times 10^{-4}$	0.42
0.125	$7.88 \times 10^{-5}$	0.99	$1.12 \times 10^{-4}$	0.43	$3.31 \times 10^{-5}$	0.76
0.0625	$2.22 \times 10^{-5}$	0.91	$1.15 \times 10^{-5}$	1.64	$8.12 \times 10^{-6}$	0.67

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله یک معادله پخش زمان-کسری از مرتبه توزیعی شامل مشتق کسری کپوتو-پربهاکار با پارامترهای  $\rho, \omega, \gamma, \mu$  معرفی شد. برای به دست آوردن جواب تقریبی این گونه از معادلات از یک روش گسسته‌سازی مبتنی بر درونیایی بی‌اسپلین و تفاضل متناهی استفاده شد. برای ارزیابی و سنجش روش پیشنهادی سه مثال در نظر گرفته شد و از نتایج عددی این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت، جواب‌های تقریبی به دست آورده شده با استفاده از این روش به جواب‌های تحلیلی این مثال‌ها بسیار نزدیک است. روش پیشنهاد شده در ادامه می‌تواند برای بسیاری از مسایل کاربردی شامل مشتق کسری پربهاکار مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به اینکه معادله (۱) در بازه زمانی  $[0, T]$  تعریف شده، نتایج عددی حاصل از روش پیشنهادی برای مقادیر زمانی بزرگتر از یک نیز از دقت کافی برخوردار است، چون می‌توان بازه‌ها را با یک نگاهت به بازه  $[0, 1]$  انتقال داد.

## سپاس و قدردانی

این کار توسط دانشگاه شهرکرد تحت شماره گرنت 98GRD30M1328 حمایت مالی شده است.

## References

1. Biswas K., Bohannan G., Caponetto R., Lopes A.M., Machado J.A.T., "Fractional-order models of vegetable tissues", *Fractional-Order Devices*, Springer, (2017) 73-92.
2. Dabiri A., Moghaddam B.P., Machado J.T., "Optimal variable-order fractional PID controllers for dynamical systems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 309 (2018) 40-48.
3. Derakhshan M.H., Ansari A., "On Hyers–Ulam stability of fractional differential equations with Prabhakar derivatives", *Analysis*, 38 (2018) 37-46.
4. Derakhshan M.H., Ansari A., "Fractional Sturm–Liouville problems for Weber fractional derivatives", *International Journal of Computer Mathematics*, 96 (2019) 217-237.

5. Derakhshan M.H., Ansari A., "Numerical approximation to Prabhakar fractional Sturm–Liouville problem", *Computational and Applied Mathematics*, 38 (2019) 71.
6. Mainardi F., "Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity", an introduction to mathematical models, World Scientific, 2010.
7. Tarasov V.E., Tarasova V.V., "Computation. Macroeconomic models with long dynamic memory: Fractional calculus approach", *Applied mathematics and numerical computation*, 338 (2018) 466-486.
8. Dehghan M., Abbaszadeh M., "A Legendre spectral element method (SEM) based on the modified bases for solving neutral delay distributed-order fractional damped diffusion-wave equation", *Mathematical Methods in the Applied Science*, 41 (2018) 3476-3494.
9. Sandev T., Tomovski Z., Crnkovic B., "Generalized distributed order diffusion equations with composite time fractional derivative", *Computers and mathematics with applications*, 73 (2017) 1028-1040.
10. Caputo M., "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent", *Geophysical Journal International*, 13 (1967) 529-539.
11. Caputo M., "Elasticita de dissipazione", Zanichelli, Bologna, Italy, 1969.
12. Caputo M., "Distributed order differential equations modelling dielectric induction and diffusion", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 4 (2001) 421-442.
13. Bagley R., Torvik P., "On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations-Part I", *International Journal of Applied Mathematics*, 2 (2000) 865-882.
14. Hartley T., Lorenzo C., "Fractional system identification: an approach using continuous order-distributions" , *Mathematics*, 1999.
15. Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Ž., "Hilfer–Prabhakar derivatives and some applications", *Applied Mathematics and Computation*, 242 (2014) 576-589.
16. Garrappa R., "Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 53 (2015) 1350-1369.

17. Ford N.J., Morgado M.L., Rebelo M., "A numerical method for the distributed order time-fractional diffusion equation", International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications, 2014.
18. Kochubei A.N., "Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340 (2008) 252-281.
19. Atanackovic T.M., Opatica L., Pilipović S., "Semilinear ordinary differential equation coupled with distributed order fractional differential equation", Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 72 (2010) 4101-4114.
20. Umarov S., Gorenflo R., "Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations: Part one", Journal of Analytical and Applied Pyrolysis, 245 (2005) 449-466.
21. Ye H, Liu F., Anh V., "Compact difference scheme for distributed-order time-fractional diffusion-wave equation on bounded domains", Journal of Computational Physics, 298 (2015) 652-660.
22. Ye H., Liu F., Anh V., Turner I., "Numerical analysis for the time distributed-order and Riesz space fractional diffusions on bounded domains", IMA Journal of Applied Mathematics, 80 (2015) 825-838.
23. Ford N.J., Luisa Morgado M., Rebelo M., "An implicit finite difference approximation for the solution of the diffusion equation with distributed order in time", Electronic transactions on numerical analysis, 44 (2015) 289-305.
24. Morgado M.L., Rebelo M., "Numerical approximation of distributed order reaction–diffusion equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 275 (2015) 216-227.
25. Morgado M.L., Rebelo M., Ferras L.L., Ford N.J., "Numerical solution for diffusion equations with distributed order in time using a Chebyshev collocation method", Applied Numerical Mathematics, 114 (2017) 108-123.
26. Van Bockstal K., "Existence and uniqueness of a weak solution to a non-autonomous time-fractional diffusion equation (of distributed order)" , Applied Mathematics Letters, 109 (2020) 106540.



27. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Lima P., "An improved composite collocation method for distributed-order fractional differential equations based on fractional Chelyshkov wavelets", *Applied Numerical Mathematics*, 145 (2019) 1-27.
28. Gorenflo R., Luchko Y., Stojanović M., "Fundamental solution of a distributed order time-fractional diffusion-wave equation as probability density", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16 (2013) 297-316.
29. Garra R., Garrappa R., Simulation N. "The Prabhakar or three parameter Mittag–Leffler function: Theory and application", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 56 (2018) 314-329.
30. Eshaghi S., Ansari A., "Lyapunov inequality for fractional differential equations with Prabhakar derivative", *Mathematical Inequalities and Applications*, 19 (2016) 349-358.
31. Garrappa R., Mainardi F., Guido M., "Models of dielectric relaxation based on completely monotone functions", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 19 (2016) 1105-1160.
32. Stanislavsky A., Weron K., "A typical case of the dielectric relaxation responses and its fractional kinetic equation", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 19 (2016) 212.
33. Miskinis P., "The Havriliak–Negami susceptibility as a nonlinear and nonlocal process", *Physica Scripta*, 2009 (2009) 014019.
34. Górska K., Horzela A., Bratek L., Penson K., Dattoli G., "The probability density function for the Havriliak-Negami relaxation", *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical*, 51 (2016) 135202.
35. Giusti A., Colombaro I., "Prabhakar-like fractional viscoelasticity", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 56 (2018) 138-143.
36. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., "Theory and applications of fractional differential equations", Elsevier Science Limited, 2006.
37. Kilbas A.A., Saigo M., Saxena R.K., "Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators", *Integral Transforms and Special Functions*, 15 (2004) 31-49.