




Kharazmi University

# Addiction to Internet, Modeling and Control

Atena Ghasemabadi<sup>1</sup>  

1. Department of mathematics, Esfarayen University of Technology, Esfarayen, North Khorasan, Iran.

✉ E-mail: [ghasemabadi.math@gmail.com](mailto:ghasemabadi.math@gmail.com)

---

## Article Info

## ABSTRACT

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:

27 April 2020

Revised form:

27 July 2020

Accepted:

5 August 2020

Published online:

21 May 2022

### Keywords:

Global Stability;

Backward

Bifurcation;

Addiction

to Internet.

### Introduction

In recent years, the use of the Internet has been increasing. Attractions and many educational and recreational applications, etc. have caused the emergence of a new phenomenon called Internet addiction. Internet addiction is a new and interesting topic that arises from social changes including the cellularization of society and the family. Poor family support of their members, poor social skills, and easy access to Internet has contributed to this addiction. Today, there are Internet addiction treatment clinics around the world. In addition to the treatment, the person in these clinics receives the necessary training to use the Internet properly.

The effects of Internet addiction are similar to other addictions. These effects include mental disorders, euphoria and desire to consume more, etc. Because of the great similarities between Internet addiction and other addictions, in this article we have developed the epidemic model of heroin addiction in White and Comiskey [1].

### Material and methods

In the proposed model, we have studied the effect of education and prevention. To examine this issue, we have considered five classes: 1- Susceptible individuals, 2- Internet users without training, 3- Educated Internet users and fully aware of the harms of the Internet addiction, 4- Internet addicts 5- Addicts under treatment and education.

We examine the dynamic behavior of the model such as backward bifurcation, local and global stability equilibrium points. We investigate the boundary and

---

---

obtain the basic reproduction number of the system. We study the existence of endemic equilibrium points and, using the Chavez-Sang theorem, show that the backward bifurcation occurs. We obtain sufficient conditions for the global stability, the addiction-free equilibrium point, and the endemic equilibrium point using the Lyapunov function and the geometric stability method.

### Results and discussion

The epidemic model of heroin addiction was first introduced by White and Comiskey. In this article, we have developed this model. First, we have considered the age group of 15 to 65 years old as people who are inclined to use the Internet. Then some of these people become Internet users and a group of these people may become addicted to the Internet due to the excessive use of the Internet. At a certain rate, these addicts are treated and educated. On the one hand, Internet users may not become addicted and receive the necessary training and become professional Internet users.

### Conclusion

In this paper, we have conducted a complete qualitative study of the model including the existence and evaluation of local and global stability of the equilibrium points of the model.

We have shown that under certain conditions the addiction-free equilibrium point is local and global asymptotical stable. Using the compound matrix, we have obtained the conditions for the global stability of the endemic equilibrium point. We have shown the occurrence of backward bifurcation. This bifurcation indicates that when  $R_0 < 1$ , addiction remains in the society.

To control addiction, we need to get  $R_0^c$ . Reduce  $R_0$  to less than  $R_0^c$ .

---

**How to cite:** Ghasemabadi, A., (2022) Addiction to Internet, Modeling and Control. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-19



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## اعتیاد به اینترنت، مدل‌سازی و کنترل

آتنا قاسم آبادی<sup>۱</sup>

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین، خراسان شمالی، اسفراین، ایران.  
پست الکترونیکی: [ghasemabadi.math@gmail.com](mailto:ghasemabadi.math@gmail.com)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

در این مقاله، مدل ریاضی اعتیاد به اینترنت را ارائه می‌کنیم. تأثیر برنامه‌های آموزشی را روی کنترل این اعتیاد بررسی می‌کنیم. عدد باز تولید اساسی را به دست می‌آوریم. با استفاده از قضیهٔ چاوز-سانگ وقوع انشعاب پسرو را نشان می‌دهیم. پایداری کلی نقاط تعادلی را با استفاده از روش پایداری هندسی و تابع لیاپانوف ثابت می‌کنیم.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۰۸

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱۵

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

### واژه‌های کلیدی:

پایداری کلی،  
انشعاب پسرو،  
اعتیاد به اینترنت.

استناد: قاسم‌آبادی، آتنا؛ (۱۴۰۱). اعتیاد به اینترنت، مدل‌سازی و کنترل. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۹-۱.



© نویسنده‌گان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱. مقدمه:

در سال‌های اخیر، استفاده از اینترنت روز به روز در حال افزایش بوده است. جذابیت‌ها و کاربردهای فراوان آموزشی و تفریحی و... سبب به وجود آمدن پدیده جدیدی به نام اعتیاد به اینترنت شده است. اعتیاد به اینترنت موضوع تازه و جالبی است که ناشی از تغییرات اجتماعی از جمله سلولی شدن جامعه و خانواده است. حمایت ضعیف خانواده‌ها از اعضای خود، نقص مهارت‌های اجتماعی و سریع و در دسترس بودن اینترنت به این اعتیاد دامن زده است. امروزه در سرتاسر جهان، کلینیک‌های ترک اعتیاد به اینترنت به وجود آمده است، فرد در این کلینیک‌ها علاوه بر درمان، آموزش‌های لازم جهت استفاده صحیح از اینترنت را می‌بیند. اعتیاد به اینترنت آثاری شبیه سایر اعتیادها مانند اختلالات ذهنی، سرخوشی و میل به مصرف بیشتر و... دارد. به دلیل شباهت‌های زیاد اعتیاد به اینترنت با سایر اعتیادها، در این مقاله مدل اپیدمی اعتیاد به هروئین وایت و کومیسکی [۱] توسعه داده‌ایم. در مدل پیشنهاد شده، تأثیر آموزش و پیشگیری را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. برای بررسی این موضوع پنج کلاس را در نظر گرفته‌ایم: ۱- افراد مستعد، ۲- کاربران اینترنت بدون آموزش، ۳- کاربران اینترنت آموزش دیده و کاملاً آگاه از آسیب‌های اعتیاد به اینترنت، ۴- معتادان به اینترنت، ۵- معتادان تحت درمان و آموزش. رفتار دینامیکی مدل مانند انشعاب پسرو<sup>۱</sup>، پایداری موضعی و کلی نقاط تعادلی را بررسی خواهیم کرد. این مقاله به صورت زیر بخش‌بندی شده است: در بخش ۲، مدل ریاضی اعتیاد به اینترنت را ارائه می‌کنیم، بعضی مقدمات مانند کران‌داری را بررسی می‌کنیم و عدد باز تولید اساسی<sup>۲</sup> سیستم را به دست می‌آوریم. در بخش ۳، وجود نقاط تعادل بومی را مطالعه می‌کنیم و با استفاده از قضیه چاوز-سانگ نشان می‌دهیم انشعاب پسرو اتفاق می‌افتد. در بخش ۴، شرایط کافی برای پایداری کلی، نقطه تعادل آزاد از اعتیاد و نقطه تعادل بومی با استفاده از تابع لیاپانوف و روش پایداری هندسی<sup>۳</sup> به دست می‌آوریم.

## ۲. مدل ریاضی:

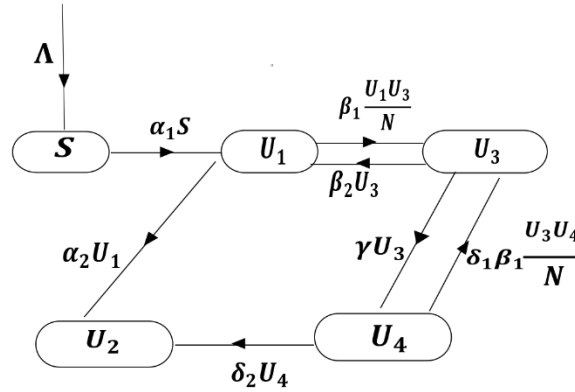
در این مدل،  $S$  را افراد مستعد و متمایل به استفاده از اینترنت که معمولاً گروه سنی ۱۵-۶۵ سال هستند، در نظر می‌گیریم.  $U_1$ ، کاربران اینترنت بدون آموزش،  $U_2$  کاربران اینترنت آموزش دیده و کاملاً آگاه از آسیب‌ها و خطرات اعتیاد اینترنتی،  $U_3$  معتادان اینترنتی و  $U_4$  معتادان تحت درمان و آموزش‌های لازم جهت استفاده صحیح از اینترنت می‌باشند. تعداد افراد در هر کلاس در زمان  $t$  را با  $S(t), U_1(t), U_2(t), U_3(t), U_4(t)$  نمایش می‌دهیم. افراد مستعد با نرخ  $\alpha_1$  کاربران معمولی اینترنت می‌شوند. کاربران معمولی با نرخ  $\alpha_2$  به کاربران آموزش دیده تبدیل می‌شوند. کاربران معمولی با نرخ  $\frac{\beta_1 U_3}{N}$  معتاد به استفاده از اینترنت می‌شوند. کاربران معتاد به دلایل مختلف از جمله کم پولی، سرعت کم اینترنت و کمبود زمان و... مجبور به استفاده کمتر از اینترنت می‌شوند و جز کاربران معمولی با نرخ  $\beta_2$

<sup>1</sup> Backward Bifurcation

<sup>2</sup> Basic Reproduction Number

<sup>3</sup> Geometric Stability Method

می‌شوند. کاربران معتاد با نرخ  $\gamma$  تحت درمان و آموزش قرار می‌گیرند. از این کاربران تحت آموزش به دلیل به اتمام نرساندن کلاس‌های آموزشی، جذابیت‌های اینترنت و مشکلات شخصی دوباره با نرخ  $\frac{\delta_1 \beta_1 U_3}{N}$  معتاد می‌شوند و یا به طور کامل آموزش می‌بینند و جز کاربران آموزش دیده، کلاس  $U_2$  با نرخ  $\delta_2$  می‌شوند.  $\mu$  نرخ مرگ طبیعی افراد در هر کلاس است. افراد با نرخ  $\Lambda$  وارد کلاس افراد مستعد می‌شوند.



بر اساس فرضیات فوق مدل زیر را به دست می‌آید:

(۱)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \alpha_1 S - \mu S, \\ \frac{dU_1}{dt} = \alpha_1 S - \frac{\beta_1 U_1 U_3}{N} + \beta_2 U_3 - \alpha_2 U_1 - \mu U_1, \\ \frac{dU_2}{dt} = \alpha_2 U_1 + \delta_2 U_4 - \mu U_2 \\ \frac{dU_3}{dt} = \frac{\beta_1 U_1 U_3}{N} + \frac{\delta_1 \beta_1 U_3 U_4}{N} - \beta_2 U_3 - \gamma U_3 - \mu U_3, \\ \frac{dU_4}{dt} = \gamma U_3 - \frac{\delta_1 \beta_1 U_3 U_4}{N} - \delta_2 U_4 - \mu U_4. \end{cases}$$

در این قسمت نشان می‌دهیم که به شرط مثبت بودن جواب‌های اولیه، جواب‌های سیستم مثبت باقی می‌مانند.

گزاره ۱. اگر جواب اولیه  $S(0) > 0, U_1(0) > 0, U_2(0) > 0, U_3(0) > 0, U_4(0) > 0$ ، آن‌گاه به ازای هر  $t$  جواب  $(S(t), U_1(t), U_2(t), U_3(t), U_4(t))$  از سیستم (۱) مثبت است.

اثبات: فرض کنید  $(S(t), U_1(t), U_2(t), U_3(t), U_4(t))$  جوابی از سیستم (۱) باشد با شرط اولیه

$t^* > 0$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $t \in [0, t^*)$  داریم:

$$\min\{S(t^*), U_1(t^*), U_2(t^*), U_3(t^*), U_4(t^*)\} = 0$$

اگر  $\min\{S(t^*), U_1(t^*), U_2(t^*), U_3(t^*), U_4(t^*)\} = S(t^*)$ ، آنگاه به ازای هر  $t \in [0, t^*)$  داریم:

$$\frac{dS}{dt} \geq -\alpha_1 S - \mu S,$$

بنابراین

$$0 = S(t^*) \geq S(0) \exp\left(-\int_0^{t^*} (\alpha_1 + \mu) dt\right) > 0$$

نامساوی اخیر تناقض است. زمانی که  $\min\{S(t^*), U_1(t^*), U_2(t^*), U_3(t^*), U_4(t^*)\}$  برابر دیگر متغیرهای سیستم (۱) باشد با زهم به تناقض می‌رسیم. □

جمعیت کل را با  $N$  نمایش می‌دهیم که  $N$  مقدار ثابتی است. با جمع کردن تمام معادلات دستگاه با یکدیگر به دست می‌آوریم:  $N = \frac{\Lambda}{\mu}$ . اکنون قرار می‌دهیم:

$$s = \frac{S}{N}, \quad u_1 = \frac{U_1}{N}, \quad u_2 = \frac{U_2}{N}, \quad u_3 = \frac{U_3}{N}, \quad u_4 = \frac{U_4}{N} = 1 - s - u_1 - u_2 - u_3.$$

بر این اساس معادله (۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

(۲)

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - \alpha_1 s - \mu s, \\ \frac{du_1}{dt} = \alpha_1 s - \beta_1 u_1 u_3 + \beta_2 u_3 - \alpha_2 u_1 - \mu u_1, \\ \frac{du_2}{dt} = \alpha_2 u_1 + \delta_2 - \delta_2 s - \delta_2 u_1 - \delta_2 u_2 - \delta_2 u_3 - \mu u_2, \\ \frac{du_3}{dt} = \beta_1 u_1 u_3 + \delta_1 \beta_1 u_3 - \delta_1 \beta_1 s u_3 - \delta_1 \beta_1 u_1 u_3 - \delta_1 \beta_1 u_2 u_3 - \delta_1 \beta_1 u_3^2 - \beta_2 u_3 - \gamma u_3 - \mu u_3. \end{cases}$$

مجموعه  $\Omega$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega = \{(s, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}_+^4 : s \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, s + u_1 + u_2 + u_3 \leq 1\}$$

مجموعه  $\Omega$ ، مجموعه پایای مثبت برای مدل (۲) می‌باشد. این مدل دارای نقطه تعادل آزاد از اعتیاد به صورت

$$E_0 = (\hat{s}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3) = \left( \frac{\mu}{\mu + \alpha_1}, \frac{\alpha_1 \mu}{(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)}, \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)}, 0 \right)$$

است. اکنون ماتریس ژاکوبین را در نقطه  $E_0$  به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} -\mu - \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -\mu - \alpha_2 & 0 & \beta_2 - \frac{\alpha_1 \beta_1 \mu}{(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)} \\ -\delta_2 & \alpha_2 - \delta_2 & -\mu - \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_1 \beta_1 \mu}{(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)} - \beta_2 - \gamma - \mu \end{bmatrix}$$

این ماتریس مقادیر ویژه

$$\lambda_1 = -\mu - \alpha_1, \lambda_2 = -\mu - \alpha_2, \lambda_3 = -\mu - \delta_2, \lambda_4 = \frac{\alpha_1 \beta_1 \mu}{(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)} - \beta_2 - \gamma - \mu.$$

را داراست. اکنون عدد باز تولید اساسی را به صورت  $R_0 = \frac{\alpha_1 \beta_1 \mu}{(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)(\beta_2 + \gamma + \mu)}$  تعریف می‌کنیم. در

[۲] عدد باز تولید اساسی و خواص آن ذکر شده است. به وضوح  $\lambda_4 < 0$  اگر و فقط اگر  $R_0 < 1$ .

بنابراین نتیجه زیر را برای پایداری مجانبی نقطه آزاد از اعتیاد به دست می‌آوریم.

**قضیه ۱:** اگر  $R_0 < 1$  آنگاه نقطه تعادل آزاد از اعتیاد  $E_0$  پایدار مجانبی موضعی است. اگر  $R_0 > 1$  آن‌گاه این نقطه ناپایدار است.

### ۳. وجود نقطه تعادل بومی و انشعاب پسرو:

برای به دست آوردن نقطه تعادل بومی مدل (۲)، جواب‌های مثبت و غیرصفر دستگاه زیر را بایستی به دست آوریم:

$$\begin{cases} \mu - \alpha_1 s^* - \mu s^* = 0, \\ \alpha_1 s^* - \beta_1 u_1^* u_3^* + \beta_2 u_3^* - \alpha_2 u_1^* - \mu u_1^* = 0, \\ \alpha_2 u_1^* + \delta_2 - \delta_2 s^* - \delta_2 u_1^* - \delta_2 u_2^* - \delta_2 u_3^* - \mu u_2^* = 0, \\ \beta_1 u_1^* u_3^* + \delta_1 \beta_1 u_3^* - \delta_1 \beta_1 s^* u_3^* - \delta_1 \beta_1 u_1^* u_3^* - \delta_1 \beta_1 u_2^* u_3^* - \delta_1 \beta_1 u_3^{*2} - \beta_2 u_3^* - \gamma u_3^* - \mu u_3^* = 0, \end{cases}$$

با استفاده از حل دستگاه فوق نتیجه می‌گیریم که  $u_3^*$  ریشه مثبت معادله درجه دوم زیر است:

$$F(u_3^*) = A(u_3^*)^2 + B u_3^* + C = 0$$

که

$$\begin{cases} A = -\beta_1 \delta_1 \mu (\mu + \alpha_1), \\ B = \alpha_1 \beta_1^2 \delta_1 \mu - \alpha_1 \beta_1 \gamma \delta_2 - \alpha_1 \beta_1 \gamma \mu - \beta_1 \gamma \delta_2 \mu - \beta_1 \gamma \mu^2 \\ \quad - \alpha_1 \beta_1 \delta_2 \mu - \alpha_1 \beta_1 \mu^2 - \beta_1 \delta_2 \mu^2 - \beta_1 \mu^3 - \beta_1 \beta_2 \delta_1 \mu^2 \\ \quad - \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \delta_1 \mu - \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \delta_1 \mu - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \delta_1 - \beta_1 \delta_1 \mu^3 \\ \quad - \alpha_1 \beta_1 \delta_1 \mu^2 - \alpha_2 \beta_1 \delta_1 \mu^2 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \delta_1 \mu, \\ C = (\mu + \delta_2)(\mu + \alpha_2)(\mu + \gamma + \beta_2)(R_0 - 1). \end{cases}$$

باتوجه به اینکه  $F''(u_3^*) = 2A < 0$  بنابراین تابع  $F$ ، ماکزیمم خود را در نقطه  $u_3^* = \frac{-B}{2A}$  دارد که مقدار ماکزیمم  $F(u_3^*) = \frac{4AC - B^2}{4A}$  است. اگر  $R_0 > 1$  آن‌گاه  $F(0) = C > 0$  و  $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ . بنابراین معادله درجه دوم  $F(u_3^*) = 0$  دقیقاً دارای یک ریشه مثبت (نقطه تعادل بومی منحصر به فرد) است.

در عموم مدل‌های اپیدمی، عفونت می‌تواند با کاهش عدد باز تولید اساسی به محدوده  $R_0 < 1$  کنترل شود، به شرط اینکه اندازه تمام کلاس‌های مدل در مجموعه جذب نقطه تعادل عاری از عفونت، یعنی نقطه  $DFE E_0$  قرار بگیرد. اما در بعضی از مدل‌های اپیدمی در محدوده  $R_0 < 1$  نیز نقطه تعادل بومی وجود دارد، که باعث می‌شود نقطه  $DFE E_0$  نتواند پایدار مجانبی سرتاسری گردد و دو پایداری<sup>۴</sup> در سیستم اتفاق می‌افتد، در این حالت برای منقرض شدن بیماری،  $R_0 < 1$  کافی نیست. در صورت رخ دادن این پدیده گفته می‌شود انشعاب پسرو اتفاق افتاده است. یک روش استاندارد برای مطالعه انشعاب پسرو، استفاده از قضیهٔ چاوز-سانگ<sup>۵</sup> (قضیهٔ ۴،۱ در [۳]) است. این قضیه از تئوری منیفولد مرکز به دست آمده است.

در حالتی که انشعاب پسرو اتفاق می‌افتد، عدد باز تولید اساسی در بازه  $R_0^C < R_0 < 1$  قرار دارد و حداقل دو نقطه تعادل بومی وجود دارد. (برای کسب اطلاعات بیشتر به [۲] مراجعه کنید) برای به دست آوردن  $R_0^C$ ،  $\Delta = 0$  را حل می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$R_0^C = 1 - \frac{B^2}{4\beta_1\delta_1\mu(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)(\mu + \delta_2)(\mu + \gamma + \beta_2)}$$

از بحث فوق نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

**قضیه ۲:** اگر  $R_0 > 1$ ، مدل (۲) نقطه تعادل بومی منحصر به فرد دارد. اگر  $R_0^C < R_0 < 1$  و  $B > 0$  آن‌گاه دو نقطه تعادل بومی وجود دارد.

اکنون با استفاده از قضیه چاوز-سانگ (قضیهٔ ۴،۱ در [۳]) نشان می‌دهیم که نقطه تعادل آزاد از اعتیاد  $E_0$  زمانی که  $R_0 = 1$  انشعاب پسرو دارد. از  $R_0 = 1$  رابطه به دست می‌آوریم:

$$\beta_1 = \beta_1^* = \frac{(\mu + \gamma + \beta_2)(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)}{\alpha_1\mu}$$

در این صورت ماتریس ژاکوبین دارای مقادیر ویژه زیر است:

$$\lambda_1^* = -\mu - \alpha_1, \quad \lambda_2^* = -\mu - \alpha_2, \quad \lambda_3^* = -\mu - \delta_2, \quad \lambda_4^* = 0.$$

بنابراین در حالتی که  $\beta_1 = \beta_1^*$  یا  $R_0 = 1$  صفر مقدار ویژه ساده است و بقیه مقادیر ویژه اعداد حقیقی منفی هستند. پس فرض (A1) از قضیه چاوز-سانگ برقرار است. مقدار ویژه  $\lambda_4^* = 0$  را در نظر می‌گیریم.  $w$  و  $v$  را که به ترتیب بردارهای ویژه چپ و راست ماتریس ژاکوبین  $J(E_0, \beta_1^*)$  را به دست می‌آوریم:

<sup>4</sup> bistability  
<sup>5</sup> Chavez-Song Theorem



$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (0, -\gamma - \mu, \frac{(\delta_2 - \alpha_2)(\gamma + \mu) - \delta_2(\mu + \alpha_2)}{\mu + \delta_2}, \mu + \alpha_2),$$

$$v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 0, 0, 1).$$

تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mu - \alpha_1 x_1 - \mu x_1, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2 x_4 + \beta_2 x_4 - \alpha_2 x_2 - \mu x_2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2 x_2 + \delta_2 - \delta_2 x_1 - \delta_2 x_2 - \delta_2 x_3 - \delta_2 x_4 - \mu x_3, \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \beta_1 x_2 x_4 + \delta_1 \beta_1 x_4 - \delta_1 \beta_1 x_1 x_4 - \delta_1 \beta_1 x_2 x_4 - \delta_1 \beta_1 x_3 x_4 - \delta_1 \beta_1 x_4^2 - \beta_2 x_4 - \gamma x_4 - \mu x_4. \end{cases}$$

اکنون مقادیر  $a$  و  $b$  را از رابطه های زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k,i,j=1}^4 v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(E_0, \beta_1^*) \\ &= \sum_{i,j=1}^4 w_i w_j \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_i \partial x_j}(E_0, \beta_1^*) \\ &= 2\beta_1 w_4 (w_2 - \delta_1 (w_2 + w_3 + w_4)) \\ &= 2\beta_1 w_4 \left( \frac{\delta_1 \gamma (\mu + \alpha_2)}{\mu + \delta_2} - \mu - \gamma \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sum_{k,i=1}^4 v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \beta_1}(E_0, \beta_1^*) \\ &= \sum_{i=1}^4 w_i \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_i \partial \beta_1}(E_0, \beta_1^*) = \frac{\alpha_1 \mu}{\mu + \alpha_1} > 0 \end{aligned}$$

بنابراین علامت  $a$  تعیین کننده رفتار سیستم است. اگر  $\delta_1 \gamma (\mu + \alpha_2) > (\mu + \gamma)(\mu + \delta_2)$  آنگاه  $a > 0$  و اگر  $\delta_1 \gamma (\mu + \alpha_2) < (\mu + \gamma)(\mu + \delta_2)$  آنگاه  $a < 0$ . بنابراین طبق قضیه چاوز-سانگ قضیه زیر نتیجه می شود.  
قضیه ۳: اگر  $\delta_1 \gamma (\mu + \alpha_2) > (\mu + \gamma)(\mu + \delta_2)$  و  $R_0 = 1$  در سیستم (۲) انشعاب پسر و اتفاق می افتد.

#### ۴. پایداری کلی نقاط تعادلی

در این بخش ابتدا پایداری کلی نقطه تعادل آزاد از اعتماد  $E_0$  و سپس پایداری کلی نقطه تعادل بومی را بررسی می کنیم. برای اثبات قضیه زیر ابتدا  $\hat{R}_0$  را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\hat{R}_0 = \frac{\alpha_1 \mu}{(1 + \delta_1)(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)}$$

قضیه ۴: اگر  $R_0 \leq \hat{R}_0 < 1$  آنگاه نقطه تعادل آزاد از اعتماد  $E_0$  پایدار مجانبی کلی است.

اثبات: تابع  $V(s, u_1, u_2, u_3) = u_3$  تعریف می کنیم. به وضوح تابع  $V$  در نقطه تعادل  $E_0$  برابر صفر است و برای هر  $u_3 > 0, u_2 > 0, u_1 > 0, s > 0$  تابع  $V > 0$  است. مشتق تابع  $V$  را نسبت به  $t$  به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= u_3' \leq \beta_1 u_1 u_3 + \delta_1 \beta_1 u_3 - (\beta_2 + \gamma + \mu) u_3 \\ &\leq (\beta_1 (1 + \delta_1) - \beta_2 - \gamma - \mu) u_3 \\ &= (\beta_2 + \gamma + \mu) \left( \frac{\beta_1 (1 + \delta_1)}{\beta_2 + \gamma + \mu} - 1 \right) u_3 \\ &= (\beta_2 + \gamma + \mu) \left( \frac{R_0}{\hat{R}_0} - 1 \right) u_3 \end{aligned}$$

بنابراین اگر  $R_0 < \hat{R}_0 = \frac{\alpha_1 \mu}{(1 + \delta_1)(\mu + \alpha_1)(\mu + \alpha_2)}$  آنگاه  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ . بنابراین طبق اصل پایایی لاسال<sup>۶</sup> نقطه

تعادل  $E_0$  نسبت به مجموعه پایای  $\Omega$  پایدار مجانبی کلی است.  $\square$

اکنون با استفاده از [4] از روش پایداری هندسی برای بررسی پایداری مجانبی کلی نقطه تعادل بومی استفاده می‌کنیم. گوی واحد در  $\mathbb{R}^2$  را با  $\mathfrak{B}$ ، مرز را با  $\partial\mathfrak{B}$  و بستارش را با  $\bar{\mathfrak{B}}$  نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$Lip(X \rightarrow Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ is Lipschitzian}\}$$

تابع  $\phi \in Lip(\bar{\mathfrak{B}} \rightarrow \Omega)$  را همبند ساده و سطح راستی‌پذیر<sup>۷</sup> دلخواه  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^4$  در نظر می‌گیریم. منحنی بسته و راستی‌پذیر در  $\Omega$ ، به عنوان یک تابع  $\phi \in Lip(\partial\mathfrak{B} \rightarrow \Omega)$  در نظر گرفته می‌شود و اگر این تابع یک به یک باشد آن‌گاه ساده است. تعریف می‌کنیم:

$$\Sigma(\psi, \Omega) = \{\psi \in Lip(\bar{\mathfrak{B}} \rightarrow \Omega) : \phi|_{\partial\mathfrak{B}} = \psi\}$$

نرم دلخواهی روی  $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$  در نظر بگیرید. تابع  $S$  روی سطح  $\Omega$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S\phi = \int_{\bar{\mathfrak{B}}} \left\| P(\phi) \left( \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \right) \right\| du$$

به طوری که  $u \rightarrow \phi(u)$  تابع لیپ‌شیتس روی  $\bar{\mathfrak{B}}$  است و  $\frac{\partial\phi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial u_2}$  حاصلضرب گوه‌ای<sup>۸</sup> در  $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$  است. به علاوه

تابع ماتریسی  $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ ،  $P$  معکوس‌پذیر است و  $\|P^{-1}\|$  تابع کراندار روی  $\phi(\bar{\mathfrak{B}})$  است. تابع برداری

$\frac{dx}{dt} = f(x) \in \mathbb{R}^n$  که تابع  $C^1$  روی مجموعه  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  است. دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی  $f(x)$

را در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $\phi_i(u) = x(t, \phi(u))$  جوابی از سیستم باشد که از نقطه  $(0, \phi(u))$  برای هر  $\phi$  عبور می‌کند. مشتق راست  $S\phi_i$  را به صورت

$$D_+ S\phi_i = \int_{\bar{\mathfrak{B}}} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (\|z + hQ(\phi_i(u))z\| - \|z\|) du$$

<sup>6</sup> principle Lasalle invariance

<sup>7</sup> Rectifiable surface

<sup>8</sup> wedge product

تعریف می کنیم که  $Q = P_f P^{-1} + P \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x} P^{-1}$  به طوری که  $\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$  مشتق دوم ماتریس  $\frac{\partial f}{\partial x}$  و  $P_f$  ماتریسی است که از جایگزین کردن هر درایه  $p_{ij}$  از ماتریس  $P$  با مشتق جهت‌اش در جهت  $f$  به دست می آید یا به عبارت دیگر

$$P_f = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x} \cdot f$$

اکنون معادله دیفرانسیل  $\frac{dz}{dt} = Q(\phi(u))z$  را که جواب آن به صورت  $z = P(\phi) \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right)$  است در نظر می گیریم و تعریف می کنیم  $D_+ S \phi_t = \int_{\mathbb{R}^3} D_+(\|z\|) du$ . ماتریس ژاکوبین (۲) را به صورت  $\frac{\partial f}{\partial x} = [a_{ij}]$  به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\mu - \alpha_1, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= 0, & a_{14} &= 0, & a_{21} &= \alpha_1, \\ a_{22} &= -\beta_1 u_3 - \alpha_2 - \mu, & a_{23} &= 0, & a_{24} &= -\beta_1 u_1 + \beta_2, \\ a_{31} &= -\delta_2, & a_{32} &= \alpha_2 - \delta_2, & a_{33} &= -\delta_2 - \mu, & a_{34} &= -\delta_2, \\ a_{41} &= -\delta_1 \beta_1 u_3, & a_{42} &= \beta_1 u_3 - \delta_1 \beta_1 u_3, & a_{43} &= -\delta_1 \beta_1 u_3, \\ a_{44} &= \beta_1 u_1 - \beta_2 - \gamma - \mu + \delta_1 \beta_1 - \delta_1 \beta_1 s - \delta_1 \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 u_2 - 2\delta_1 \beta_1 u_3. \end{aligned}$$

ماتریس مرکب<sup>۹</sup>  $M$  از  $\frac{\partial f}{\partial x}$  به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -2\mu - \alpha_1 - \beta_1 u_3 - \alpha_2, & M_{12} &= 0, & M_{13} &= -\beta_1 u_1 + \beta_2, & M_{14} &= 0, \\ M_{15} &= 0, & M_{16} &= 0, & M_{21} &= \alpha_2 - \delta_2, & M_{22} &= -2\mu - \alpha_1 - \delta_2, & M_{23} &= -\delta_2, \\ M_{24} &= 0, & M_{25} &= 0, & M_{26} &= 0, & M_{31} &= \beta_1 u_3 - \delta_1 \beta_1 u_3, & M_{32} &= -\delta_1 \beta_1 u_3, \\ M_{33} &= -2\mu - \alpha_1 + \beta_1 u_1 - \beta_2 - \gamma + \delta_1 \beta_1 - \delta_1 \beta_1 s - \delta_1 \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 u_2 - 2\delta_1 \beta_1 u_3, \\ M_{34} &= 0, & M_{35} &= 0, & M_{36} &= 0, & M_{41} &= \delta_2, & M_{42} &= \alpha_1, & M_{43} &= 0, \\ M_{44} &= -\beta_1 u_3 - \alpha_2 - 2\mu - \delta_2, & M_{45} &= -\delta_2, & M_{46} &= \beta_1 u_1 - \beta_2, \\ M_{51} &= \delta_1 \beta_1 u_3, & M_{52} &= 0, & M_{53} &= \alpha_1, & M_{54} &= -\delta_1 \beta_1 u_3, & M_{56} &= 0, \\ M_{55} &= -\beta_1 u_3 - \alpha_2 - 2\mu + \beta_1 u_1 - \beta_2 - \gamma + \delta_1 \beta_1 (1 - s - u_1 - u_2 - 2u_3), \\ M_{61} &= 0, & M_{62} &= \delta_1 \beta_1 u_3, & M_{63} &= -\delta_2, & M_{64} &= -\beta_1 u_3 + \delta_1 \beta_1 u_3, \\ M_{65} &= \alpha_2 - \delta_2, & M_{66} &= \beta_1 u_1 - \beta_2 - \gamma - 2\mu + \delta_1 \beta_1 - \delta_1 \beta_1 s - \delta_1 \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 u_2 - 2\delta_1 \beta_1 u_3 - \delta_2. \end{aligned}$$

فرض کنید  $P = [p_{ij}]_{6 \times 6}$  ماتریسی است که  $p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{44} = p_{55} = p_{66} = \frac{1}{u_3}$  و بقیه درایه ها برابر

صفر است. معکوس ماتریس  $P$  را با  $P^{-1} = [q_{ij}]$  نمایش می دهیم به طوری که

$$q_{11} = q_{22} = q_{33} = q_{44} = q_{55} = q_{66} = u_3$$

و بقیه درایه ها برابر صفر است. ماتریس  $P_f = [k_{ij}]$  که  $k_{11} = k_{22} = k_{33} = k_{44} = k_{55} = k_{66} = \frac{-u_3'}{u_3^2}$  و بقیه

درایه ها برابر صفر است. بنابراین

<sup>9</sup> Compound Matrix

$$P_f P^{-1} = -diag\left(\frac{u'_3}{u_3}, \frac{u'_3}{u_3}, \frac{u'_3}{u_3}, \frac{u'_3}{u_3}, \frac{u'_3}{u_3}, \frac{u'_3}{u_3}\right)$$

و ماتریس  $Q = P_f P^{-1} + PMP^{-1}$  به طوری که

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\mu - \alpha_1 - \beta_1 u_3 - \alpha_2 - \beta_1 u_1 + \beta_2 + \gamma - \delta_1 \beta_1 + \delta_1 \beta_1 s + \delta_1 \beta_1 u_1 + \delta_1 \beta_1 u_2 + \delta_1 \beta_1 u_3, \\ A_{12} &= 0, \quad A_{13} = -\beta_1 u_1 + \beta_2, \quad A_{14} = 0, \quad A_{15} = 0, \quad A_{16} = 0, \quad A_{21} = \alpha_2 - \delta_2, \\ A_{22} &= -\mu - \alpha_1 - \delta_2 - \beta_1 u_1 + \beta_2 + \gamma - \delta_1 \beta_1 + \delta_1 \beta_1 s + \delta_1 \beta_1 u_1 + \delta_1 \beta_1 u_2 + \delta_1 \beta_1 u_3, \\ A_{23} &= -\delta_2, \quad A_{24} = 0, \quad A_{25} = 0, \quad A_{26} = 0, \quad A_{31} = \beta_1 u_3 - \delta_1 \beta_1 u_3, \quad A_{32} = -\delta_1 \beta_1 u_3, \\ A_{33} &= -\mu - \alpha_1 - \delta_1 \beta_1 u_3, \quad A_{34} = 0, \quad A_{35} = 0, \quad A_{36} = 0, \quad A_{41} = \delta_2, \quad A_{42} = \alpha_1, \quad A_{43} = 0, \\ A_{44} &= -\beta_1 u_3 - \alpha_2 - \mu - \delta_2 - \beta_1 u_1 + \beta_2 + \gamma - \delta_1 \beta_1 + \delta_1 \beta_1 s + \delta_1 \beta_1 u_1 + \delta_1 \beta_1 u_2 + \delta_1 \beta_1 u_3, \\ A_{45} &= -\delta_2, \quad A_{46} = \beta_1 u_1 - \beta_2, \quad A_{51} = \delta_1 \beta_1 u_3, \quad A_{52} = 0, \quad A_{53} = \alpha_1, \quad A_{54} = -\delta_1 \beta_1 u_3, \quad A_{56} = 0, \\ A_{55} &= -\beta_1 u_3 - \alpha_2 - \mu - \delta_1 \beta_1 u_3, \quad A_{61} = 0, \quad A_{62} = \delta_1 \beta_1 u_3, \quad A_{63} = -\delta_2, \quad A_{64} = -\beta_1 u_3 + \delta_1 \beta_1 u_3, \\ A_{65} &= \alpha_2 - \delta_2, \quad A_{66} = -\delta_2 - \delta_1 \beta_1 u_3 - \mu. \end{aligned}$$

نرم تعریف شده در  $[\delta]$  را برای هر  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$  در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$$\|z\| = \max\{U_1, U_2\}$$

به طوری که  $U_1(z_1, z_2, z_3)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \max\{|z_1|, |z_2| + |z_3|\} & \text{if } \operatorname{sgn}(z_1) = \operatorname{sgn}(z_2) = \operatorname{sgn}(z_3) \\ \max\{|z_2|, |z_1| + |z_3|\} & \text{if } \operatorname{sgn}(z_1) = \operatorname{sgn}(z_2) = -\operatorname{sgn}(z_3) \\ \max\{|z_1|, |z_2|, |z_3|\} & \text{if } \operatorname{sgn}(z_1) = -\operatorname{sgn}(z_2) = \operatorname{sgn}(z_3) \\ \max\{|z_1| + |z_3|, |z_2| + |z_3|\} & \text{if } -\operatorname{sgn}(z_1) = \operatorname{sgn}(z_2) = \operatorname{sgn}(z_3) \end{cases}$$

و  $U_2(z_4, z_5, z_6)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} |z_4| + |z_5| + |z_6| & \text{if } \operatorname{sgn}(z_4) = \operatorname{sgn}(z_5) = \operatorname{sgn}(z_6) \\ \max\{|z_4| + |z_5|, |z_4| + |z_6|\} & \text{if } \operatorname{sgn}(z_4) = \operatorname{sgn}(z_5) = -\operatorname{sgn}(z_6) \\ \max\{|z_5|, |z_4| + |z_6|\} & \text{if } \operatorname{sgn}(z_4) = -\operatorname{sgn}(z_5) = \operatorname{sgn}(z_6) \\ \max\{|z_4| + |z_6|, |z_5| + |z_6|\} & \text{if } -\operatorname{sgn}(z_4) = \operatorname{sgn}(z_5) = \operatorname{sgn}(z_6) \end{cases}$$

اکنون لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم ۵: فرض کنید

(۳)

$$\begin{cases} \beta_2 + \gamma < \alpha_1 < \delta_2 \\ \alpha_1 + \beta_2 + \gamma < \alpha_2 \\ \max\{\alpha_1 + \beta_2 + \beta_1 u_1 - \mu\} < 0. \end{cases}$$

برای هر  $u_3, u_2, u_1, s > 0$  و هر  $z \in \mathbb{R}^6$  که  $z$  جوابی از  $\frac{dz}{dt} = Q(\phi_t(u))z$  وجود دارد به طوری که  $\tau > 0$ .

$$D_+ \|z\| \leq -\tau \|z\|$$

اثبات: برای ثابت کردن این لم بایستی شانزده حالت که از برخورد چهار محور به وجود می آید و نرم بالا را در نظر بگیریم. در این مقاله پنج حالت را بررسی می کنیم، بررسی بقیه حالت ها به طور مشابه می باشد.

حالت ۱:  $U_1 > U_2$  و  $z_1 > z_2 > z_3, z_2 > 0$  در این حالت  $\|z\| = \max\{|z_1| + |z_3|, |z_2| + |z_3|\}$  و زیر حالت ۱، اگر  $|z_1| > |z_2|$  در این صورت  $\|z\| = |z_1| + |z_3| = -z_1 + z_3$

$$\begin{aligned} D_+ \|z\| &= -z'_1 + z'_3 = (A_{31} - A_{11})z_1 + A_{32}z_2 + (A_{33} - A_{13})z_3 \\ &= (2\beta_1 u_3 + \mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 u_1 - \beta_2 - \gamma + \delta_1 \beta_1 - \delta_1 \beta_1 s \\ &\quad - \delta_1 \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 u_2 - 2\delta_1 \beta_1 u_3)z_1 - \delta_1 \beta_1 u_3 z_2 + (-\mu - \alpha_1 \\ &\quad + \beta_1 u_1 - \beta_2 - \delta_1 \beta_1 u_3)z_3 \\ &\leq (\beta_1 u_3 (-2 + \delta_1) - \mu - \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 + \gamma - \beta_1 u_1 \\ &\quad - \delta_1 \beta_1 (1 - s - u_1 - u_2 - u_3))|z_1| + (-\mu - \alpha_1 + \beta_1 u_1 - \beta_2 - \delta_1 \beta_1 u_3)|z_3| \\ &\leq \max\{H_{11}, H_{12}\} \|z\| \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} H_{11} &= \beta_1 u_3 (-2 + \delta_1) - \mu - \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 + \gamma - \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 (1 - s - u_1 - u_2 - u_3), \\ H_{12} &= -\mu - \alpha_1 + \beta_1 u_1 - \beta_2 - \delta_1 \beta_1 u_3. \end{aligned}$$

برای برقراری لم، در این حالت بایستی شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \delta_1 < 2, \\ \beta_2 + \gamma < \alpha_1 + \alpha_2, \\ \max\{-\alpha_1 - \beta_2 + \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 u_3 - \mu\} < 0. \end{cases}$$

زیر حالت ۲، اگر  $|z_1| < |z_2|$  در این حالت  $\|z\| = |z_2| + |z_3| = z_2 + z_3$  و

$$\begin{aligned} D_+ \|z\| &= z'_2 + z'_3 = (A_{21} + A_{31})z_1 + (A_{22} + A_{32})z_2 + (A_{23} + A_{33})z_3 \\ &= (\alpha_2 - \delta_2 + \beta_1 u_3 - \delta_1 \beta_1 u_3)z_1 + (-\mu - \alpha_1 - \delta_2 - \beta_1 u_1 + \beta_2 \\ &\quad + \gamma - \delta_1 \beta_1 + \delta_1 \beta_1 s + \delta_1 \beta_1 u_1 + \delta_1 \beta_1 u_2)z_2 + (-\delta_2 - \mu - \alpha_1 - \delta_1 \beta_1 u_3)z_3 \\ &\quad \text{از اینکه } |z_1| < |z_2| \text{ پس } (\delta_2 + \delta_1 \beta_1 u_3)|z_1| < (\delta_2 + \delta_1 \beta_1 u_3)|z_2| \text{ بنابراین} \\ D_+ \|z\| &\leq (-\mu - \alpha_1 + \beta_2 + \gamma - \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 (1 - s - u_1 - u_2 - u_3))|z_2| \\ &\quad + (-\delta_2 - \mu - \alpha_1 - \delta_1 \beta_1 u_3)|z_3| \leq \max\{H_{13}, H_{14}\} \|z\| \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} H_{13} &= -\mu - \alpha_1 + \beta_2 + \gamma - \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 (1 - s - u_1 - u_2 - u_3), \\ H_{14} &= -\delta_2 - \mu - \alpha_1 - \delta_1 \beta_1 u_3. \end{aligned}$$

برای برقراری لم، در این حالت بایستی شرط  $\beta_2 + \gamma < \alpha_1$  برقرار باشد.

حالت دوم:  $U_1 < U_2$  و  $z_6, z_5, z_4 > 0$  در این حالت  $\|z\| = |z_4| + |z_5| + |z_6|$  و

$$\begin{aligned}
D_+ \|z\| &= z'_4 + z'_5 + z'_6 = (A_{41} + A_{51})z_1 + (A_{42} + A_{62})z_2 + (A_{53} + A_{63})z_3 \\
&\quad + (A_{44} + A_{54} + A_{64})z_4 + (A_{45} + A_{55} + A_{65})z_5 + (A_{46} + A_{66})z_6 \\
&= (\delta_2 + \delta_1\beta_1u_3)z_1 + (\alpha_1 + \delta_1\beta_1u_3)z_2 + (\alpha_1 - \delta_2)z_3 + \\
&\quad + (-2\beta_1u_3 - \alpha_2 - \mu - \delta_2 - \beta_1u_1 + \beta_2 + \gamma - \delta_1\beta_1 + \delta_1\beta_1s \\
&\quad + \delta_1\beta_1u_1 + \delta_1\beta_1u_2 + \delta_1\beta_1u_3)z_4 + (-2\delta_2 - \beta_1u_3 - \mu - \delta_1\beta_1u_3)z_5 \\
&\quad + (-\delta_2 + \beta_1u_1 - \beta_2 - \mu - \delta_1\beta_1u_3)z_6 \\
&\leq (\beta_1u_3(-2 + \delta_1) + \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 + \gamma - \mu - \beta_1u_1 \\
&\quad - \delta_1\beta_1(1 - s - u_1 - u_2 - u_3))z_4 + (-\delta_2 - \beta_1u_3 - \mu + \alpha_1)z_5 \\
&\quad + (\beta_1u_1 + \alpha_1 - \beta_2 - \mu)z_6 \leq \max\{H_{21}, H_{22}, H_{23}\} \|z\|
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
H_{21} &= \beta_1u_3(-2 + \delta_1) + \alpha_1 - \alpha_2 - \mu + \beta_2 + \gamma - \beta_1u_1 - \delta_1\beta_1(1 - s - u_1 - u_2 - u_3) \\
H_{22} &= -\delta_2 - \beta_1u_3 - \mu + \alpha_1 \\
H_{23} &= \alpha_1 - \beta_2 - \mu + \beta_1u_1
\end{aligned}$$

برای برقراری لم، در این حالت بایستی شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}
\delta_1 < 2, \\
\alpha_1 + \beta_2 + \gamma < \alpha_2, \\
\alpha_1 < \delta_2, \\
\max\{\alpha_1 - \beta_2 + \beta_1u_1 - \mu\} < 0.
\end{cases}$$

**حالت سوم:** فرض کنید  $U_2 > U_1$  و  $z_6 < 0 < z_4, z_5$  در این حالت  $\|z\| = \max\{|z_4| + |z_5|, |z_4| + |z_6|\}$  و زیر حالت ۱، ۳: فرض کنید  $|z_5| > |z_6|$  در این حالت  $\|z\| = |z_4| + |z_5| = z_4 + z_5$

$$\begin{aligned}
D_+ \|z\| &= z'_4 + z'_5 \\
&= (A_{41} + A_{51})z_1 + A_{42}z_2 + A_{53}z_3 + (A_{44} + A_{54})z_4 + (A_{45} + A_{55})z_5 + A_{46}z_6 \\
&= (\delta_2 + \delta_1\beta_1u_3)z_1 + \alpha_1z_2 + \alpha_1z_3 + (-\beta_1u_3 - \alpha_2 - \mu - \delta_2 - \beta_1u_1 + \beta_2 \\
&\quad + \gamma - \delta_1\beta_1(1 - s - u_1 - u_2))z_4 + (-\delta_2 - \beta_1u_3 - \alpha_2 - \mu - \delta_1\beta_1u_3)z_5 \\
&\quad + (\beta_1u_1 - \beta_2)z_6 \\
&\leq (-\beta_1u_3 + \alpha_1 - \alpha_2 - \mu - \beta_1u_1 + \beta_2 + \gamma - \delta_1\beta_1(1 - s - u_1 - u_2))z_4 \\
&\quad + (\beta_2 - \beta_1u_3 - \alpha_2 - \mu + \alpha_1)z_5 \leq \max\{H_{31}, H_{32}\} \|z\|
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
H_{31} &= -\beta_1u_3 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma - \alpha_2 - \mu - \beta_1u_1 - \delta_1\beta_1(1 - s - u_1 - u_2), \\
H_{32} &= \beta_2 + \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1u_3 - \mu.
\end{aligned}$$

برای برقراری لم، در این حالت بایستی شرط  $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma < \alpha_2$  برقرار باشد.

**حالت ۲، ۳:** فرض کنید  $|z_5| < |z_6|$  در این حالت  $\|z\| = |z_4| + |z_6| = z_4 - z_6$  و

$$\begin{aligned}
D_+ \|z\| &= z'_4 - z'_6 = A_{41}z_1 + (A_{42} - A_{62})z_2 - A_{63}z_3 \\
&\quad + (A_{44} - A_{64})z_4 + (A_{45} - A_{65})z_5 + (A_{46} - A_{66})z_6 \\
&= \delta_2 z_1 + (\alpha_1 - \delta_1 \beta_1 u_3)z_2 + \delta_2 z_3 + (-\alpha_2 - \mu - \delta_2 \\
&\quad - \beta_1 u_1 + \beta_2 + \gamma - \delta_1 \beta_1 (1-s - u_1 - u_2))z_4 - \alpha_2 z_5 \\
&\quad + (\beta_1 u_1 - \beta_2 + \delta_2 + \delta_1 \beta_1 u_3)z_6 \\
&\leq (\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 + \gamma - \mu - \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 (1-s - u_1 - u_2 - u_3))z_4 \\
&\quad + (\alpha_1 + \beta_2 - \beta_1 u_1 - \mu)z_6 \leq \max\{H_{33}, H_{34}\} \|z\|
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
H_{33} &= \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 + \gamma - \mu - \beta_1 u_1 - \delta_1 \beta_1 (1-s - u_1 - u_2 - u_3), \\
H_{34} &= \alpha_1 + \beta_2 - \beta_1 u_1.
\end{aligned}$$

برای برقراری لم، در این حالت بایستی شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \beta_2 + \gamma + \alpha_1 < \alpha_2, \\ \max\{\alpha_1 + \beta_2 - \beta_1 u_1 - \mu\} < 0. \end{cases}$$

با توجه به فرضیات لم، در تمام حالت‌ها ضرایب  $\|z\|$  منفی است. □

یکی از روش‌های بررسی پایداری مجانبی کلی نقطه تعادل، استفاده از روش پایداری هندسی است. در این روش مجموعه فشرده‌ای به دست می‌آید که به ازای هر  $t$  در  $\Omega$  باقی می‌ماند. اما در مدل‌هایی که انشعاب پسرو دارد مانند مدل ۲، این مجموعه فشرده وجود ندارد. بنابراین در این حالت همانند [۶]، در لم زیر نشان می‌دهیم که دنباله  $\phi^k$  از سطوح وجود دارد.

لم ۶: فرض کنید  $\psi$  منحنی بسته و ساده در  $\Omega$  باشد. آن‌گاه  $\varepsilon > 0$  وجود دارد به طوری که برای هر  $t \in [0, \varepsilon]$ ، سطح  $\phi^k$ ،  $k = 2, 3, 4, \dots$  وجود دارد به طوری که  $S$  را نسبت به  $\Sigma(\psi, \Omega)$  می‌نیمم می‌کند.

اثبات فرض کنید  $\xi = \frac{1}{2} \min\{u_3 : (s, u_1, u_2, u_3) \in \psi\}$  بر اساس نامساوی

$$\frac{du_3}{dt} \geq -(\beta_2 + \gamma + \mu)u_3$$

که در  $\Omega$  برقرار است،  $\varepsilon > 0$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $t \in [0, \varepsilon]$  جواب‌هایی با  $u_3(0) \geq \xi$  در  $\Omega$  باقی می‌ماند. اکنون بایستی وجود دنباله  $\{\phi^k\}$  که  $S$  را نسبت به  $\Sigma(\psi, \tilde{\Omega})$  می‌نیمم می‌کند، را نشان دهیم که:

$$\tilde{\Omega} = \{(s, u_1, u_2, u_3) \in \Omega : u_3 \geq \xi\}$$

اکنون برای سطح  $(\phi(v) = (s(v), u_1(v), u_2(v), u_3(v)))$  سطح دیگری به صورت

$$\tilde{\phi}(v) = (\tilde{s}(v), \tilde{u}_1(v), \tilde{u}_2(v), \tilde{u}_3(v))$$

به وسیله رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \phi(v) & \text{if } u_3 \geq \xi \\ (s, u_1, u_2, \xi) & \text{if } u_3 < \xi, s + u_1 + u_2 + \xi \leq 1 \\ P & \text{if } u_3 < \xi, s + u_1 + u_2 + \xi > 1 \end{cases}$$

که

$$P = \left( \frac{s}{\sqrt{3}(s+u_1+u_2)}(1-\xi), \frac{u_1}{\sqrt{3}(s+u_1+u_2)}(1-\xi), \frac{u_2}{\sqrt{3}(s+u_1+u_2)}(1-\xi), \xi \right)$$

اکنون ثابت می‌کنیم که  $S\tilde{\phi} \leq S\phi$  و  $\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_2} \leq \frac{\partial\phi}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial v_2}$  را به صورت

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_2} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6)^T \quad \text{و} \quad \frac{\partial\phi}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial v_2} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

$$\left\| \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_2} \right\| \leq \left\| \frac{\partial\phi}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial v_2} \right\| \quad \text{و ثابت می‌کنیم}$$

حالت اول: اگر  $\xi \geq u_3$  آنگاه  $\tilde{\phi} = \phi$  و برای  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  داریم  $|\tilde{x}_i| = |x_i|$  بنابراین

$$\left\| \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_2} \right\| = \left\| \frac{\partial\phi}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial v_2} \right\|.$$

حالت دوم: اگر  $\xi < u_3$  و  $s+u_1+u_2+\xi \leq 1$  آنگاه  $\tilde{\phi}(v) = (s(v), u_1(v), u_2(v), \xi)$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial u_2} = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial v_1} & \frac{\partial s}{\partial v_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial v_1} & \frac{\partial s}{\partial v_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \end{bmatrix} \\ 0 \\ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین به ازای  $i = 1, 2, 4$  داریم  $\tilde{x}_i = x_i$  و به ازای  $i = 3, 5, 6$ ، داریم  $\tilde{x}_i = 0$ . بنابراین  $|\tilde{x}_i| \leq |x_i|$  که نتیجه

$$\left\| \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v_2} \right\| \leq \left\| \frac{\partial\phi}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial v_2} \right\| \quad \text{می‌دهد}$$

حالت سوم: اگر  $\xi < u_3$  و  $s+u_1+u_2+\xi > 1$  آنگاه

$$\tilde{\phi}(v) = \left( \frac{s}{\sqrt{3}(s+u_1+u_2)}(1-\xi), \frac{u_1}{\sqrt{3}(s+u_1+u_2)}(1-\xi), \frac{u_2}{\sqrt{3}(s+u_1+u_2)}(1-\xi), \xi \right)$$

در این حالت به دست می‌آوریم:



$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial v_1} = z_1(v_1) f_1 + z_2(v_1) f_2, \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial v_2} = z_1(v_2) f_1 + z_2(v_2) f_2$$

که

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و برای  $j=1,2$  داریم:

$$z_1(v_j) = (1-\xi) \frac{(u_1+u_2) \frac{\partial s}{\partial v_j} - s \left( \frac{\partial u_1}{\partial v_j} + \frac{\partial u_2}{\partial v_j} \right)}{\sqrt{3}(s+u_1+u_2)^2}$$

$$z_2(v_j) = (1-\xi) \frac{(s+u_2) \frac{\partial u_1}{\partial v_j} - u_1 \left( \frac{\partial s}{\partial v_j} + \frac{\partial u_2}{\partial v_j} \right)}{\sqrt{3}(s+u_1+u_2)^2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial v_2} &= (z_1(v_1) z_2(v_2) - z_2(v_1) z_1(v_2)) f_1 \wedge f_2 \\ &= \frac{(1-\xi)^2}{3(s+u_1+u_2)^4} K [1, -1, 0, 1, 0, 0]^T \end{aligned}$$

که

$$K = u_2(s+u_1+u_2)x_1 - u_1(s+u_1+u_2)x_2 + s(s+u_1+u_2)x_4$$

بنابراین

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial v_2} \right\| \leq |x_1| + |x_2| + |x_4| \leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right\|$$

$$\frac{1}{\tilde{u}_3} \leq \frac{1}{u_3} \quad \text{بنابراین } \tilde{u}_3(v) = \max\{u_3(v), \xi\}$$

ماتریس  $\tilde{P} = [\tilde{p}_{ij}]$  که  $\tilde{p}_{11} = \tilde{p}_{22} = \tilde{p}_{33} = \tilde{p}_{44} = \tilde{p}_{55} = \tilde{p}_{66} = \frac{1}{\tilde{u}_3}$  و بقیه درایه‌های ماتریس را صفر در نظر

می‌گیریم. از اینکه  $\left| \frac{1}{\tilde{u}_3} \tilde{x}_j \right| \leq \left| \frac{1}{u_3} x_j \right|$  برای  $j=1, \dots, 6$  بنابراین داریم

$$S \tilde{\phi} = \int_{\mathbb{B}} \tilde{P}(\tilde{\phi}) \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial v_2} \right) du \leq \int_{\mathbb{B}} P(\phi) \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right) du = S \phi$$

آن‌گاه  $\lim_{k \rightarrow \infty} S \phi^k = \delta$  اکنون دنباله  $\{\tilde{\phi}^k\} \subseteq \Sigma(\psi, \tilde{\Omega})$  همان‌طور که در بالا تعریف شد در نظر می‌گیریم، با توجه به

آن‌گاه  $\lim_{k \rightarrow \infty} S \phi^k = \delta$  اکنون دنباله  $\{\tilde{\phi}^k\} \subseteq \Sigma(\psi, \tilde{\Omega})$  همان‌طور که در بالا تعریف شد در نظر می‌گیریم، با توجه به

کرانداری  $\{S\tilde{\phi}^k\}$  و اینکه  $S\tilde{\phi}^k \leq S\phi^k$  داریم  $\lim_{k \rightarrow \infty} S\tilde{\phi}^k \leq \delta$ . از طرفی  $\tilde{\phi}^k \in \Sigma(\psi, \Omega)$ ، بنابراین  $S\tilde{\phi}^k \geq \delta$ .

بنابراین  $\lim_{k \rightarrow \infty} S\tilde{\phi}^k \geq \delta$ . پس داریم  $\lim_{k \rightarrow \infty} S\tilde{\phi}^k = \delta$ . نامساوی

$$\inf\{S\tilde{\phi} : \tilde{\phi} \in \Sigma(\psi, \tilde{\Omega})\} \leq \inf\{S\phi : \phi \in \Sigma(\psi, \Omega)\} = \delta$$

برقرار است و از این که  $\tilde{\phi} \in \Sigma(\psi, \Omega)$  داریم  $\inf\{S\tilde{\phi} : \tilde{\phi} \in \Sigma(\psi, \tilde{\Omega})\} \geq \delta$  بنابراین داریم

$$\inf\{S\tilde{\phi} : \tilde{\phi} \in \Sigma(\psi, \tilde{\Omega})\} = \delta.$$

نتیجه زیر را از بحث فوق می‌گیریم:

$$\inf\{S\tilde{\phi} : \tilde{\phi} \in \Sigma(\psi, \tilde{\Omega})\} = \delta = \lim_{k \rightarrow \infty} S\tilde{\phi}^k$$

یعنی  $\{\tilde{\phi}^k\}$ ،  $S$  را نسبت به  $\Sigma(\psi, \tilde{\Omega})$  می‌نیم می‌کند.  $\square$

از لم‌های ۵ و ۶ نتیجه زیر به دست می‌آید.

**قضیه ۷:** هر نقطه  $w$ -حدی از سیستم (۲) در  $\Omega^0$  نقطه تعادل است، بنابراین هر شبه مسیر  $^1$  مثبت از سیستم همگرا به یک نقطه تعادل است.

بنابراین از قضیه بالا، نتیجه زیر به دست می‌آید:

**قضیه ۸:** فرض کنید نامساوی‌های (۳) برقرار باشد، آن‌گاه

- (۱) اگر نقطه تعادل بومی موجود نباشد، آن‌گاه همه جواب‌های سیستم (۲) به نقطه تعادل آزاد از اعتیاد  $E_0$  همگراست.
- (۲) اگر  $R_0 > 1$ ، آن‌گاه همه جواب‌های سیستم (۲) همگرا به نقطه تعادل بومی منحصربه‌فرد است.
- (۳) اگر  $R_0^c < R_0 < 1$ ، در این حالت سیستم (۲) دارای دو نقطه تعادل است آن‌گاه جواب‌های سیستم، همگرا به نقطه تعادل آزاد از اعتیاد  $E_0$  است یا به نقطه تعادل بالاتر میل می‌کند.

## ۵. نتیجه‌گیری:

مدل اپیدمی اعتیاد به هروئین، اولین بار توسط وایت - کومیسکی معرفی شد. در این مقاله این مدل را توسعه داده‌ایم. ابتدا گروه سنی ۱۵-۶۵ سال را به عنوان افراد متمایل به استفاده از اینترنت در نظر گرفته‌ایم. سپس بعضی از این افراد کاربر اینترنت می‌شوند که ممکن است گروهی از این افراد به دلیل استفاده بیش از حد از اینترنت معتاد به اینترنتی شوند. با نرخ خاصی این معتادان به اینترنت تحت درمان و آموزش قرار می‌گیرند. از طرفی ممکن است کاربران اینترنتی معتاد نشوند و تحت آموزش‌های لازم قرار گیرند و به کاربران حرفه‌ای اینترنت تبدیل شوند.

در این مقاله، مطالعه کیفی کاملی از مدل شامل وجود و بررسی پایداری موضعی و کلی از نقاط تعادلی مدل انجام داده‌ایم. نشان داده‌ایم که تحت شرایط خاص نقطه تعادل آزاد از اعتیاد  $E_0$  پایدار مجانبی کلی و موضعی است. با استفاده از ماتریس مرکب، شرایطی را برای پایداری کلی نقطه تعادل بومی به دست آورده‌ایم.

وقوع انشعاب پسرو را نشان داده‌ایم. این انشعاب بیانگر این مطلب است که زمانی که  $R_0 < 1$ ، اعتیاد در جامعه باقی می‌ماند. برای کنترل اعتیاد، لازم است که  $R_0^c$  را به دست آوریم.  $R_0$  را به کمتر از  $R_0^c$  کاهش دهیم.

<sup>10</sup> Semi-Trajectory

## References

1. White E, Comiskey C. (2007) Heroin epidemics, treatment and ODE modeling. *Mathematical Biosciences*. 208(1):312-324.
2. Martcheva M, (2015) An introduction to mathematical epidemiology, Springer-Verlag, Berlin.
3. Castillo-Chavez C, Song B. (2004) Dynamical models of tuberculosis and their applications. *Math Biosci Eng*. 2:361-404.
4. Li MY, Muldowney JS. (1996) A geometric approach to global-stability problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 27(4):1070-1083.
5. Gumel AB, McCluskey CC, Watmough J. (2006) An SVEIR model for assessing potential impact of an imperfect anti-SARS vaccine. *Math Biosci Eng*. 3:485-512.
6. Arino J, McCluskey CC, Van den Driessche P. (2003) Global results for an epidemic model with vaccination that exhibits backward bifurcation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 64(1):260-276.
7. Buonomo B, Lacitignola D. (2011) Global stability for a four dimensional epidemic model. *Note di Matematica*. 30(2):83-96.
8. Buonomo B, Lacitignola D. (2008) On the use of the geometric approach to global stability for three dimensional ODE systems: a bilinear case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 348(1):255-266.
9. Buonomo B, Donofrio A, Lacitignola D. (2008) Global stability of an SIR epidemic model with information dependent vaccination. *Mathematical Biosciences*. 216(1):9-16.