



Kharazmi University

Estimation of probability density function of inverse Weibull distribution

Hassan Esfandyarifar¹ , Karim Ahmadi Somaeh² 

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Imam Ali University, Tehran, Iran. ✉E-mail: h50p50@yahoo.com
2. Agricultural Research Education and Extension Organization, Faculty of Sciences, Tehran, Iran. E-mail: k.ahmadi@areeo.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 27 April 2020

Received in revised form:

24 August 2021

Accepted: 12 June 2022

Published online:

6 February 2024

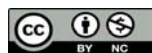
Keywords:

Two-observational percentile estimation, Maximum likelihood estimation, Percentile estimation, Inverse Weibull distribution.

ABSTRACT

The probability density function of the random variable of lifetime has many applications in survival analysis topics. Numerous researchers have researched the estimation of this density function for different random variables. These researchers' estimation methods, include UMVUE, Percentile, Two-observational Percentile, MLE, LSE and WLSE. In this paper, the estimation of Two-observational Percentile Estimation, Percentile Estimation and Maximum Likelihood Estimation of the probability density function of Inverse Weibull random variable, is studied. Based on a random sample with size of n , order statistics are obtained and using them, the estimation of Two-observational Percentile Estimation, Percentile Estimation and Maximum likelihood Estimation of the probability density function of Inverse Weibull random variable, are obtained. Methods of estimation of parameters, through these three estimates are numerical methods such as Newton-Rafson. In simulation studies, samples of 100, 200, 300, 400 and 500 samples are selected for some values of shape and scale parameters under the repetition of 5,000, the performance of these three estimation methods is compared with average of mean squared error criteria. Finally, the real data is presented and the performance of the estimates is compared with the Akaike, Bayes, and Hanan-Quick information criteria. The results, show that for Inverse Weibull distribution, Maximum likelihood Estimation, as a classical method, offers a better estimate than the Two-observational Percentile Estimation and Percentile Estimation.

How to cite: Esfandyarifar, Hassan., Ahmadi Somaeh, Karim. (2023). Estimation of probability density function of inverse Weibull distribution. *Mathematical Researches*, 9 (3), 267 – 278.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

برآورد تابع چگالی احتمال توزیع وایبول معکوس

حسن اسفندیاری فر^۱ ✉، کریم احمدی صومعه^۲

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران. رایانامه: h50p50@yahoo.com
۲. سازمان تحقیقات آموزش و ترویج کشاورزی، تهران، ایران. رایانامه: k.ahmadi@areeo.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله، برآورد صدکی دومشاهده‌ای، صدکی و ماکسیمم درست‌نمایی تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی وایبول معکوس، مطالعه می‌شود. عملکرد این سه روش برآوردی، در مطالعات شبیه سازی، با معیار میانگین توان دوم خطا، و در بررسی مثال واقعی، با معیارهای اطلاع آکاییک، بیزی و هانان-کوییک، مقایسه می‌گردد. نتیجه این مقاله، نشان می‌دهد که برای توزیع وایبول معکوس، روش ماکسیمم درست‌نمایی، به عنوان یک روش کلاسیک، برآورد بهتری نسبت به برآورد صدکی دومشاهده‌ای و برآورد صدکی، پیشنهاد می‌کند.	نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۲/۸ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۵/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۲ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷
	واژه‌های کلیدی: برآورد صدکی دو مشاهده‌ای، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد صدکی، توزیع وایبول معکوس.

استناد: اسفندیاری فر، حسن، احمدی صومعه، کریم، (۱۴۰۲). برآورد تابع چگالی احتمال توزیع وایبول معکوس. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۳)، ۲۶۷-۲۷۸.



مقدمه

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی طول عمر، کاربردهای فراوانی در مباحث تحلیل بقا دارد. پژوهشگران متعددی روی برآورد این تابع چگالی، برای متغیرهای تصادفی مختلف، تحقیق کرده‌اند. از جمله این که کلر و همکاران در [۱۰]، توزیع وایبول معکوس را برای مدل‌بندی داده‌های قابلیت اعتماد، استفاده کردند. خان و همکاران در [۱۱]، تحلیل نظری از توزیع وایبول معکوس را ارائه دادند. یعقوب زاده شهرستانی در [۱]، برای توزیع بتا-وایبول هندسی، جازی و همکاران در [۹]، برای توزیع وایبول معکوس گسسته، دیکشیت و جباری نوغابی در [۵]، برای توزیع پارتو، جباری نوغابی و جباری نوغابی در [۸]، برای توزیع پارتو نمایی شده، تحقیق کردند. محی‌الدین و ریاض در [۱۴]، جزئیات بیشتری از توزیع وایبول معکوس، بیان کردند. همچنین، باقری و همکاران در [۴]، برای توزیع گمبل نمایی شده، علیزاده و همکاران در [۲]، برای توزیع رایلی تعمیم یافته، باقری و همکاران در [۳]، برای توزیع پواسن-نمایی تعمیم یافته، ملکی جبلی و همکاران در [۱۳]، برای توزیع رایلی معکوس، یعقوب زاده شهرستانی و بارمحمدی در [۱۷]، برای توزیع وایبول-هندسی نمایی شده و فیاض حیدری و همکاران در [۷]، برای قابلیت اعتماد، مطالعه و بررسی کردند. روش‌های برآوردی این محققان، شامل برآورد ناریب با کمترین واریانس یکنواخت، برآورد صدکی، برآورد صدکی دومشاهده‌ای، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد کمترین توان دوم خطا و برآورد کمترین توان دوم خطای وزنی می‌باشد. در این مقاله، تابع چگالی احتمال وایبول معکوس با استفاده از روش برآورد صدکی دومشاهده-ای، برآورد شده و با روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی و صدکی، طبق معیار میانگین توان دوم خطا، مقایسه می‌شود. ساختار مقاله حاضر در چهار بخش تشریح می‌شود. در بخش ۲، روش‌های برآوردیابی بررسی می‌شود. در بخش ۳، مطالعات شبیه سازی انجام و با استفاده از معیار میانگین توان دوم خطا، برآوردهای مزبور مقایسه شده و برآورد بهتر، برای برخی مقادیر پارامتر، معرفی می‌گردد. در ادامه این بخش، یک مثال واقعی ارائه شده و سه برآورد موصوف، با معیارهای اطلاع آکاییک، بیزی و هانان-کوییک، مقایسه می‌شوند. در بخش ۴ نتایج به اختصار بیان می‌گردند.

۱. روش‌های برآورد

فرض کنید متغیر تصادفی Y دارای توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال

$$f(y; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-(\lambda y)^\alpha}, \quad y > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (1)$$

باشد. در این صورت متغیر تصادفی $X = \frac{1}{y}$ دارای توزیع وایبول معکوس (IW) با تابع چگالی احتمال

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda^\alpha x^{-(\alpha+1)} e^{-(\lambda x^{-1})^\alpha}, \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (2)$$

و تابع توزیع

$$F(x; \alpha, \lambda) = e^{-(\lambda x^{-1})^\alpha}, \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0. \quad (3)$$

است. توجه شود که α پارامتر شکل و λ پارامتر مقیاس است. فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه تصادفی n تایی از تابع چگالی احتمال (۲) و Y_1, \dots, Y_n آماره ترتیبی این نمونه باشد. در این بخش، روش‌های برآورد صدکی دومشاهده‌ای، صدکی و ماکسیمم درست‌نمایی تابع چگالی (۲) بدست می‌آیند. لازم به یادآوری است که برآوردهای صدکی، برآوردهایی هستند که براساس یک یا دو مقدار از تابع توزیع آماره‌های ترتیبی نمونه، بدست می‌آیند. اگر فقط از یک مقدار استفاده شود به آن برآورد صدکی تک مشاهده‌ای، یا به اختصار برآورد صدکی، و اگر از دو مقدار استفاده شود به آن برآورد صدکی دو مشاهده‌ای گویند.

2.1. برآورد صدکی دومشاهده‌ای: فرض کنید p_i صدک Y_i باشد، یعنی $p_i = F(y_i, \alpha, \lambda)$ که $F(y_i, \alpha, \lambda)$ تابع

توزیع آماره ترتیبی نام هست. در این صورت با استفاده از تابع توزیع وایبل معکوس و دوبار عمل لگاریتم گیری عبارت

$$\alpha(\log \lambda - \log y_i) = \log(-\log p_i). \quad (4)$$

به دست می‌آید. با استفاده از رابطه (4) و برای دو مقدار $0 < p_1 < p_2 < 1$

$$\begin{cases} \alpha(\log \lambda - \log y_1) = \log(-\log p_1) \\ \alpha(\log \lambda - \log y_2) = \log(-\log p_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \log \lambda - \alpha \log y_1 = \log(-\log p_1) \\ \alpha \log \lambda - \alpha \log y_2 = \log(-\log p_2) \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق

$$\alpha = \frac{\log(-\log p_2) - \log(-\log p_1)}{\log Y_1 - \log Y_2}$$

به دست می‌آید. در نتیجه، برآورد صدکی دو مشاهده‌ای α عبارت است از

$$\alpha^* = \frac{\log(-\log p_2) - \log(-\log p_1)}{\log Y_{k_1} - \log Y_{k_2}} = \frac{\log[-\log(1 - p_1^*)] - \log[-\log(1 - p_2^*)]}{\log Y_{k_1} - \log Y_{k_2}} \quad (5)$$

که در آن

$$k_i = \begin{cases} np_i & , \quad np_i \in Z \\ [np_i] + 1 & , \quad np_i \notin Z \end{cases}$$

به طوری که $[np_i]$ به معنای جزء صحیح عدد np_i است و $p_1^* = 1 - p_2$, $p_2^* = 1 - p_1$,

دوبی در [۶]، اعلام کرد که تمام برآوردهای صدکی، از جمله صدکی دومشاهده‌ای و فارغ از نوع توزیع، دارای توزیع مجانبی نرمال هستند. این موضوع با استفاده از قضیه موستلر در [۱۵]، و لم راتو در [۱۶]، به دست می‌آید. بنابراین α^* دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین α و واریانس

$$Var(\alpha^*) = \frac{\alpha^2}{nk^2} \left[\frac{p_1^*}{(1-p_1^*) \log^2(1-p_1^*)} + \frac{p_2^*}{(1-p_2^*) \log^2(1-p_2^*)} - \frac{2p_1^*p_2^*}{(1-p_1^*)(1-p_2^*) \log(1-p_1^*) \log(1-p_2^*)} \right] \quad (6)$$

است.

این واریانس، هنگامی کمینه است که $p_1^* = 0.16730679$ ، $p_2 = 0.02633648$ و $p_1 = 0.8326932$

در نتیجه، بهترین برآورد صدکی دومشاهده‌ای (BTPE) برای α ، که با نماد $\hat{\alpha}_{BTPE}$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$\hat{\alpha}_{BTPE} = \frac{-2.988881}{\log Y_{k_1} - \log Y_{k_2}} \quad (7)$$

به دست می‌آید، به طوری که

$$k_1 = \begin{cases} 0.02633648n & , \quad 0.02633648n \in Z \\ [0.02633648n] + 1 & , \quad 0.02633648n \notin Z \end{cases}$$

و

$$k_2 = \begin{cases} 0.8326932n & , \quad 0.8326932n \in Z \\ [0.8326932n] + 1 & , \quad 0.8326932n \notin Z. \end{cases}$$

برای برآورد صدکی دو مشاهده‌ای λ ، که با λ^* نشان داده می‌شود، از رابطه (۴) استفاده می‌شود. از این رو

$$\begin{cases} \alpha(\log \lambda - \log y_3) = \log(-\log p_3) \\ \alpha(\log \lambda - \log y_4) = \log(-\log p_4) \end{cases}$$

در نتیجه

$$\frac{\log \lambda - \log y_3}{\log \lambda - \log y_4} = \frac{\log(-\log p_3)}{\log(-\log p_4)}$$

بنابراین

$$\log(-\log p_4) (\log \lambda - \log y_3) = \log(-\log p_3) (\log \lambda - \log y_4)$$

و

$$\log \lambda = \frac{\log y_3 \log(-\log p_4)}{\log(-\log p_4) - \log(-\log p_3)} - \frac{\log y_4 \log(-\log p_3)}{\log(-\log p_4) - \log(-\log p_3)}$$

و در نتیجه

$$\lambda = \exp\left(\frac{\log y_3 \log(-\log p_4)}{\log(-\log p_4) - \log(-\log p_3)} - \frac{\log y_4 \log(-\log p_3)}{\log(-\log p_4) - \log(-\log p_3)}\right).$$

از این رو λ^* به صورت

$$\lambda^* = \exp(w_1 \log Y_{k_3} + w_2 \log Y_{k_4}) \quad (8)$$

به دست می‌آید که در آن

$$w_1 = \frac{\log(-\log p_4)}{\log(-\log p_4) - \log(-\log p_3)}, \quad w_2 = \frac{-\log(-\log p_3)}{\log(-\log p_4) - \log(-\log p_3)}.$$

دوبی در [۶]، اعلام کرد که تمام برآوردهای صدکی، دارای توزیع مجانبی نرمال هستند، بنابراین λ^* دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین λ و واریانس به صورت

$$\text{Var}(\lambda^*) = \frac{\lambda^2}{nk^2} \left\{ r_1^* \left(\frac{k - \log k_1}{k_1} \right) \left[\frac{k - \log k_1}{k_1} + \frac{2 \log k_1}{k_2} \right] + \frac{r_2^* \log^2 k_1}{k_2^2} \right\} \quad (9)$$

است به طوری که

$$k = \log(-\log p_4) - \log(-\log p_3), \quad r_1 = 1 - p_4, \quad r_2 = 1 - p_3$$

و

$$r_i^* = \frac{r_i}{1 - r_i}, \quad k_i = -\log(1 - r_i).$$

این واریانس، هنگامی کمینه است که، $r_1 = 0.39777$ و $r_2 = 0.82111$. این مقادیر با استفاده از بسته BP در نرم افزار R بدست آمده اند. بنابراین، بهترین برآورد صدکی دوماشده‌ای برای λ ، که با نماد $\hat{\lambda}_{BTPE}$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$\hat{\lambda}_{BTPE} = \exp(\hat{w}_1 \log Y_{k_3} + \hat{w}_2 \log Y_{k_4}) = \exp(0.5556994 \log Y_{k_3} + 0.4443006 \log Y_{k_4}) \quad (10)$$

به دست می‌آید که در آن

$$\hat{w}_1 = \frac{\log(-\log(1 - r_1))}{\log(-\log(1 - r_1)) - \log(-\log(1 - r_2))},$$

$$\hat{w}_2 = \frac{-\log(-\log(1-r_2))}{\log(-\log(1-r_1)) - \log(-\log(1-r_2))}$$

به طوری که

$$k_3 = \begin{cases} 0.17889n & , \quad 0.17889n \in Z \\ [0.17889n] + 1 & , \quad 0.17889n \notin Z \end{cases}$$

و

$$k_4 = \begin{cases} 0.60223n & , \quad 0.60223n \in Z \\ [0.60223n] + 1 & , \quad 0.60223n \notin Z. \end{cases}$$

در نتیجه، بهترین برآورد صدکی دومشاهده‌ای برای تابع چگالی رابطه (۲)، که با نماد \hat{f}_{BTPE} نشان داده می‌شود، به صورت

$$\hat{f}_{BTPE}(x; \alpha, \lambda) = \hat{\alpha}_{BTPE} \hat{\lambda}_{BTPE}^{\hat{\alpha}_{BTPE}} x^{-(\hat{\alpha}_{BTPE}+1)} \exp\left(-(\hat{\lambda}_{BTPE} x^{-1})^{\hat{\alpha}_{BTPE}}\right) \quad (11)$$

به دست می‌آید.

میانگین توان دوم خطای این برآوردگر، با روش‌های شبیه‌سازی مانند شبیه‌سازی مونت کارلو، به دست می‌آید، زیرا این معیار، دارای انتگرال‌هایی است که فقط به صورت عددی قابل حل هستند.

2.2. برآورد صدکی: فرض کنید p_i صدک Y_i باشد، یعنی $p_i = F(y_i, \alpha, \lambda)$ که تابع توزیع آماره ترتیبی i ام هست. در این صورت با استفاده از تابع توزیع وایبل معکوس و دوبار عمل لگاریتم‌گیری، رابطه (۴) به دست می‌آید. برآوردهای صدکی (PCE) برای α و λ از کمینه کردن عبارت

$$\sum_{i=1}^n (\alpha(\log \lambda - \log Y_i) - \log(-\log p_i))^2 \quad (12)$$

نسبت به α و λ محاسبه می‌شوند، به طوری که

$$p_i = \frac{i}{n+1}.$$

زیرا Y_1, \dots, Y_n آماره ترتیبی نمونه X_1, \dots, X_n و $p_i = F(y_i)$ تابع توزیع Y_i بوده و $F(y_1) \dots F(y_n)$ دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(0,1)$ هستند. اگر آماره‌های ترتیبی مربوط به $F(y_i)$ را با $p_{(1)} \dots p_{(n)}$ نشان دهیم آن‌گاه $p_{(i)}$ دارای توزیع بتا با پارامترهای i و $n-i+1$ بوده و امیدریاضی آن، که همان میزان متوسط $p_{(i)}$ است، $\frac{i}{n+1}$ می‌باشد.

با مشتق‌گیری رابطه (۱۲) نسبت به α و λ و حل دستگاه معادلات

$$n\alpha(\log \lambda)^2 - \log \lambda \sum_{i=1}^n \log(-\log p_i) + \left(\sum_{i=1}^n \log Y_i \log(-\log p_i) + \alpha \sum_{i=1}^n (\log Y_i)^2 \right) = 0$$

$$n\alpha \log \lambda - \alpha \sum_{i=1}^n \log Y_i - \sum_{i=1}^n \log(-\log p_i) = 0$$

برآوردهای صدکی α و λ که به ترتیب با $\hat{\alpha}_{PCE}$ و $\hat{\lambda}_{PCE}$ نشان داده می‌شوند، به دست می‌آید. روش نیوتن-رافسون، روش پیشنهادی حل این دستگاه است. با جایگذاری $\hat{\alpha}_{PCE}$ و $\hat{\lambda}_{PCE}$ در رابطه (۲)، برآورد صدکی تابع چگالی وایبول معکوس به دست می‌آید. میانگین توان دوم خطای این برآوردگر نیز، با روش‌های عددی محاسبه می‌گردد.

2.3. برآورد ماکسیمم درست نمایی: در این بخش، از روش نیوتن-رافسون استفاده کرده و با حل دستگاه معادلات

$$\frac{n}{\alpha} + n \log \lambda - \sum_{i=1}^n \log x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{x_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{\lambda}{x_i} \right) = 0 \quad \text{و} \quad \lambda = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \right)^{\left(\frac{1}{\alpha} \right)}$$

برآوردهای ماکسیمم درست نمایی α و λ که به ترتیب با $\hat{\alpha}_{MLE}$ و $\hat{\lambda}_{MLE}$ نشان داده می‌شود، به دست می‌آیند. با جایگذاری برآوردهای به دست آمده در تابع چگالی احتمال (۱)، برآورد ماکسیمم درست نمایی تابع چگالی وایبول معکوس محاسبه شده و همچنین میانگین توان دوم خطای این برآوردگر، همانند دو برآوردگر دیگر، با روش‌های عددی به دست می‌آید.

۳. روش‌های عددی

در این بخش، با استفاده از معیار میانگین توان دوم خطا و مطالعات شبیه سازی، سه روش برآوردی بخش ۲ با یکدیگر مقایسه شده و برای یک مثال واقعی، بررسی می‌شوند.

3.1. مطالعات شبیه سازی: در قدم اول، از رابطه

$$X = \lambda [-\log U]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

استفاده شده و به ازای $\lambda = 0.25, 1.5, 3$ ، $\alpha = 1.5, 2, 4$ ، نمونه‌های به اندازه $n = 100, 200, \dots, 500$ از توزیع وایبول معکوس، تولید می‌شوند. دقت شود که U ، متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $(0, 1)$ است. در قدم دوم برآوردهای صدکی، ماکسیمم درست نمایی و صدکی دومشاهده‌ای α و λ بدست می‌آیند. سرانجام، در قدم سوم برآوردهای صدکی، ماکسیمم درست نمایی و صدکی دومشاهده‌ای تابع چگالی وایبول معکوس محاسبه می‌شوند. قدم‌های اول تا سوم، ۵۰۰۰ بار تکرار شده و متوسط تکرار ۵۰۰۰ تایی میانگین توان دوم خطا، α و λ مقایسه می‌شوند. برآوردی که دارای متوسط میانگین

توان دوم خطا (AM) کمتری باشد، برآورد بهینه است. در جدول ۱، به ازای برخی مقادیر α و λ محاسبات برآوردی نشان داده شده است.

جدول ۱: متوسط برآوردهای پارامتر α و λ و متوسط میانگین توان دوم خطا (AM) تابع چگالی وایبول معکوس

$AM(\hat{f}_{MLE})$	$AM(\hat{f}_{PCE})$	$AM(\hat{f}_{BPE})$	$\hat{\lambda}_{MLE}$	$\hat{\alpha}_{MLE}$	$\hat{\lambda}_{PCE}$	$\hat{\alpha}_{PCE}$	$\hat{\lambda}_{BTPE}$	$\hat{\alpha}_{BTPE}$	n	(α, λ)
0.48280	0.77035	4.34874	3.6372	1.9731	2.2954	1.4786	1.0079	4.8367	100	(2,3)
0.43818	0.79027	4.46875	3.6005	1.9642	2.2611	1.4728	1.0102	4.6467	200	(2,3)
0.46429	0.78236	4.48392	3.5936	1.9634	2.2551	1.4551	1.0110	4.5511	300	(2,3)
0.46307	0.78222	4.42212	3.5841	1.9586	2.2295	1.4498	1.0109	4.6769	400	(2,3)
0.48618	0.77847	4.47561	3.5835	1.9594	2.2351	1.4518	1.0108	4.6228	500	(2,3)
0.00931	0.02392	0.00994	1.1672	0.3301	0.8936	2.4553	1.1072	4.8612	100	(4,1.5)
0.00859	0.02798	0.01020	1.1652	0.3299	0.8332	2.4476	1.1492	4.2922	200	(4,1.5)
0.00859	0.02561	0.01051	1.1652	0.3295	0.7956	2.4444	1.1412	4.0555	300	(4,1.5)
0.00793	0.02709	0.01077	1.1656	0.3292	0.7693	2.4409	1.1577	3.8799	400	(4,1.5)
0.00795	0.02778	0.01095	1.1651	0.3293	0.7542	2.4426	1.1510	3.7940	500	(4,1.5)
0.00817	3.47621	0.01412	0.2540	2.5424	1.6962	0.1531	1.5782	2.0932	100	(1.5,0.25)
0.00808	3.14124	0.00890	0.2534	2.5072	3.0855	0.1093	1.5801	2.0281	200	(1.5,0.25)
0.00745	2.65151	0.00786	0.2531	2.4900	6.4183	0.0902	1.5799	2.0289	300	(1.5,0.25)
0.00816	2.53194	0.00866	0.2526	2.4718	24.016	0.0783	1.5769	2.0029	400	(1.5,0.25)
0.00798	2.28138	0.00862	0.2529	2.4811	11.233	0.0696	1.5771	2.0118	500	(1.5,0.25)

مطالعات شبیه سازی نشان می‌دهد که با معیار میانگین توان دوم خطا، روش ماکسیمم درست‌نمایی عملکرد بهتری دارد.

3.2. مثال واقعی: در این بخش، با استفاده از یک مجموعه داده واقعی، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد صدکی و بهترین برآورد صدکی دومشاهده ای تابع چگالی احتمال توزیع وایبول معکوس، بدست می‌آید. این مجموعه داده، که توسط لاولس (۲۰۰۳) داده شده است، شامل ۴۸ مشاهده از زمان تعمیر (بر حسب ساعت) فرستنده‌های هوایی است. جدول ۲ مقادیر جمع آوری شده را نشان می‌دهد.

جدول ۲: مقادیر مشاهده شده زمان تعمیر

0.2	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7	0.8	1.0	1.0	1.0	1.0
1.1	1.3	1.5	1.5	1.5	1.5	2.0	2.0	2.2	2.5	2.7	3.0	3.0	3.3	3.3	4.0	4.0
4.5	4.7	5.0	5.4	5.4	7.0	7.5	8.8	9.0	10.3	7.5	8.8	9.0	10.3			

اکنون، توزیع وایبول معکوس بر این داده ها برازش داده می‌شود، که نتیجه آن با معیار آماره نیکویی برازش کولموگروف-اسمیرینف، به شرح جدول ۳ است.

جدول ۳: مقادیر پارامترهای شکل و مقیاس

پارامتر شکل	پارامتر مقیاس	آماره کولموگروف-اسمیرینف	احتمال بامعنایی
1.011941	1.125229	0.0815	۰.۹۱۹۷

بر طبق جدول ۳، با توجه به احتمال بامعنایی، توزیع نظری وایبول معکوس با توزیع تجربی ناشی از داده‌ها، هماهنگ و برآورد پارامترهای شکل و مقیاس، با استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی انجام شده است. در جدول ۴، برآورد این پارامترها با سه روش بیان شده در این مقاله، انجام گرفته و مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی هر کدام نیز، داده شده است.

جدول ۴: مقایسه مقادیر پارامترهای شکل و مقیاس

روش	پارامتر شکل	پارامتر مقیاس	لگاریتم درست‌نمایی
ماکسیمم درست‌نمایی	1.011941	1.125229	-100.6268
صدکی دو مشاهده‌ای	1.034082	2.125229	-113.6210
صدکی	1.124321	2.897111	-144.4124

بر طبق جدول ۴، روش ماکسیمم درست‌نمایی، دارای بیشترین مقدار در لگاریتم درست‌نمایی است که نشان می‌دهد، بهتر از دیگر روش‌ها عمل می‌کند. برای بررسی بیشتر موضوع، از سه معیار اطلاع آکاییک (AIC)، بیز (BIC) و هانان-کوییک (HQC) استفاده می‌شود. این سه معیار، با روابط

$$AIC = -2\log L(\theta) + 2k$$

$$BIC = -2\log L(\theta) + k\log n$$

$$HQC = -2\log L(\theta) + 2k\log(\log n)$$

تعریف می‌شوند، که در آنها n ، تعداد مشاهدات، k تعداد پارامترها و $L(\theta)$ ، تابع درست‌نمایی است. هر روشی که دارای معیار اطلاع کمتری باشد، برآورد بهتری ارائه می‌دهد. در جدول ۵، مقایسه معیارهای اطلاع برای سه روش برآوردی موصوف در مقاله، آورده شده است.

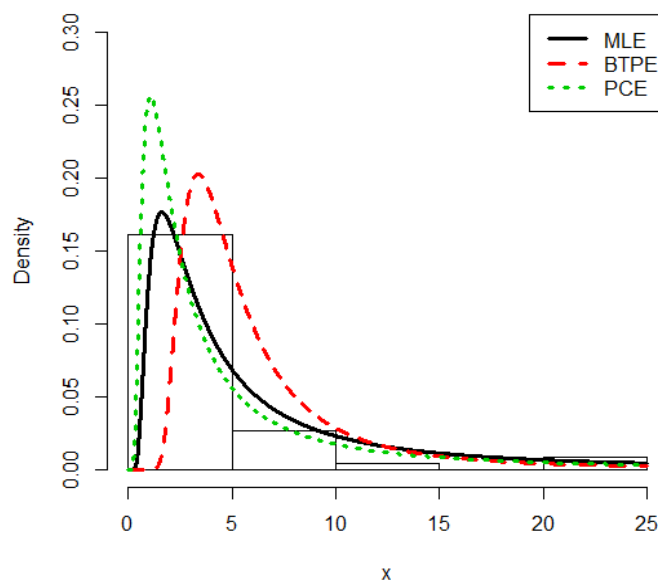
جدول ۵: مقایسه معیارهای اطلاع

روش	AIC	BIC	HQC
ماکسیمم درست‌نمایی	203.2536	208.9109	206.6236
صدکی دو مشاهده‌ای	229.242	234.8993	232.612
صدکی	290.8248	296.4821	294.1948

بر طبق جدول ۵، مشخص است که روش ماکسیمم درست‌نمایی، معیارهای اطلاع کمتری دارد. بنابراین روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد بهتری ارائه می‌کند.

نمودار ۱، نمودار هیستوگرام و برآورد تابع چگالی توزیع وایبول معکوس را برای مثال واقعی و با هر سه روش ماکسیمم درست‌نمایی، صدکی دو مشاهده ای و صدکی، نشان می‌دهد.

بر طبق این نمودار، در طبقه دارای بیشترین فراوانی نسبی، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی تابع چگالی، نزدیکی بیشتری را به نمودار هیستوگرام دارد و برای طبقات با فراوانی نسبی کمتر، سه روش برآوردی به هم نزدیک می‌شوند.



نمودار ۱. مقایسه سه روش برآورد تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی وایبول معکوس با نمودار هیستوگرام

۴. نتیجه گیری

در این مقاله، سه روش برآورد تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی وایبول معکوس، با هم مقایسه شد. عملکرد این سه روش برآوردی، چه در مطالعات شبیه سازی با معیار میانگین توان دوم خطا و چه در بررسی مثال واقعی با معیارهای اطلاع سه گانه و لگاریتم درست‌نمایی، نشان داد که روش ماکسیمم درست‌نمایی، عملکرد بهتری نسبت به دو روش صدکی و صدک دو مشاهده ای دارد. نتیجه نهایی این که برای توزیع وایبول معکوس، روش ماکسیمم درست‌نمایی، به عنوان یک روش کلاسیک، برآورد بهتری نسبت به برآورد صدکی دو مشاهده ای و برآورد صدکی ارائه می‌دهد.

تشکر و تقدیر

نویسندگان مقاله از زحمات سردبیر، داوران محترم مجله و ویراستار برای داوری و تصحیح مقاله تشکر می‌کنند.

References

۱. یعقوب زاده شهرستانی شهرام، برآوردهای تابع چگالی احتمالی توزیع تجمعی توزیع بتا وایبول هندسی، مجله علوم آماری، ۱۱(۲) (۱۳۹۶) ۳۵۷-۳۷۹.
2. M. Alizadeh, S.F. Bagheri and M. Khaleghy Mogaddam, Efficient Estimation of the Density and Cumulative Distribution Function of the Generalized Rayleigh Distribution, *Journal of Statistical Research of Iran*, **10**(1) (2013), 1-22.
3. S.F. Bagheri, M. Alizadeh, E. Baloui Jamkhaneh and S. Nadarajah, Evaluation and Comparison of Estimations in the Generalized Exponential-Poisson Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 2013a.
4. S.F. Bagheri, M. Alizadeh and S. Nadarajah, Efficient Estimation of the PDF and the CDF of the Exponentiated Gumbel Distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, (2013b).
5. U.J. Dixit and M. Jabbari Nooghabi, Efficient Estimation in the Pareto Distribution. *Statistical Methodology*, **7** (2010), 687-691.
6. S.D. Dubey, Some Percentile Estimators for Weibull Parameters, *Technometrics*, **9** (1967), 119-129.
7. K. Fayyaz Heidari, E. Deiri and E. Baloui Jamkhaneh, Using the best two observational percentile and maximum likelihood methods in a multicomponent stress-strength system to reliability estimation of inverse Weibull distribution, *Life Cycle Reliability and Safety Engineering*, Published Online: 12 March 2021.
8. M. Jabbari Nooghabi and H. Jabbari Nooghabi, Efficient Estimation of pdf, CDF and r th Moment for the Exponentiated Pareto Distribution in the Presence of Outliers, *Statistics*, **44** (2010), 1-20.
9. M. Jazi, C. Lai and M. Alamatsaz, A discrete inverse Weibull distribution and estimation of its parameters, *Stat Methodol*, **7** (2) (2010), 121-132.
10. A. Keller, A. Kamath and U. Perera, Reliability analysis of CNC machine tools, *Stat Methodol*, **3** (6) (1982), 449-473.
11. M. Khan, G. Pasha and A. Pasha, Theoretical analysis of inverse Weibull distribution, *WSEAS Trans Math*, **7** (2) (2008), 30-38.
12. J.F. Lawless, *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, New York, John Wiley & Sons, 2003.
13. F. Maleki Jebely, K. Zare and E. Deiri, Efficient estimation of the PDF and the CDF of the inverse Rayleigh distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **88** (1) (2018), 75-88.
14. M. Mohie El-Din and F. Riad, Estimation and prediction for the inverse Weibull distribution based on records. *J Adv Res Stat Probab*, **2** (3) (2011), 20-27.
15. F. Mosteller, On some useful inefficient statistics, *Ann. Math. Statist*, **17** (1946), 377-407.
16. C.R. Rao, *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*, New York, John Wiley & Sons, 1952.
17. S. Yaghoobzadeh Shahrastani and M. Yarmohammadi, The best single-observational and two-observational percentile estimations in the exponentiated Weibull-geometric distribution compared with maximum likelihood and percentile estimations. *Int J Syst Assur Eng Manag*, **10** (4) (2019), 525-532.