Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

A topology on a Rees matrix semigroup and its completion

Gholamreza Rezaei [1] ✉, **Javad Jamalzadeh** [2]

1. Corresponding Author, Department of mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.
   ✉ E-mail: grezaei@math.usb.ac.ir
2. Department of mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.
   E-mail: jamalzadeh1980@math.usb.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 27 June 2020
Received in revised form: 12 June 2021
Accepted: 14 February 2022
Published online: 3 December 2023

Keywords:
Rees matrix semigroup,
Topological semigroup,
Topological paragroup,
Uniformity,
Completion.

ABSTRACT

Introduction

Algebraic structures endowed with a topology have many applications in pure and applied sciences. Instance of such structures are completely simple semigroups which are the nearest relatives of groups. Many studies have been done on completely simple semigroups (see [3], [4], [6], [9], [10]). Dekany in [4] introduced a group congruence on certain completely simple semigroups, having in mind that such semigroups are indeed Rees matrix semigroups. In this paper, we consider a collection ℵ of normal subgroup with finite intersection property. We define a uniformity on the Rees matrix semigroup. So, we study the topological properties of this uniform topology. In particular, we show that if the normal subgroups have arbitrary intersection property, then the uniformity is complete. Finally, we show that every topological Rees matrix semigroup with normal subgroups have a completion. subsemigroup.

Material and methods

In this scheme, first we introduce a uniformity on a normal system Rees matrix semigroup S. We obtain some properties of topology induced by uniformity and then we establish the semigroup with this topology is a topological paragroup. After that, we construct a complete topological paragroup that contains S as a dense subsemigroup.

Results and discussion

If ℵ is a family of normal subgroups of G which is closed under intersection. The topological paragroup (S; ℵ) is compact if and only if (S; ℵ) is totally bounded. Finally, we construct a complete topological paragroup that contains S as a dense subsemigroup.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- We introduce a uniformity on a normal system Rees matrix semigroup S. We obtain some properties of topology induced by uniformity.
- We find a relation between two topologies induced by two normal systems of G on S.
- We prove that (S; ℵ) is a topological semigroup and topological paragroup.
- We construct a complete topological paragroup that contains S as a dense subsemigroup.

How to cite: Gholamreza Rezaei , Javad Jamalzadeh (2023). A topology on a Rees matrix semigroup and its completion. *Mathematical Researches*, 9 (2), 190 – 197.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸
پژوهش‌های ریاضی
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

یک توپولوژی روی یک پیراگروه با شرایط خاص و کامل‌سازی آن

غلامرضا رضایی [۱] ✉، جواد جمالزاده [۲]

۱. نویسنده مسئول، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ایران. رایانامه: grezaei@math.usb.ac.ir
۲. دانشگاه سیستان و بلوچستان، ایران. رایانامه: jamalzadeh1980@math.usb.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۴/۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۳/۲۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲

واژه‌های کلیدی:
نیم‌گروه ماتریس ریس،
پیراگروه توپولوژیک،
یکنواختی،
کامل سازی.

چکیده

در این مقاله، یک خانواده $\aleph$ از زیر گروههای نرمال با اشتراک متناهی بسته G را در نظر می‌گیریم و یک یکنواخت روی نیم گروه ماتریس ریس S از G تعریف می‌کنیم و خواص تولوژیکی S با توپولوژی یکنواختی را بررسی می‌نماییم. بخصوص نشان می‌دهیم هرگاه زیر گروهها نرمال $\aleph$ با خاصیت اشتراک دلخواه بسته باشند، آنگاه یکنواختی کامل است. در نهایت، اگر زیر گروههای نرمال تحت اشتراک متناهی بسته هستند، آنگاه یک کامل سازی از یکنواختی را می‌سازیم.

استناد: غلامرضا رضایی، جواد جمالزاده (۱۴۰۲). یک توپولوژی روی یک پیراگروه با شرایط خاص و کامل سازی آن. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۱۹۰ – ۱۹۷.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

ساختارهای جبری همراه با یک توپولوژی دارای کاربردهای زیادی در علوم محض و کاربردی می‌باشد، یکی از نزدیک‌ترین ساختارهای جبری نیم‌گروهی به گروه، پیراگروه است. مطالعاتی روی آن همراه با توپولوژی انجام شده است که می‌توان به مقالات [۳.۴.۶.۹.۱۰] اشاره کرد. در این مقاله، یک یکنواختی $\mathcal{U}$ به کمک $\aleph$ به عنوان یک خانواده از زیرگروه‌های نرمال G را روی پیراگروه S=M[G;I,Λ;P] می‌سازیم که درایه‌های P در $\bigcap\aleph$ قرار دارند. سپس ثابت می‌کنیم S با توپولوزی برآمده از یکنواختی، یک پیراگروه توپولوزیک است و این پیراگروه توپولوژیک، ۰-بعدی و کامل می‌باشد. مقدمات پیش‌رو از آورده شده است. فرض کنید S یک نیم گروه و E(S) مجموعه تمام خودتوان های S بدون صفر باشد. برای هر $e.f \in E(S)$، $e \leq f$ است هرگاه $ef = fe = e$. در این‌صورت یک رابطه مرتب جزئی روی E(S) است. یک عضو e از E(S) را اولیه می گویند اگر $f \leq e$ داشته باشیم e=f. یک نیم‌گروه S بدون صفر را ساده می گویند هرگاه تنها ایده آل آن، خودش باشد. یک نیم‌گروه S کاملا ساده نامیده می شود، هرگاه S ساده بوده و هر خودتوان آن، اولیه باشد. فرض کنید G یک گروه، او Λ در مجموعه ناتهی باشند P=($p_{\lambda\mu}$) ماتریس با درایه ها در G باشد. روی مجموعه I × G × Λ یک عمل به صورت زیر تعریف می کنیم: برای هر (I,a,λ),(j,b,μ) ∈ I × G × Λ،

$$(i.a.\lambda).(\mathrm{j.b.\mu}) = (\mathrm{i}.\mathrm{a}p_{\lambda\mu}\mathrm{b.\mu}),$$

که می توان ثابت کرد عمل شرکت پذیر می باشد. این نیم‌گروه را با نماد M[G:I,Λ;P] نشان می‌دهند و آن را نیم‌گروه ماتریس ریس می گویند. هر نیم‌گروه کاملا ساده با یک نیم‌گروه M[G;I,Λ;P] یکریخت می باشد. تعریف1. فرض کنید M[G:I,Λ;P] یک نیم‌گروه ماتریس ریس و N یک زیر گروه نرمال از گروه G باشد که درایه های P در N می باشد. یک رابطه ρ_N روی S بصورت زیر تعریف می شود[۴]: برای هر (i,g,λ),(j,h,μ)∈ S، (i,g,λ) ρ_N (j,h,μ) اگر و فقط اگر $gh^{-1}\in N$ ثابت می‌شود که ρ_N یک رابطه هم‌نهشتی است. حال فرض می‌کنیم ℵ یک خانواده از زیرگروه‌های نرمال G باشد که تحت اشتراک بسته هستند(اشتراک هر تعداد از اعضای آن متعلق به خودش است) و S=M[G;I,Λ;P] نیم‌گروه ماتریس ریس باشد بطوریکه اعضای P متعلق به $\bigcap\aleph$ باشد. آنگاه $(S,\aleph)$ را یک نیم‌گروه ماتریس ریس با سیستم نرمال می‌گویند.

۱. یک توپولوژی روی نیم‌گروه ماتریس ریس با سیستم نرمال

در بخش اصلی مقاله، یک یکنواختی $\mathcal{U}$ روی نیم‌گروه ماتریس ریس با سیستم نرمال (S, ℵ) معرفی می‌کنیم و خواص توپولوژیکی آن را مورد بررسی و واکاوی قرار می‌دهیم.

یک یکنواختی روی X، یک فیلتر $\mathcal{U}$ روی $X \times X$ صادق در شرایط زیر است[۷]:

(۱) برای هر $U \in \mathcal{U}$، $\Delta = \{(x,x): x \in X\}$.

(۲) اگر $U \in \mathcal{U}$، آنگاه $U^{-1}=\{(x,y) \in \mathcal{U}:(y,x)\in U\}\in\mathcal{U}$

برای هر $U \in \mathcal{U}$، $V \in \mathcal{U}$ وجود دارد بطوریکه

$$V \circ V = \{(x.z): \exists\, y \in X;\ (x.y) \in V.(y.z) \in V\} \subseteq U.$$

برای یک یکنواختی $\mathcal{U}$ روی مجموعه X، خانواده

$$\tau_{\mathcal{U}}=\{W\subseteq X: \forall x\in W, \exists U\in\mathcal{U}; U[x]\in V\}$$

یک توپولوژی روی X است که در آن $U(x)=\{y\in X:(x.y)\in U\}$ می‌باشد[۷].

قضیه ۱. فرض کنید $(S.\aleph)$ یک نیم‌گروه ماتریس ریس با سیستم نرمال باشد. اگر برای هر $N\in\aleph$،

$$U_N=\{(x,y)\in S\times S: x\,\rho_N y\},$$

آنگاه $\mathcal{U}=\{U\subseteq S:\exists N\in\aleph; U_N\subseteq U\}$ یک یکنواختی روی S است.

برهان. فرض کنید $U,V\in\mathcal{U}$. آنگاه بنابه تعریف، N2 و N1 متعلق به $\aleph$ وجود دارد بطوریکه $U_{N1}\subseteq U$ و $U_{N2}\subseteq V$. پس داریم $(x=(i,g,\lambda),y=(j,h,\mu))\in U_{N1}\cap U_{N2}$ اگر و فقط اگر $gh^{-1}\in N1\cap N2$. چون $\aleph$ نسبت به اشتراک بسته است، لذا $N1\cap N2$ متعلق به $\aleph$ است. پس $U_{N1\cap N2}\subseteq U\cap V$. خاصیت دوم فیلتر از تعریف $\mathcal{U}$ واضح است. اکنون خواص سه‌گانه یکنواختی را ثابت می‌کنیم: (۱) برای هر $U\in\mathcal{U}$، بنابه تعریف $N\in\aleph$ بطوریکه $U_N\subseteq U$. پس برای هر $x\in S$، $(x=(i,g,\lambda))\rho_N(x=(i,g,\lambda))$، بنابراین $\Delta\subseteq U_N\subseteq U$. (۲) فرض کنید $U\in\mathcal{U}$. بنابه تعریف $N\in\aleph$ بطوریکه $U_N\subseteq U$. ولی چون N زیرگروه G است، پس $N^{-1}=N$. بنابراین داریم $U_N=U_N^{-1}\subseteq U^{-1}$.

یعنی $U^{-1}\in\mathcal{U}$. (۳) برای هر $U\in\mathcal{U}$، یک $N\in\aleph$ وجود دارد بطوریکه $U_N\subseteq U$. از طرفی می دانیم که $U_NU_N=U_N$. اکنون با قرار دادن $V=U_N$ شرط (۳) بدست می‌آید. ■

یک نیم‌گروه S همراه با توپولوژی τ را یک نیم‌گروه توپولوژیک می‌گویند هر گاه عمل نیم‌گروه پیوسته باشد.

قضیه ۲. نیم‌گروه S با توپولوژی برگرفته از یکنواختی $\mathcal{U}$، یک نیم‌گروه توپولوژیک است.

برهان. فرض کنید U یک همسایگی باز از حاصلضرب نیم‌گروهی xy باشد. بنابه توپولوژی یکنواختی روی S، $N\in\aleph$ وجود دارد بطوریکه $xy\in[xy]_N\subseteq U$، بوضوح $[x]_N\times[y]_N$ یک همسایگی از زوج (x,y) در $S\times S$ است. از طرفی برای هر $(u,v)\in[x]_N\times[y]_N$، داریم $x\rho_N u$ و $y\rho_N v$. چون ρ_N یک رابطه هم‌نهشتی است، پس $(xy)\rho_N(uv)$ و آن نتیجه می‌دهد که $uv\in[xy]_N$. این حکم را ثابت می‌کند. ■

یک نیم‌گروه توپولوژیک S را پیراگروه توپولوژیک می‌نامند هرگاه S یکریخت با یک ماتریس ریس $M[G;\Lambda,I;P]$ برای یک گروه توپولوژیک G باشد که در آن Λ و I دو فضای توپولوژیک و $P:\Lambda\times I\longrightarrow G$ با ضابطه $(\lambda,i)\longrightarrow p_{\lambda i}$ یک نگاشت پیوسته باشد.

قضیه ۳. نیم‌گروه توپولوژیک S با توپولوژی یکنواختی $\mathcal{U}$ داده شده در قضیه ۱، یک پیراگروه توپولوژیک است.

برهان. برطبق قضیه ۱ از [۲]، کافی است که ثابت شود هر زیرگروه ماکزیمال H از S یک گروه توپولوژیک است. فرض کنید H زیرگروه ماکزیمال S باشد. بنابه قضیه ۲، عمل روی S پیوسته است، پس تحدید عمل به H نیز پیوسته است، یعنی H یک گروه پیراگروه می‌باشد. حال برای اثبات پیوستگی نگاشت معکوس، فرض کنید $U\cap H$ یک همسایگی باز از h^{-1} در H با توپولوژی زیرفضایی از S باشد. با توجه به توپولوژی برگرفته از یکنواختی $\mathcal{U}$، یک زیرگروه نرمال N از

G وجود دارد بطوریکه $h^{-1}\in[h^{-1}]_N\subseteq U$. حال $[h]_N$ را در نظر می‌گیریم که یک همسایگی باز شامل h در S می‌باشد که

$$([h]_N\cap H)^{-1}=[h^{-1}]_N\cap H\subseteq U\cap H$$

که پیوستگی معکوس را ثابت می‌کند و این اثبات حکم را کامل می‌کند. ■

در گزاره زیر، یک رابطه بین توپولوژی برآمده از دو سیستم نرمال گروه G روی نیم‌گروه ماتریس ریس بیان می‌کنیم.

گزاره ۴. فرض کنید $\aleph$ و $\aleph'$ دو سیستم نرمال از زیرگروه‌های نرمال باشند بطوریکه درایه‌های P در ماتریس ریس $M[G;\Lambda,I;P]$ متعلق به $\cap\aleph$ و $\cap\aleph'$ باشند. آنگاه توپولوژی یکنواختی بدست آمده از $\aleph$ ظریف‌تر از توپولوژی یکنواختی بدست آمده از $\aleph'$ است هرگاه برای هر $N\in\aleph'$، $N\in\aleph$ وجود دارد بطوریکه $N\subseteq N'$.

برهان. فرض کنید $x\in S$ یک عضو دلخواه مشمول در عضو پایه توپولوژیک $[y]_{\aleph'}$ بدست آمده از $\aleph'$ باشد. با توجه به شرط $N\in\aleph$ وجود دارد بطوریکه $N\subseteq N'$. حال $[x]_N$ را به عنوان همسایگی باز از x در توپولوژی یکنواختی برگرفته از $\aleph$ در نظر می‌گیریم. برای هر $u\in[x]_N$، داریم $u\rho_N x$. چون $N\subseteq N'$، لذا $u\in[x]_N\subseteq[y]_{N'}$ و آن حکم را ثابت می‌کند.
■

در لم پیش‌رو، بستار یک زیرمجموعه دلخواه A را در یک پیراگروه توپولوژیک توصیف شده در قضیه ۳ را بدست می‌آوریم:

لم ۵. فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی دلخواه از پیراگروه توپولوژیک (S,τ) باشد که در آن τ توپولوژی برگرفته شده از سیستم نرمال $\aleph$ است. آنگاه برای هر $A\subseteq S$، $\bar{A}=\bigcap\{[A]_N;N\in\aleph\}$ که در آن $[A]_N=\bigcup_{a\in A}[a]_N$ می‌باشد.

برهان. برای هر $x\in S$، $x\in\bar{A}$ اگر و فقط اگر برای هر $N\in\aleph$، $[x]_N\cap A\neq\phi$ و آن معادل است با اینکه برای هر $N\in\aleph$، $x\in[A]_N$ و این معنی می‌دهد که $x\in\bigcap\{[A]_N;N\in\aleph\}$. ■

یک فضای توپولوژیک را ۰-بعدی می‌گویند هرگاه دارای توپولوژیکی باشد که اعضای آن هم باز و هم بسته باشد.

نتیجه ۶. در پیراگروه توپولوژیک S با توپولوژی یکنواختی برگرفته از سیستم نرمال $\aleph$، پایه همسایگی‌های باز $[x]_N$ برای هر $N\in\aleph$، بسته نیز می‌باشند. بنابراین پیراگروه توپولوژیک ۰-بعدی است.

برهان. ثابت می‌کنیم برای هر $x\in S$ و $N\in\aleph$، $[x]_N$ بسته است یا بطور معادل مکمل آن، $([x]_N)^c$ باز است. بدین منظور فرض می‌کنیم $x\notin([x]_N)^c$. چون ρ_N یک رابطه هم‌نهشتی است، لذا

$[x]_N\cap[y]_N=\phi$. این بدین معنی است که $[y]_N$ یک همسایگی باز از y می‌باشد که $y\in[y]_N\subseteq([x]_N)^c$ و آن باز بودن $([x]_N)^c$ را ثابت می‌کند. بنابراین $\{[x]_N: x\in S,N\in\aleph\}$ یک پایه باز-بسته برای پیراگروه توپولوژیک S با توپولوژی برگرفته از سیستم نرمال $\aleph$ است. ■

از [۷] یادآوری می‌کنیم که فضای یکنواخت $(X,\mathcal{U})$ را کراندار کلی می‌نامند هرگاه برای هر $U\in\mathcal{U}$، مجموعه متناهی $x_1,x_2,\dots,x_n$ وجود دارند بطوریکه $X=\bigcup\{U[x_i]:1\leqslant i\leqslant n\}$.

قضیه ۷. فرض کنید $\aleph$ یک سیستم نرمال در گروه G با خاصیت اشتراک بسته باشد. آنگاه برای پیراگروه توپولوژیک $S=M[G;\Lambda,I;P]$ با توپولوژی برگرفته از $\aleph$، شرایط زیر معادلند:

(۱) S فشرده است.

(۲) S کراندار کلی است.

برهان. اثبات (۱) به (۲) از قضیه ۸.۳.۱۴ در [۷] نتیجه می‌شود.

برای اثبات (۲) به (۱)، فرض می‌کنیم $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Xi}$ یک پوشش باز دلخواه از S باشد. از طرفی چون $\aleph$ تحت اشتراک بسته می‌باشد، پس $N_0=\bigcap\aleph\in\aleph$. چون S کراندارکلی است. لذا $x_1,x_2,\ldots,x_n$ وجود دارند بطوریکه $S=\bigcup\{U(x_i):1\leqslant i\leqslant n\}$. حال برای هر $x_i\in S$ یک $\alpha_i\in\Xi$ وجود دارد بطوریکه $U(x_i)\subseteq O_{\alpha_i}$. بنابراین $\{O_{\alpha_i};\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ یک پوشش با متناهی از پوشش باز دلخواه $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Xi}$ می‌باشد، پس S فشرده است. ■

از قضیه ۸.۳.۱۴ در [۷] نتیجه زیر بدست می‌آید:

نتیجه ۸. پیراگروه $S=M[G;\Lambda,I;P]$ با توپولوژی برگرفته از سیستم نرمال با اشتراک بسته، یک فضای کامل است.

۲-کامل‌سازی از نیم‌گروه ماتریس ریس توپولوژی $(S,\mathcal{U}_\aleph)$

در این بخش، برای حالتی که اعضای زیرگروه‌های نرمال $\mathcal{U}$ تحت اشتراک متناهی بسته باشند، یک پاراگروه توپولوژی کامل ارائه می‌هیم که شامل S به عنوان زیرگروه چگال باشد یعنی یک کامل‌سازی از S باشد. ابتدا یک ساختار جبری را ارائه می‌دهیم که نگاهی متفاوت به نیم‌گروه ماتریس ریس (پیراگروه) است.

یک نیم‌گروه S را یک گروه تعمیم یافته مولایی گویند هرگاه

(۱) برای هر $x\in S$، یک خودتوان منحصربفرد مانند $e(x)$ وجود دارد بطوریکه $e(x).x=x.e(x)=x$.

(۲) برای هر $x\in S$، یک $x^{-1}\in S$ وجود دارد بطوریکه $xx^{-1}=x^{-1}x=e(x)$.

در [۱] ثابت شده است که گروه تعمیم یافته مولایی و نیم‌گروه ماتریس ریس به لحاظ جبری یکریخت هستند. (یک نیم‌گروه S، یک پاراگروه است اگر و فقط اگر گروه تعمیم‌یافته مولایی باشد.)

فرض کنید $(S,\aleph,\mathcal{U}_\aleph)$ یک نیم‌گروه ماتریس ریس با یکنواختی $\mathcal{U}_\aleph$ برگرفته از سیستم نرمال $\aleph$ با اشتراک متناهی بسته باشد. گردایه همه تورهای کوشی در S را با C نشان می‌دهیم. قرار می‌دهیم:

$$C=\{\{x_\alpha\}\ ;\ \forall U\in\mathcal{U}_\aleph\ ;\exists\alpha_0\in I,\ \forall\alpha\geqslant\alpha_0;\ (x_\alpha,x_{\alpha_0})\in U\}$$

و یک رابطه هم‌ارزی به‌کمک خانواده V بصورت زیر روی C تعریف می‌کنیم:

$$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\sim\ \{y_\alpha\}_{\alpha\in I}\Leftrightarrow\forall N\in\aleph\ ;\ \exists\alpha_N\in I;\ \alpha\geqslant\alpha_N\ \ x_\alpha P_N\ y_\alpha\}$$

و $\hat{S}$ را خانواده همه کلاس‌های هم ارزی روی C در نظر می‌گیریم و $[\{x_\alpha\}]$ را نماینده کلاسی در نظر می‌گیریم که شامل $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ باشد. حال یک پایه یکنواختی روی $\hat{S}$ به کمک سیستم نرمال $\aleph$ تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\tilde{U}}_N=\{([\{x_\alpha\}],[\{y_\alpha\}])\in\hat{S}\times\hat{S}\ ;\ \exists\alpha_N\in I;\ \forall\alpha\geqslant\alpha_N,\ (x_\alpha,y_\alpha)\in U_N(x_\alpha P_N y_\alpha)\}.$$

لم ۱.۲. خانواده $U=\{\hat{U}_N;\ N\in\aleph\}$ صادق در خواص پایه برای یک یکنواختی روی $\hat{S}$ می‌باشد.

برهان: با توجه به قضیه ۸.۰ در [۱۱] باید چهار خاصیت اثبات گردد. در ابتدا برای هر $N\in\aleph$، چون N، زیرگروه نرمال است، سه خاصیت اول براحتی بدست می‌آید. برای اثبات خاصیت چهارم، برای هر $N_1,N_2\in\aleph$، بنابه بسته بودن خاصیت اشتراک متناهی در $\aleph$، داریم $N=N_1\bigcap N_2\in\aleph$. بسادگی می‌توان نشان داد $\hat{U}_N\subseteq \hat{U}_{N1}\bigcap \hat{U}_{N2}$ خاصیت مورد نظر ثابت و برهان کامل می‌گردد. ■

در قضیه زیر می‌خواهیم نشان دهیم $\hat{S}$ با یک عمل تعریف شده روی آن یک پیراگروه توپولوژی است.

قضیه ۲.۲. سه‌تایی $(\hat{S},o,\boldsymbol{\tau})$ یک پیراگروه توپولوژی است که در آن برای هر $\{x_\alpha\},\{y_\alpha\}\in\hat{S}$، $\{x_\alpha\}o\{y_\alpha\}=\{x_\alpha y_\alpha\}$ می‌باشد.

برهان: باتوجه به اینکه o برگرفته از عمل روی S می‌باشد، لذا o یک عمل شرکت‌پذیر است. اکنون فرض کنیم برای هر $[\{x_\alpha\}]\in\hat{S}$، چون S یک گروه تعمیم‌یافته است لذا $e_\alpha=e(x_\alpha)$ و $x^{-1}\in S$ وجود دارد بطوریکه $x_\alpha.e_\alpha=e_\alpha.x_\alpha=x_\alpha$ و $x_\alpha.x_\alpha^{-1}=x_\alpha^{-1}.x_\alpha=e_\alpha$ با توجه به تعریف عمل o.

$[\{e_\alpha\}]$ و $[\{x_\alpha^{-1}\}]$ متعلق به $\hat{S}$ هستند و داریم

$$\{e_\alpha\}o\{x_\alpha\}=\{x_\alpha\}o\{e_\alpha\}=\{x_\alpha\}$$

$$\{x_\alpha\}o\{x_\alpha^{-1}\}=\{x_\alpha^{-1}\}o\{x_\alpha\}$$

پس $\hat{S}$ با عمل o، گروه تعمیم‌یافته مولایی(نیم‌گروه ماتریس ریس) می‌باشد. حال می‌خواهیم ثابت کنیم عمل o روی $\hat{S}$ پیوسته است. برای این منظور فرض کنید

$\hat{\tilde{U}}_N(\{x_\alpha y_\alpha\})$ یک پایه همسایگی از $\{x_\alpha y_\alpha\}$ باشد. اکنون $\hat{\tilde{U}}_N(\{x_\alpha\})$ و $\hat{\tilde{U}}_N(\{y_\alpha\})$ دو پایه همسایگی از $\{x_\alpha\}$ و $\{y_\alpha\}$ می‌باشند که $\hat{\tilde{U}}_N(\{x_\alpha\})\ 0\ \hat{\tilde{U}}_N(\{y_\alpha\})\subseteq\hat{\tilde{U}}_N(\{x_\alpha\ y_\alpha\})$ و آن پیوستگی o را ثابت می‌کند. با توجه به تعریف پیراگروه توپولوژی کافی است ثابت کنیم که هر زیرگروه ماکزیمال H از $\hat{S}$ یک گروه توپولوژی است. اما تحدید عمل o روی H پیوسته است. حال اثبات می‌کنیم نگاشت معکوس روی H پیوسته است. فرض کنید $\hat{\tilde{U}}_N(\{x_\alpha\})\bigcap H$ یک همسایگی از $\{y_\alpha^{-1}\}$ باشد آنگاه $\hat{\tilde{U}}(\{y_\alpha\})\bigcap H$ یک همسایگی از $\{y_\alpha\}$ می‌باشد بطوریکه $(\hat{\tilde{U}}_N(\{y_\alpha\})\bigcap H)^{-1}\subseteq\hat{\tilde{U}}_N(\{x_\alpha\})\bigcap H$ و آن اثبات را کامل می‌کند.■

برای هر $x\in S$، تور $[\{x_\alpha\}]$ را که در آن برای هر $\alpha\in I$، $x_\alpha=x$ با نماد $[\{x\}]$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۲. فرض کنید $\aleph$ یک سیستم نرمال با اشتراک متناهی بسته از گروه G باشد. آن‌گاه پیراگروه توپولوژیک $S=M[G;\Lambda.I;P]$ یک زیرنیم‌گروه چگال از پیراگروه توپولوژیک $(\hat{S},o,\boldsymbol{\tau})$ می باشد که در قضیه ۲.۲ توصیف شده است.

برهان. نگاشت $\varphi:(S,\aleph,\tau_{\mathcal{U}})\longrightarrow(\hat{S},o,\tau_{\mathrm{U}})$ را با ضابطه ی $\varphi(x)=[\{x\}]$ تعریف می‌کنیم. یک به یک بودن تابع واضح است. فرض کنید $N\in\aleph$ داده شده باشد. در اینصورت $(x,y)\in U_N$ اگر و فقط اگر $x\rho_N y$ و آن برقرار است اگر و فقط اگر $(x,y)\in\hat{U}_N$. این معادل بودن ثابت می‌کند نگاشت φ نشاننده است. چون S و $\varphi(S)$ با هم همسانریخت هستند، بجای چگال بودن S در $\hat{S}$ ثابت می‌کنیم $\varphi(S)$ در $\hat{S}$ چگال است. بدین منظور یک پایه همسایگی دلخواه مانند $\hat{U}_N([\{x_\alpha\}])$ را در نظر می‌گیریم. چون $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک دنباله کوشی است، لذا $\alpha_0\in I$ وجود دارد بطوریکه برای هر $\alpha,\beta\in I$، $x_\alpha\rho_N y_\beta$. این نشان می‌دهد $[\{x_{\alpha 0}\}]\in\hat{U}_N([\{x_\alpha\}])$ و آن ادعا را ثابت می کند. حال برای اثبات کامل بودن از قضیه ۱۶.۴ از [۷] استفاده می کنیم و نشان می‌دهیم هر تور کشی در $\varphi(S)$ در $\hat{S}$ همگرا است. به همین منظور یک تور کوشی $\{[x_t]_\alpha\}_{\alpha\in I}$ با $x_t\in S$ در $\varphi(S)$ را در نظر می‌گیریم. اکنون به راحتی می‌توان نشان داد که تور $\{[x_t]_\alpha\}_{\alpha\in I}$ به $[\{x_t\}_{t\in I}]$ همگرا است. ■

تقدیر و تشکر

از داوران محترم به‌خاطر پیشنهادهای سازنده‌شان که موجب بهبود کیفیت و پربارتر شدن مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

References

1. J. Araujo and J. Konieczny, Molaei´s generalized groups are completely simple semi- groups. Bul. Inst. Politeh. Ia_si. Sect_. I. Mat. Mec. Teor. Fiz. **48** (2003), 1-5.

2. T. Banakh, S. Dimitrova and O. Gutik, The Rees-Suschkewitsch Theorem for simple topological semigroups, Mat. Stud **31** (2009) 211-218.

3. A. H. Clifford and G. B, Preston, The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I.,Amer. Math.(1964).

4. T. Dekany, On extensions of completely simple semigroups by groups. Semigroup Forum, (**89)** (2014), 600-608.

5. R. Engelking, General Topology. PWN, Warsaw, (1986).

6. J. M. Howie, Fundamentals of Semigroup Theory. London Math. Monographs, New Ser. 12, Clarendon Press, Oxford. (1995).

7. I. M. James, Introduction to uniform spaces. Combridge University Press. (1990).

8. P. R. Jones, Completely simple semigroups: free products, free semigroups and varieties, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **88** (1981) 293-313.

9. W. S. Owen, The Rees theorem for locally compact semigroups. Semigroup Forum, **6** (1973) 133-152.

10. D. Rees, On semigroups, Proc. Cambridge Phil. Soc. 36 (1940) 87-400.

11. W. Roelcke and S. Dierolf, Uniform Structures on Topological Groups and their Quotients. McGraw-Hill, New York. (1981).