





Codimension One and Two Bifurcation Analysis in Discrete-Time Predator-Prey Model

J. Alidousti¹ , Z. Eskandari² 

1. Corresponding Author, Department of Mathematical Sciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

✉ E-mail: j.alidousti@sku.ac.ir

2. Department of Mathematics, Faculty of Science, Fasa University, Fasa, Iran, Iran. E-mail: z-eskandari@fasau.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 20 September 2020

Accepted: 28 April 2022

Published online:

6 February 2024

Keywords:

Prey-predator
Transcritical bifurcation,
Flip bifurcation,
Neimark-Sacker
bifurcation,
Strong resonance
bifurcation.

ABSTRACT

Introduction

In species interactions, there is competition, understanding, or consumption of one species by another (predator and prey). In ecology, the prey and predator relationship is one of the most important of these interactions. There has been extensive research on prey-predator models on both discrete and continuous time scales. The results of some studies on discrete-time models suggest that they are more suitable for population studies involving non-overlapping generations or where the density of the population is low, compared with continuous-time models. Furthermore, discrete-time models create much richer dynamic phenomena than continuous-time models.

The history of discrete-time prey-predator models can be traced back to the classic Lotka-Voltra model and has been studied by several authors. In this paper we consider the following prey predator model with discrete time:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) - bx_ny_n, \\ y_{n+1} = -cy_n + dx_ny_n, \end{cases} \quad (1)$$

where x and y represent the population densities of prey and predator, respectively, and a , b , c and d are positive parameters. Here a represents the natural growth rate of the prey in the absence of predators, b represents the effect of predation on the prey, c represents the natural death rate of the predator in the absence of prey, and d represents the efficiency and propagation rate of the predator in the presence of prey.

Material and Methods

This paper examines the bifurcations of model (1) numerically and analytically. The critical coefficients for each bifurcation have been calculated for analytical analysis of the bifurcations. The numerical analysis of the model has been performed using the numerical continuation method.

Results and discussion

We investigate the dynamics of the discrete prey-predator model in the current study. We demonstrate that model (1) undergoes codimension one bifurcations, including transcritical and flip (period-doubling) bifurcations. Additionally, codimension 2 bifurcations are known involving resonance 1:2, 1:3 and 1:4. It is thoroughly investigated the normal form coefficients along

with the scenarios for each bifurcation. Using numerical continuation techniques, bifurcation curves are drawn for the fixed points. Moreover, the numerical continuation confirms our analytical results, while also revealing a richer dynamic of the model, particularly at higher iterations.

Conclusion

This research led to the following conclusions.

- The critical coefficients of bifurcations of the prey-predator model are computed.
- Codimension one and codimension two bifurcations of the discrete-time prey-predator model are thoroughly surveyed.
- The non-degeneracy conditions and the bifurcation scenarios are analytically analyzed.
- The bifurcations of the higher iterations up to the fourth iteration are revealed.
- There is an excellent agreement between the analytical predictions and the numerical observations.

How to cite: Alidousti, J., Eskandari, Z., (2023). Codimension one and two bifurcation analysis in discrete-time predator-prey model. *Mathematical Researches*, 9 (3), 214 – 234.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

تحلیل انشعاب‌های هم‌بعد یک و دو از یک مدل شکار - شکارچی گسسته زمان

جواد علیدوستی^۱✉، زهره اسکندری^۲

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران. رایانامه: j.alidousti@sku.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه فسا، فسا، ایران. رایانامه: Z-eskandari@fasau.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله رفتار دینامیکی یک سیستم شکار و شکارچی گسسته را بررسی می‌کنیم. ابتدا شرایط لازم و کافی وجود نقاط ثابت از این مدل را بررسی می‌کنیم. سپس تمامی انشعابات ممکن از هم‌بعد یک مانند انشعاب تبادل پایداری، فلیپ و نایمارک-ساگر را به کمک نظریه‌ی منیفلد مرکز و فرم نرمال بررسی می‌کنیم. در ادامه کلیه‌ی انشعاب‌های هم‌بعد دو از این مدل مانند انشعاب رزونانس‌های قوی ۱:۲، ۱:۳ و ۱:۴ را بررسی خواهیم کرد. شبیه‌سازی عددی و روش امتداد عددی نه تنها نتایج تحلیلی ما را تایید می‌کند بلکه رفتار مدل را در تکرارهای بالاتر مانند تکرارهای چهارم و هشتم آشکار می‌سازد. رفتارهای تناوبی، شبه تناوبی، آشوبی، هم زیستی جاذبه‌های آشوبی و ... از این مدل در این شبیه‌سازی نمایان می‌شود که نشان دهنده‌ی رفتار غنی مدل است.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۶/۳۰	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۸	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷	
واژه‌های کلیدی:	
تبادل پایداری، فلیپ، نایمارک-ساگر، رزونانس، پایداری.	

استناد: علیدوستی، جواد؛ اسکندری، زهره؛ (۱۴۰۲). تحلیل انشعاب‌های هم‌بعد یک و دو از یک مدل شکار- شکارچی گسسته زمان، پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۳)، ۲۱۴ - ۲۳۴.



مقدمه

اثر متقابل گونه‌های مختلف موجب رقابت، تفاهم و یا مصرف گونه‌ای از گونه‌ی دیگر (شکار و شکارچی) می‌شود. یکی از مهمترین این تعامل‌ها رابطه‌ی شکار و شکارچی است که یکی از موضوعات مهم در اکولوژی است. مدل‌های شکار و شکارچی در هر دو مقیاس زمانی گسسته و پیوسته به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برخی مطالعات در مورد مدل‌های زمان گسسته نشان می‌دهد که این مدل‌ها که توسط معادلات تفاضلی توصیف می‌شوند مناسب‌تر از مدل‌های زمان پیوسته هستند، به خصوص وقتی جمعیت‌ها دارای نسل‌های غیر هم‌پوشانی هستند و یا وقتی تراکم جمعیت کم است. علاوه بر این پدیده‌های دینامیکی ایجادشده در مدل‌های زمان گسسته بسیار غنی‌تر از مدل‌های زمان پیوسته است. مراجع [۳، ۸، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰] را ببینید.

تاریخچه‌ی مدل‌های شکار و شکارچی گسسته به مرجع [۵] برمی‌گردد که مدل کلاسیک لوتکا-ولترا است و توسط بسیاری از نویسندگان مورد مطالعه قرار گرفته است به عنوان مثال در مرجع [۶] یک مدل بیولوژیکی برای تولید مثل ژنتیکی پیشنهاد شده است و ثابت شده است که برای مقادیر خاصی منحنی‌های ثابتی وجود دارد که روی آن‌ها رفتار شبه تناوبی از مدل دیده می‌شود. همچنین مرجع [۷] را ببینید. آنالیز انشعاب برخی از سیستم‌های دینامیکی گسسته را در مراجع [۱، ۲، ۴، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶] می‌توان ملاحظه کرد.

در مرجع [۲۱] نویسندگان به کمک روش گسسته‌سازی اویلر یک مدل شکار و شکارچی پیوسته را به مدل گسسته تبدیل کردند و انشعاب‌های فلیپ و نایمارک-ساکر از این مدل را استخراج کردند. در این مقاله سیستم شکار و شکارچی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) - bx_n y_n, \\ y_{n+1} = -cy_n + dx_n y_n, \end{cases} \quad (1)$$

که x, y بترتیب نشان‌دهنده چگالی جمعیتی شکار و شکارچی هستند، a نشان‌دهنده نرخ رشد طبیعی شکار در غیبت شکارچی است، b نشان‌دهنده تاثیر شکار روی شکارچی است، c نشان‌دهنده نرخ مرگ و میر طبیعی شکارچی در غیاب شکار است و d نشان‌دهنده بهره‌وری و میزان تکثیر شکارچی در حضور شکار است.

در مرجع [۲۲] نویسندگان این سیستم شکار و شکارچی را برای $c = 0$ مورد بررسی قرار دارند و برخی انشعاب‌های هم‌بعد یک از آن را استخراج کردند. در مرجع [۲۳] برای $c \neq 0$ انشعاب‌های فلیپ و نایمارک-ساکر از این مدل با در نظر گرفتن تنها یک پارامتر خاص استخراج شده است. انگیزه و هدف این مقاله بررسی کلیه انشعاب‌های ممکن با تغییر یک پارامتر (هم‌بعد یک) و کلیه انشعاب‌های ممکن با تغییر دو پارامتر (هم‌بعد دو) است. روش کار بر اساس تحدید سیستم به منیفلد مرکز و استفاده از فرم نرمال هر انشعاب است. شبیه‌سازی عددی برای پشتیبانی از نتایج تحلیلی و همچنین پیدا کردن رفتار سیستم در تکرارهای بالاتر ارائه خواهد شد.

این مقاله به شرح زیر نوشته می‌شود:

در بخش دوم وجود و پایداری نقاط ثابت از سیستم (۱) مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش سوم کلیه انشعاب‌های هم‌بعد یک را به‌همراه محاسبه دقیق ضرایب فرم نرمال ارائه می‌دهیم. در بخش چهارم کلیه انشعاب‌های هم‌بعد دو را ارائه خواهیم

داد. شبیه‌سازی عددی برای پشتیبانی از نتایج تحلیلی و استخراج رفتار سیستم در تکرارهای بالاتر در بخش پنجم ارائه می‌شود. نتیجه‌گیری در بخش ششم انجام می‌شود.

۲- وجود و پایداری نقاط ثابت

سیستم (۱) با تبدیل $y \rightarrow \frac{y}{b}$ به سیستم

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1-x_n) - x_n y_n, \\ y_{n+1} = -cy_n + dx_n y_n, \end{cases} \quad (2)$$

تبدیل می‌شود.

برای بدست آوردن نقاط ثابت مدل (۲) دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ax(1-x) - xy = x, \\ -cy + dxy = y. \end{cases} \quad (3)$$

جواب‌های دستگاه (۳) یا به عبارت دیگر نقاط ثابت مدل (۲) عبارتند از

$$E_0 = (0,0), \quad E_1 = \left(\frac{a-1}{a}, 0\right), \quad E_* = \left(\frac{c+1}{d}, \frac{d(a-1) - a(c+1)}{d}\right).$$

که E_1 برای $a > 1$ و E_* برای $d > \frac{a(c+1)}{a-1}$ و $a > 1$ موجود است.

قضیه زیر از مرجع [۲۳] آورده شده است و پایداری این نقاط ثابت را مشخص می‌کند.

قضیه ۱،۲. برای سیستم (۲) روابط زیر برقرارند:

E_0 پایدار مجانبی است اگر $1 < a$ و $c < 1$.

E_1 پایدار مجانبی است اگر $1 < a \leq 3$ و $\max\{0, \frac{a(c-1)}{a-1}\} < d < \frac{a(c+1)}{a-1}$.

E_* پایدار مجانبی است اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$(a) \quad 1 < a \leq 3, c > 0, \frac{a(c+1)}{a-1} < d < \frac{a(c+2)}{a-1}$$

$$(b) \quad 1 < a \leq 5, c > 0, \frac{a(c+1)(c+3)}{3+a-c+ac} < d < \frac{a(c+2)}{a-1}$$

$$(c) \quad 5 < a < 9, 0 < c < \frac{9-a}{a-5}, \frac{a(c+1)(c+3)}{3+a-c+ac} < d < \frac{a(c+2)}{a-1}$$

در ادامه انشعاب‌های هم‌بعد-۱ و هم‌بعد-۲ مدل (۱) بررسی می‌شوند. مدل مورد نظر به صورت

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{N}(\xi, \vartheta) = \begin{pmatrix} ax(1-x) - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}, \quad (4)$$

در نظر گرفته می‌شود، که $\xi = (x, y)^T$ و $\vartheta = (a, b, c, d)^T$ ماتریس ژاکوبی نگاشت (۴) به صورت

$$J(\xi, \vartheta) = \mathcal{N}_\xi(\xi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -2ax - by + a & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix},$$

است. فرم‌های چندخطی مرتبه دوم و سوم نگاشت (۴) مطابق مرجع [۲۴] به صورت

$$B_i(\Gamma, \Sigma, \vartheta) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \mathcal{N}_i(\xi, \vartheta)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \gamma_j \sigma_k, \quad i = 1, 2$$

$$C_i(\Gamma, \Sigma, \Upsilon, \vartheta) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 \mathcal{N}_i(x, y, \lambda, \mu)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \gamma_j \sigma_k \nu_l, \quad i = 1, 2$$

بیان می‌شوند که

$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T, \Sigma = (\sigma_1, \sigma_2)^T, \Upsilon = (\nu_1, \nu_2)^T.$$

در این حالت داریم:

$$B(\Gamma, \Sigma, \vartheta) = \begin{pmatrix} -2a\gamma_1\sigma_1 - b\gamma_1\sigma_2 - b\gamma_2\sigma_1 \\ d(\gamma_1\sigma_2 + \gamma_2\sigma_1) \end{pmatrix}, \quad C(\Gamma, \Sigma, \Upsilon, \vartheta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

۳- انشعاب هم‌بعد

در این بخش به بررسی انشعابات تبادلی پایداری، فلیپ و نایمارک ساکر پرداخته می‌شود.

قضیه ۱،۳. به‌ازای $a = 1$ انشعاب تبادلی پایداری از نقطه تعادل E_0 وجود دارد.

اثبات: نگاشت (۴) دارای نقطه تعادل با مقدار ویژه ساده $\lambda_1 = +1$ دارد اگر

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\xi, \vartheta) = \xi, \\ \det(J(\xi, \vartheta) - I_2) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

جواب دقیق سیستم (۵) به صورت

$$x = 0, \quad y = 0, \quad a = 1,$$

است. منیفلد مرکزی متناظر با نگاشت (۴) در مقدار بحرانی $a = 1$ به صورت

$$M_{LP}(v) = vv + m_2 v^2 + \mathcal{O}(v^3), \quad M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad m_2 = (m_{21}, m_{22})^T, \quad (6)$$

است که

$$Jv = v, \quad J^T w = w, \quad \langle w, v \rangle = 1,$$

و

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

تجدید نگاشت (۴) به منیفلد مرکزی (۶) را می‌توان به صورت

$$v \mapsto G(v) = v + a_{LP} v^2 + \mathcal{O}(v^3),$$

در نظر گرفت. با استفاده از خاصیت پایایی منیفلد مرکزی ضریب بحرانی a_{LP} به صورت

$$a_{LP} = -1$$

بدست می‌آید. با توجه به این‌که $a_{LP} \neq 0$ و E_0 همواره نقطه تعادل است و از بین نمی‌رود، می‌توان نتیجه گرفت که E_0 تحت انشعاب تبادل پایداری قرار می‌گیرد.

ملاحظه ۲,۳. توجه کنید که a_{LP} ضریب بحرانی انشعاب فلد می‌باشد.

قضیه ۳,۳.

۱. اگر $a = -\frac{d}{c-d+1}$ انشعاب تبادل پایداری از نقطه تعادل E_1 وجود دارد.

۲. اگر $c = \frac{ad-a-d}{a}$ انشعاب تبادل پایداری از نقطه تعادل E_1 وجود دارد.

۳. اگر $d = \frac{(c+1)a}{a-1}$ انشعاب تبادل پایداری از نقطه تعادل E_1 وجود دارد.

اثبات: شبیه به اثبات قضیه ۳ است. ضرایب بحرانی انشعابات این قضیه که برای بررسی شرط ناتباهیدگی به کار می‌روند در جدول ۱ آورده شده‌اند.

جدول ۱: ضرایب بحرانی انشعابات متناظر با قضیه ۳,۳

نقطه تعادل	پارامتر بحرانی	a_{LP}
E_1	$a = -\frac{d}{c-d+1}$	$a_{LP} = (c-d+1)b$
E_1	$c = \frac{ad-a-d}{a}$	$a_{LP} = -\frac{db}{a}$
E_1	$d = \frac{(c+1)a}{a-1}$	$a_{LP} = -\frac{(c+1)b}{a-1}$

قضیه ۴,۳.

۱. اگر $a = 3$ انشعاب فلیپ ناتباهیده از نقطه تعادل E_1 وجود دارد.

۲. اگر $a = -\frac{d}{c-d-1}$ انشعاب فلیپ ناتباهیده از نقطه تعادل E_1 وجود دارد.

۳. اگر $c = \frac{ad+a-d}{a}$ انشعاب فلیپ ناتباهیده از نقطه تعادل E_1 وجود دارد.

۴. اگر $d = \frac{(c-1)a}{a-1}$ انشعاب فلیپ ناتباهیده از نقطه تعادل E_1 وجود دارد.

اثبات: تنها اثبات قسمت ۱ آورده می‌شود و اثبات قسمت‌های دیگر شبیه آن می‌باشند. ضرایب بحرانی انشعابات این قضیه که برای بررسی شرط ناتباهیدگی به کار می‌روند در جدول ۲ آورده شده‌اند.

نگاشت (۴) دارای نقطه تعادل با مقدار ویژه ساده $\lambda_1 = -1$ دارد اگر

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\xi, \vartheta) = \xi, \\ \det(\mathcal{J}(\xi, \vartheta) + I_2) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

جواب دقیق سیستم (۵) به صورت

$$x = \frac{a-1}{a}, \quad y = 0, \quad a = 3,$$

است. منیفلد مرکزی متناظر با نگاشت (۴) در مقدار بحرانی $a = 3$ به صورت

$$M_{PD}(\phi) = v\phi + m_2\phi^2 + m_3\phi^3 + \mathcal{O}(\phi^4),$$

$$M_{PD}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, m_i = (m_{i1}, m_{i2})^T, i = 2, 3, \quad (8)$$

است که

$$Jv = -v, \quad J^T w = -w, \quad \langle w, v \rangle = 1$$

و

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \frac{b}{3c-2d-3} \end{pmatrix}.$$

تحدید نگاشت (۴) به منیفلد مرکزی (۸) در مقدار بحرانی پارامتر $a = 3$ را می‌توان به صورت

$$\phi \mapsto G_{PD} = -\phi + b_{PD}\phi^3 + \mathcal{O}(\phi^4),$$

در نظر گرفت. از پایایی منیفلد مرکزی نتیجه گرفته می‌شود که

$$b_{PD} = 9$$

چون $b_{PD} > 0$ انشعاب فلیپ فوق بحرانی است و سیکل متناوب با دوره تناوب دو که از نقطه ثابت منشعب می‌شود پایدار است.

جدول ۲: ضرایب بحرانی انشعابات متناظر با قضیه ۴،۳

نقطه تعادل	پارامتر بحرانی	b_{PD}
E_1	$a = 3$	$b_{PD} = 9$
E_1	$a = -\frac{d}{c-d-1}$	$b_{PD} = \frac{(c-d-1)^2 b^2 (2c^2 - cd - 2c - d)}{(3c-2d-3)^2}$
E_1	$c = \frac{ad+a-d}{a}$	$b_{PD} = \frac{db^2(a^2d - 3ad - 2a + 2d)}{a^2(-3+a)^2}$
E_1	$d = \frac{(c-1)a}{a-1}$	$b_{PD} = \frac{b^2(c-1)(ca-a-2c)}{(a-1)(a-3)^2}$

قضیه ۵،۳

۱. اگر $a = -\frac{(c-3)d}{c^2 - cd + 4c - d + 3}$ انشعاب فلیپ ناتباهیده از نقطه تعادل E_* وجود دارد.

۲. اگر $d = \frac{a(c^2+4c+3)}{ac+a-c+3}$ انشعاب فلیپ ناتباهیده از نقطه تعادل E_* وجود دارد.

اثبات: شبیه به اثبات قضیه ۱ است. ضرایب بحرانی انشعابات این قضیه که برای بررسی شرط ناتباهیدگی به کار می‌روند در جدول ۳ آورده شده‌اند.

جدول ۳: ضرایب بحرانی انشعابات متناظر با قضیه ۵،۳

نقطه تعادل	پارامتر بحرانی	b_{PD}
E_*	$a = \frac{(c-3)d}{c^2 - cd + 4c - d + 3}$	$b_{PD} = b^2 \frac{2c^5 - 5c^4d + 4c^3d^2 - c^2d^3 + 12c^4 - 16c^3d + 2c^2d^2 + 2cd^3}{(3c-2d+3)^2(5c-4d+9)}$ $b^2 \frac{8c^3 + 22c^2d - 20cd^2 - d^3 - 60c^2 + 72cd + 6d^2 - 90c - 9d}{(3c-2d+3)^2(5c-4d+9)}$
E_*	$d = \frac{a(c^2+4c+3)}{ac+a-c+3}$	$b_{PD} = \frac{(ac^3 + 3ac^2 - 2c^3 + 3ac + a + 10c)(c+3)^2b^2}{(c+1)^2(a-3)^2(ac+a-5c-9)}$

قضیه ۶،۳

۱. روی منحنی

$$t_{NS}: (x, y, a) = \left(\frac{c+1}{d}, -\frac{ac-ad+a+d}{bd}, -\frac{d}{c-d+2} \right),$$

انشعاب ناتباهیده نایمارک-ساگر رخ می‌دهد.

۲. روی منحنی

$$t'_{NS}: (x, y, c) = \left(\frac{c+1}{d}, -\frac{ac-ad+a+d}{bd}, \frac{ad-2a-d}{a} \right),$$

انشعاب ناتباهیده نایمارک-ساگر رخ می‌دهد.

۳. روی منحنی

$$t''_{NS}: (x, y, d) = \left(\frac{c+1}{d}, -\frac{ac-ad+a+d}{bd}, \frac{(c+2)a}{a-1} \right),$$

انشعاب ناتباهیده نایمارک-ساگر رخ می‌دهد.

اثبات: تنها اثبات قسمت اول قضیه بیان می‌شود و اثبات دو قسمت دیگر مشابه اثبات قسمت اول می‌باشد. ضریب اول لیاپانوف متناظر با انشعابات نایمارک-ساگر در جدول ۴ آورده شده‌اند.

نگاشت (۴) دارای نقطه تعادل با یک جفت مقدا ویژه مختلط روی دایره واحد می‌باشد، اگر

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\xi, \vartheta) = \xi, \\ \det(J(\xi, \vartheta)) = 1. \end{cases} \quad (9)$$

جواب دقیق سیستم (۹) به صورت

$$x = \frac{c+1}{d}, \quad y = -\frac{ac-ad+a+d}{bd}, \quad a = \frac{(c+2)a}{a-1},$$

است، که در منحنی t_{NS} صدق می‌کند. برای جلوگیری از پیچیدگی محاسبات در ادامه روند اثبات پارامترهای c ، b و d به صورت

$$b = 1, \quad c = 0.5, \quad d = 3.5,$$

در نظر گرفته می‌شوند. در این حالت نقطه تعادل E_* دارای یک جفت مقدار ویژه مختلط ساده

$$\lambda_{1,2} = 0.2500000000 \pm 0.9682458366 i$$

روی دایره واحد است، که در شرایط غیر رزونانسی صدق می‌کند. منیفلد مرکزی متناظر با نگاشت (۴) در مقدار بحرانی

$$a = -\frac{d}{c-d+2} \quad \text{به صورت}$$

$$M_{NS}(\zeta, \bar{\zeta}) = v\zeta + \bar{\zeta}\bar{v} + \sum_{2 \leq k+l} \frac{1}{(k+l)!} m_{kl} \zeta^k \bar{\zeta}^l, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad m_{kl} \in \mathbb{C}, \quad (10)$$

در نظر گرفته می‌شود که

$$Jv = \lambda_1 v, \quad J^T w = \lambda_2 w, \quad \langle v, w \rangle = 1,$$

و

$$v = \begin{pmatrix} -0.2022599587 + 0.2611164839 i \\ 0.9438798074 \end{pmatrix},$$

$$w = \begin{pmatrix} 1.91485421607575 i \\ 0.529728463478930 + 0.410325903386840 i \end{pmatrix}.$$

نگاشت

$$\zeta \mapsto G_{NS} = e^{i\theta_0} \zeta + d_{NS} \zeta |\zeta|^2 + \mathcal{O}(\zeta^4), \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

تحدید نگاشت (۴) به منیفلد مرکزی (۱۰) است، که $d_{NS} \in \mathbb{C}$ خاصیت پایایی منیفلد مرکزی ایجاب می‌کند که

$$d_{NS} = -0.2598484845 - 3.210859678 i.$$

بنابراین ضریب اول لیاپانوف انشعاب نایمارک-ساکر به صورت

$$c_{NS} = \Re(\lambda_2 d_{NS}) = -3.173863636.$$

چون $c_{NS} < 0$ ، انشعاب نایمارک-ساکر فوق بحرانی است و منحنی بسته پایایی به وجود آمده پایدار می‌باشد.

جدول ۴: ضریب اول لیاپانوف متناظر با انشعاب‌های نایمارک-ساکر قضیه ۳، ۶

پارامترهای ثابت	پارامتر بحرانی	ضریب اول لیاپانوف
$b = 1, c = 0.5, d = 3.5$	$a = 3.5$	$c_{NS} = -3.173863636$
$a = 3.5, b = 1, d = 3.5$	$c = 0.5$	$c_{NS} = -3.173863636$
$a = 3.5, b = 1, c = 0.5$	$d = 3.5$	$c_{NS} = -3.173863636$

۴-انشعابات هم‌بعد

در این بخش به بررسی انشعاب‌های رزونانس‌های قوی ۱:۲، ۱:۳ و ۱:۴ پرداخته می‌شود.

قضیه ۱,۴

۱. انشعاب ناتباهیده رزونانس ۱:۲ از نقطه تعادل E_* وجود دارد اگر

$$a = 5 \frac{d}{d-1}, \quad c = -\frac{9}{5} + \frac{4}{5}d.$$

۲. انشعاب ناتباهیده رزونانس ۱:۲ از نقطه تعادل E_* وجود دارد اگر

$$a = \frac{5c+9}{c+1}, \quad d = \frac{5}{4}c + \frac{9}{4}.$$

۳. انشعاب ناتباهیده رزونانس ۱:۲ از نقطه تعادل E_* وجود دارد اگر

$$c = -\frac{a-9}{a-5}, \quad d = \frac{a}{a-5}.$$

اثبات: این قسمت تنها به اثبات قسمت ۱ پرداخته می‌شود و قسمت‌های دیگر مشابه آن می‌باشند. ضرایب بحرانی برای بررسی ناتباهیدگی انشعاب‌های رزونانس ۱:۲ این قضیه در جدول ۵ آورده شده‌اند.

نگاشت (۴) دارای دو مقدار ویژه حقیقی ۱- است هرگاه

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\xi, \vartheta) - \xi = 0, \\ \det(J(\xi, \vartheta)) = 1, \\ \text{trace}(J(\xi, \vartheta)) = -2. \end{cases} \quad (11)$$

جواب دقیق سیستم جبری (۱۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$x = \frac{c+1}{d}, \quad y = -\frac{ac-ad+a+d}{bd}, \quad a = 5 \frac{d}{d-1}, \quad c = -\frac{9}{5} + \frac{4}{5}d.$$

منفیلد مرکزی متناظر با نگاشت (۴) به‌ازای پارامترهای بحرانی a و c به صورت

$$M_{R_2}(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 v_0 + \eta_2 v_1 + \sum_{2 \leq j+k \leq 3} \frac{1}{j!k!} m_{jk} \eta_1^j \eta_2^k, \quad (12)$$

که

$$\begin{aligned} Jv_0 &= -v_0, & Jv_1 &= -v_1 + v_0 \\ J^T w_0 &= -w_0, & J^T w_1 &= -w_1 + w_0 \\ \langle w_0, v_1 \rangle &= \langle w_1, v_0 \rangle = 1, & \langle w_0, v_0 \rangle &= \langle w_1, v_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

و

$$v_0 = \begin{pmatrix} -\frac{2(d-1)b}{5} \\ d \\ 1 \end{pmatrix}$$

و v_1 برابر است با

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{5} \frac{16 b^3 d^3 - 48 b^3 d^2 + 40 b^2 d^3 + 48 b^3 d - 80 b^2 d^2 + 225 b d^3 - 16 b^3 + 40 b^2 d - 225 b d^2 + 250 d^3}{d(16 b^2 d^2 - 32 b^2 d + 40 b d^2 + 16 b^2 - 40 b d + 125 d^2)} \\ \frac{8 b^2 d^2 - 16 b^2 d + 10 b d^2 + 8 b^2 - 10 b d + 100 d^2}{16 b^2 d^2 - 32 b^2 d + 40 b d^2 + 16 b^2 - 40 b d + 125 d^2} \end{array} \right)$$

9

$$w_0 = \left(\begin{array}{c} -\frac{16 b^2 d^2 - 32 b^2 d + 40 b d^2 + 16 b^2 - 40 b d + 125 d^2}{4 b^2 d^2 - 8 b^2 d + 5 b d^2 + 4 b^2 - 5 b d + 50 d^2} \\ \frac{2(d-1)b(16 b^2 d^2 - 32 b^2 d + 40 b d^2 + 16 b^2 - 40 b d + 125 d^2)}{5 d(4 b^2 d^2 - 8 b^2 d + 5 b d^2 + 4 b^2 - 5 b d + 50 d^2)} \end{array} \right)$$

$$w_1 = \left(\frac{2}{5} \frac{4 b d - 4 b + 5 d}{d} \right).$$

تجدید نگاشت (۴) به منیفولد مرکزی (۱۲) را می‌توان به صورت

$$\left(\begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \end{array} \right) \mapsto G_{R_2}(\eta) = \left(\begin{array}{c} -\eta_1 + \eta_2 \\ -\eta_2 + C_{R_2} \eta_1^3 + D_{R_2} \eta_1^2 \eta_2 \end{array} \right), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2.$$

نوشت. از پایایی منیفولد مرکزی نتیجه می‌شود که

$$C_{R_2} = -\frac{(16 b^2 d^2 - 32 b^2 d + 40 b d^2 + 16 b^2 - 40 b d + 125 d^2) b^3 (d-1) (12 d^2 - 4 d - 33)}{125 d (4 b^2 d^2 - 8 b^2 d + 5 b d^2 + 4 b^2 - 5 b d + 50 d^2)}$$

$$D_{R_2} = -b^2 \frac{64 b^3 d^5 - 128 b^3 d^4 + 128 b^2 d^5 - 48 b^3 d^3 + 48 b^2 d^4 + 460 b d^5 + 272 b^3 d^2 - 912 b^2 d^3}{25 (4 b^2 d^2 - 8 b^2 d + 5 b d^2 + 4 b^2 - 5 b d + 50 d^2) d}$$

$$-b^2 \frac{220 b d^4 - 400 d^5 - 208 b^3 d + 1168 b^2 d^2 - 1445 b d^3 + 1800 d^4 + 48 b^3 - 432 b^2 d}{25 (4 b^2 d^2 - 8 b^2 d + 5 b d^2 + 4 b^2 - 5 b d + 50 d^2) d}$$

$$-b^2 \frac{765 b d^2 - 3900 d^3}{25 (4 b^2 d^2 - 8 b^2 d + 5 b d^2 + 4 b^2 - 5 b d + 50 d^2) d}.$$

انشعاب رزونانس ۱:۲ ناتباهیده است هر گاه

$$c_{R_2} = 4C_{R_2} \neq 0, \quad d_{R_2} = -2D_{R_2} - 6C_{R_2} \neq 0.$$

جدول ۵: ضرایب بحرانی انشعابات متناظر با قضیه ۱،۴

پارامترهای بحرانی	C_{R_2}	D_{R_2}
a, c	C_{R_2}	D_{R_2}
a, d	C'_{R_2}	D'_{R_2}
c, d	$\frac{1}{2} \frac{b^2 (a^2 + 16 b^2) (a^2 - 14 a + 33)}{(a^2 + 4 b^2) (a - 5)^2}$	$\frac{1}{2} \frac{b^2 (3 a^4 - 50 a^3 - 224 a b^2 + 171 a^2 + 864 b^2)}{(a^2 + 4 b^2) (a - 5)^2}$

قضیه ۲،۴.

۱. انشعاب ناتباهیده رزونانس ۱:۳ از نقطه تعادل E_* وجود دارد اگر

$$a = 4 \frac{d}{d-1}, \quad c = -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}d.$$

۲. انشعاب ناتباهیده رزونانس ۱:۳ از نقطه تعادل E_* وجود دارد اگر

$$a = \frac{4c+7}{c+1}, \quad d = \frac{4}{3}c + \frac{7}{3}.$$

۳. انشعاب ناتباهیده رزونانس ۱:۳ از نقطه تعادل E_* وجود دارد اگر

$$c = -\frac{a-7}{a-4}, \quad d = \frac{a}{a-4}.$$

اثبات: این قسمت تنها به اثبات قسمت ۱ پرداخته می‌شود و قسمت‌های دیگر مشابه آن می‌باشند. ضرایب بحرانی برای بررسی ناتباهیدگی انشعاب‌های رزونانس ۱:۳ این قضیه در جدول ۶ آورده شده‌اند.

نگاشت (۴) دارای دو مقدار ویژه حقیقی ۱- است هرگاه

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\xi, \vartheta) - \xi = 0, \\ \det(J(\xi, \vartheta)) = 1, \end{cases} \quad (13)$$

جواب دقیق سیستم جبری (۱۳) به صورت زیر می‌باشد:

$$x = \frac{c+1}{d}, \quad y = -\frac{ac-ad+a+d}{bd}, \quad a = 4 \frac{d}{d-1}, \quad c = -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}d.$$

منیفلد مرکزی متناظر با نگاشت (۴) به‌ازای پارامترهای بحرانی a و c به صورت

$$M_{R_3}(\zeta, \bar{\zeta}) = v\zeta + \bar{\zeta}\bar{v} + \sum_{2 \leq k+l} \frac{1}{(k+l)!} m_{kl} \zeta^k \bar{\zeta}^l, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad m_{kl} \in \mathbb{C}, \quad (14)$$

در نظر گرفت که

$$Jv = e^{\frac{2\pi i}{3}} v, \quad J^T w = e^{-\frac{2\pi i}{3}} w, \quad \langle w, v \rangle = 1,$$

و

$$v = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \frac{b(d-1)}{d(i\sqrt{3}+3)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \frac{d}{(-1+i\sqrt{3})(d-1)b(i\sqrt{3}-3)} \\ -2(-1+i\sqrt{3})^{-1} \end{pmatrix}.$$

تحدید نگاشت (۴) به منیفلد مرکزی (۱۴) را می‌توان به صورت

$$\zeta \mapsto G_{R_3}(\zeta) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \zeta + B_{R_3} \bar{\zeta}^2 + C_{R_3} \zeta |\zeta|^2 + \mathcal{O}(\zeta^4), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

در نظر گرفت. از پایایی منیفلد مرکزی نتیجه می‌گیریم که

$$B_{R_3} = -\frac{5}{8}b - \frac{3}{8}bd + \frac{i}{8\sqrt{3}b}d - \frac{i}{8\sqrt{3}b},$$

$$C_{R_3} = \frac{7b^2}{16} - \frac{9b^2d}{8} + \frac{3}{16}b^2d^2 + \frac{7i}{8}\sqrt{3}b^2 - \frac{3}{8}i\sqrt{3}b^2d^2.$$

اگر $B_{R_3} \neq 0$

$$C_0 = \Re \left(\frac{1}{3} \left(\frac{e^{\frac{4\pi}{3}i} C_{R_3}}{|B_{R_3}|^2} - 1 \right) \right) = \frac{1 - 39d^2 - 18d - 7}{6(3d^2 + 6d + 7)}.$$

پایداری منحنی بسته پایایی منشعب شده را مشخص می‌کند.

جدول ۶: ضرایب بحرانی انشعابات متناظر با قضیه ۲،۴

پارامترهای بحرانی	B_{R_3}	C_{R_3}
a, c	$\frac{1}{4}bd - \frac{b}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{3}b - \frac{i}{12}\sqrt{3}db$	$-\frac{1}{2}b^2d + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{6}d^2b^2 - \frac{i}{4}\sqrt{3}b^2 + \frac{i}{12}\sqrt{3}b^2d^2$
a, d	$\frac{1}{2}bc + \frac{b}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}b - \frac{i}{6}\sqrt{3}bc$	$b^2c + \frac{1}{2}b^2 + \frac{2}{3}b^2c^2 + \frac{i}{2}\sqrt{3}b^2 + i\sqrt{3}b^2c + \frac{i}{3}\sqrt{3}b^2c^2$
c, d	$-\frac{1}{6} \frac{b(2i\sqrt{3}a - 3i\sqrt{3} - 3)}{a - 2}$	$-\frac{1}{6} \frac{b^2(i\sqrt{3}a^2 - 6i\sqrt{3}a + 6i\sqrt{3} - a^2 + 6a - 12)}{(a - 2)^2}$

قضیه ۳،۴

۱. انشعاب ناتباهیده رزونانس ۱:۴ از نقطه تعادل E_* وجود دارد اگر

$$a = 3 \frac{d}{d-1}, \quad c = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}d.$$

۲. انشعاب ناتباهیده رزونانس ۱:۴ از نقطه تعادل E_* وجود دارد اگر

$$a = \frac{3c+5}{c+1}, \quad d = \frac{3}{2}c + \frac{5}{2}.$$

۳. انشعاب ناتباهیده رزونانس ۱:۴ از نقطه تعادل E_* وجود دارد اگر

$$c = -\frac{a-5}{a-3}, \quad d = \frac{a}{a-3}.$$

اثبات: در این قسمت تنها به اثبات قسمت ۱ پرداخته می‌شود و قسمت‌های دیگر مشابه آن می‌باشند. ضرایب بحرانی برای

بررسی ناتباهیدگی انشعاب‌های رزونانس ۱:۴ این قضیه در جدول ۷ آورده شده‌اند.

نگاشت (۴) دارای یک جفت مقدار ویژه مختلط $e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ است هرگاه

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\xi, \vartheta) - \xi = 0, \\ \det(J(\xi, \vartheta)) = 1, \\ \text{trace}(J(\xi, \vartheta)) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

جواب دقیق سیستم جبری (۱۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$x = \frac{c+1}{d}, \quad y = -\frac{ac-ad+a+d}{bd}, \quad a = 3\frac{d}{d-1}, \quad c = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}d.$$

منفیلد مرکزی متناظر با نگاشت (۴) به‌ازای پارامترهای بحرانی a و c به‌صورت

$$M_{R_4}(\varrho, \bar{\varrho}) = v\varrho + \bar{\varrho}\bar{v} + \sum_{2 \leq k+l} \frac{1}{(k+l)!} m_{kl} \varrho^k \bar{\varrho}^l, \quad \varrho \in \mathbb{C}, \quad m_{kl} \in \mathbb{C}, \quad (16)$$

در نظر گرفته می‌شود، که

$$Jv = e^{\frac{\pi}{2}i}v, \quad J^T w = e^{\frac{\pi}{2}i}w, \quad \langle w, v \rangle = 1,$$

و

$$v = \begin{pmatrix} \left(\left(-\frac{1}{3} + \frac{i}{3} \right) b(d-1) \right) \\ d \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}id \\ (d-1)b \\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

تحدید نگاشت (۴) به منفیلد مرکزی (۱۶) را می‌توان به‌فرم

$$\varrho \mapsto G_{R_4}(\varrho) = i\varrho + C_{R_4}\varrho^2\bar{\varrho} + D_{R_4}\bar{\varrho}^3 + \mathcal{O}(\varrho^5), \quad \varrho \in \mathbb{C}. \quad (17)$$

نوشت. از خاصیت پایایی منفیلد مرکزی می‌توان نتیجه گرفت که

$$C_{R_4} = -db^2 - 2b^2 - \frac{4}{3}idb^2 - \frac{i}{3b^2d^2} + \frac{i}{6b^2},$$

$$D_{R_4} = \frac{1}{9}db^2 - \frac{13b^2}{18} + \frac{1}{9}d^2b^2 + \frac{2}{3}idb^2 + \frac{i}{3b^2}.$$

اگر

$$|A_0| = \left| -\frac{iC_{R_4}}{|D_{R_4}|} \right| > 1,$$

در نقطه R_4 دو منحنی فلد تکرار چهارم وجود خواهد داشت.

جدول ۷: ضرایب بحرانی انشعاب‌های متناظر با قضیه ۳،۴

پارامترهای بحرانی	C_{R_4}	D_{R_4}
a, c	$-db^2 - 2b^2 - \frac{4}{3}idb^2 - \frac{i}{3}b^2d^2 + \frac{i}{6}b^2$	$\frac{1}{9}db^2 - \frac{13b^2}{18} + \frac{1}{9}d^2b^2 + \frac{2}{3}idb$
a, d	$-\frac{3}{2}b^2c - \frac{9}{2}b^2 - \frac{9}{2}ib^2c - \frac{21i}{4}b^2 - \frac{3}{4}ib^2c^2$	$b^2c + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + ib^2c + 2ib^2$
c, d	$-\frac{3}{2} \frac{b^2(ia^2 - 2ia + 2a^2 + 12 - i - 10a)}{(a-3)^2}$	$\frac{1}{2} \frac{b^2(2ia^2 - 8ia - a^2 - 13 + 6i + 8a)}{(a-3)^2}$

ملاحظه ۴،۴. در این قسمت ضرایب C'_{R_2} و D'_{R_2} مربوط به جدول ۵ آورده شده‌اند.

$$C'_{R_2} = \frac{C''_{R_2}}{C'''_{R_2}}, \quad D'_{R_2} = \frac{D''_{R_2}}{D'''_{R_2}}$$

که

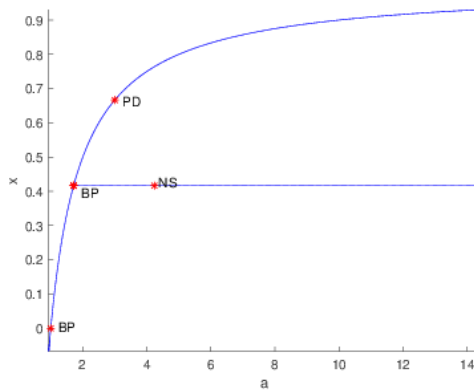
$$\begin{aligned}
C''_{R_2} &= -48 b^5 c^5 - 304 b^5 c^4 - 120 b^4 c^5 - 672 b^5 c^3 - 856 b^4 c^4 - 375 b^3 c^5 \\
&\quad - 672 b^5 c^2 - 2192 b^4 c^3 - 2975 b^3 c^4 - 304 b^5 c - 2512 b^4 c^2 \\
&\quad - 8690 b^3 c^3 - 48 b^5 - 1272 b^4 c - 11490 b^3 c^2 - 216 - 6615 b^3 c \\
&\quad - 1215 b^3, \\
C'''_{R_2} &= 80 b^2 c^3 + 304 b^2 c^2 + 100 b c^3 + 368 b^2 c + 460 b c^2 + 1000 c^3 + 144 b^2 \\
&\quad + 684 b c + 5400 c^2 + 324 b + 9720 c + 5832, \\
D''_{R_2} &= -80 b^5 c^5 - 592 b^5 c^4 - 160 b^4 c^5 - 1632 b^5 c^3 - 1488 b^4 c^4 - 575 b^3 c^5 \\
&\quad - 2144 b^5 c^2 - 4800 b^4 c^3 - 5395 b^3 c^4 + 500 b^2 c^5 - 1360 b^5 c \\
&\quad - 7072 b^4 c^2 - 19058 b^3 c^3 + 2700 b^2 c^4 - 336 b^5 - 4896 b^4 c \\
&\quad - 32058 b^3 c^2 + 6360 b^2 c^3 - 1296 b^4 - 25839 b^3 c + 11016 b^2 c^2 \\
&\quad - 8019 b^3 + 14580 b^2 c + 8748 b^2, \\
D'''_{R_2} &= 80 b^2 c^3 + 304 b^2 c^2 + 100 b c^3 + 368 b^2 c + 460 b c^2 + 1000 c^3 + 144 b^2 \\
&\quad + 684 b c + 5400 c^2 + 324 b + 9720 c + 5832.
\end{aligned}$$

۵- شبیه سازی و امتداد عددی

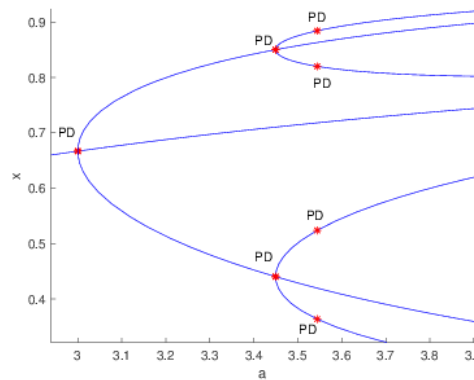
در این بخش به منظور تایید نتایج تحلیلی بدست آمده در بخش های قبل و همچنین با هدف کشف دینامیک بیشتری از سیستم (۱) در تکرار های بالاتر به کمک شبیه سازی عددی برخی نمودار ها را ارائه می دهیم. در این بخش از جعبه ابزار متکونتام که جعبه ابزاری از نرم افزار متلب است استفاده می کنیم، برای جزئیات بیشتر به [۲۵] مراجعه کنید.

فرض می کنیم $c = 0.2$ و $a = 4.1$ رفتار دینامیکی سیستم (۱) و رخ دادن انشعاب نایمارک ساکر با تغییر پارامتر d و رفتار سیستم قبل و بعد از این انشعاب را می توان در شکل ۵ مشاهده کرد. همچنین با روش امتداد عددی و شروع از نقطه ثابت E_* و تغییر پارامتر a وقوع انشعاب های نقطه تبادل پایداری (BP)، نایمارک ساکر (NS) و انشعاب فلیپ (PD) در شکل ۱ قابل مشاهده است. با انتخاب نقطه (PD) و امتداد عددی آن آبشار تناوب های دو در تکرار های دوم و چهارم در شکل ۲ رسم شده است. با توجه به این که ضریب رزونانس ۴:۱ بزرگتر از یک است در شکل ۳ خم های انشعاب نایمارک ساکر، خم فلد، خم فلیپ و... در تکرار های بالاتر از سیستم ترسیم شده اند. شکل ۴ وجود خم زینی خنثی را در نقطه رزونانس ۳:۱ نمایش می دهد. در شکل ۶ فضای فاز و وقوع انشعاب نایمارک-ساکر برای مجموعه پارامتر $a = 3.4, c = 0.2, d = 3.05$ آورده شده است.

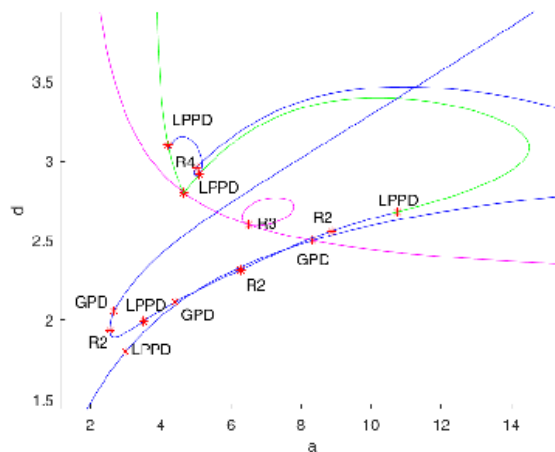
ملاحظه ۱،۵. حداکثر نمایه لیاپانوف محاسبه و در شکل ۷ نشان داده شده اند که وجود مجموعه های آشوبناک را برای $d \geq 3.23$ و $d \geq 3.75$ تایید می کنند. به طور کلی، نمایه مثبت لیاپانوف یکی از ویژگی هایی است که دلالت بر وجود آشوب دارد.



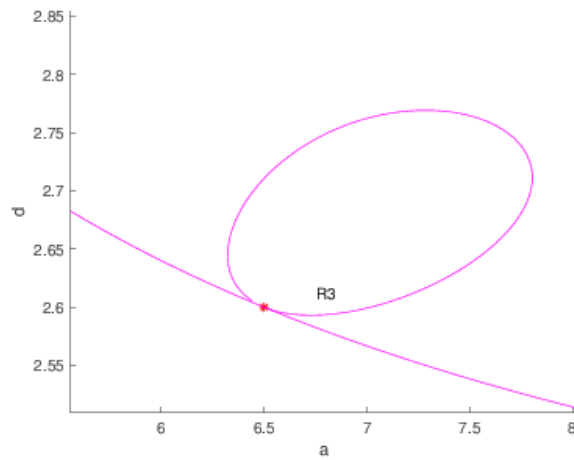
شکل ۱: خم نقاط تعادل مدل (۱) نقاط تبادل پایداری (BP) ، نقطه انشعاب نایمارک ساکر (NS) و نقطه انشعاب فلیپ (PD)



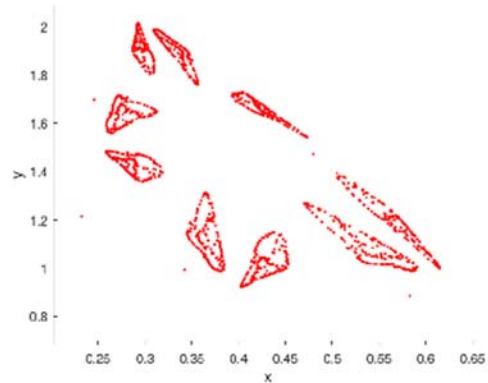
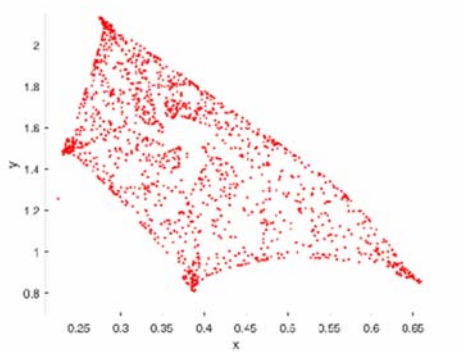
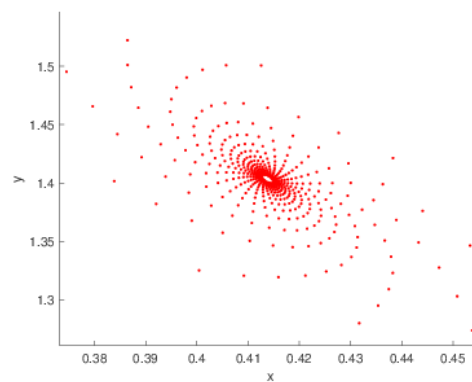
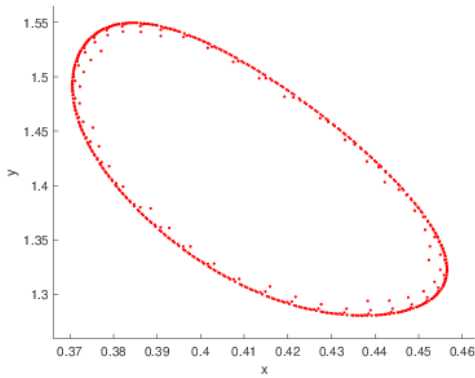
شکل ۲: آبشار تناوب‌های دو در تکرارهای اول و دوم از مدل (۱)



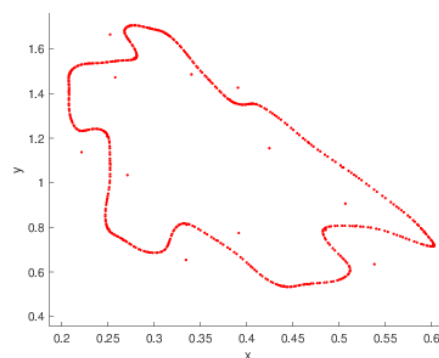
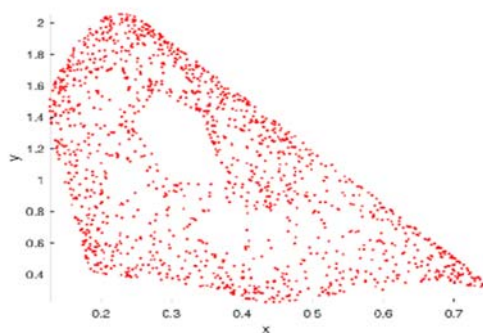
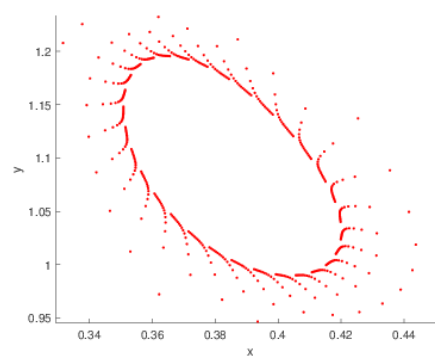
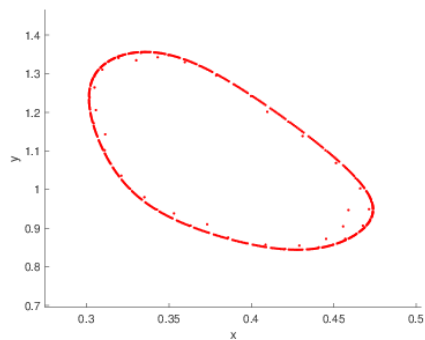
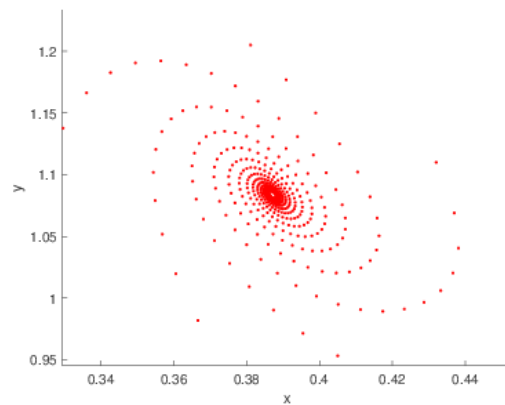
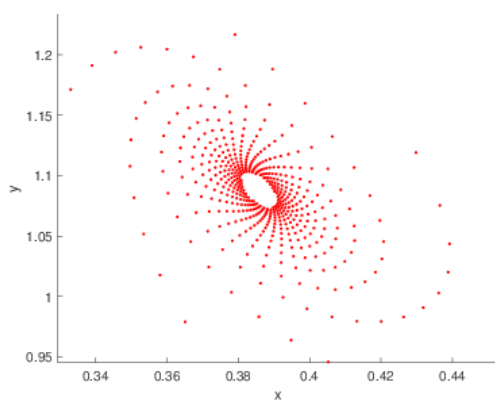
شکل ۳: خم‌های نایمارک-ساکر (صورتی)، فلیپ (آبی)، فولد (سبز) متناظر تکرارهای اول تا چهارم از مدل (۱) شامل نقاط انشعاب رزونانس (R2)، رزونانس سه (R3)، رزونانس چهار (R4)، فولد-فلیپ (LPPD) و فلیپ-تعمیم یافته (GPD)



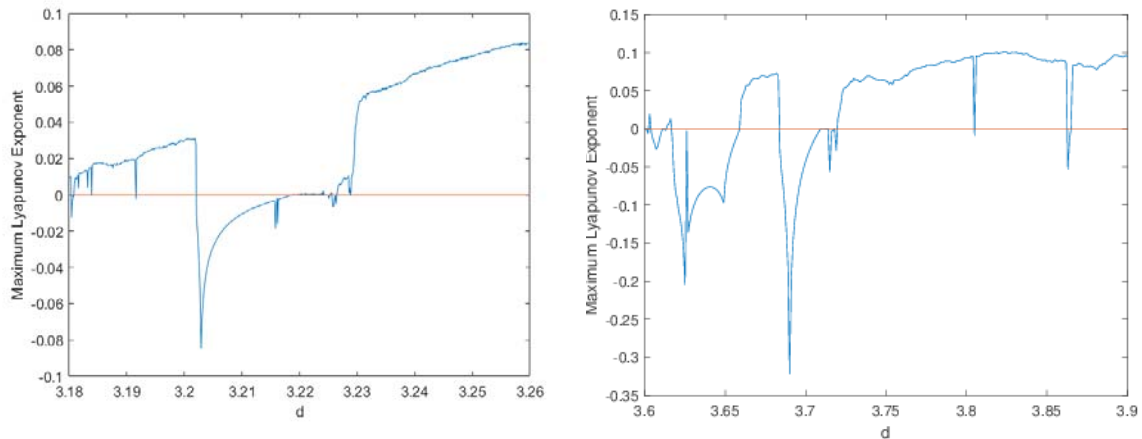
شکل ۴: خم زینی خنثی در تکرار سوم نگاشت (۱)



شکل ۵: فضای فاز سیستم (۱) برای مقادیر پارامتر $a = 4.1, c = 0.2$ (آ) جاذب قبل از انشعاب برای $d = 2.9$ (ب) ایجاد خم پایایی بسته بعد از انشعاب نایمارک ساگر در $d = 2.93$ (ج) نابودی خم پایایی بسته و ایجاد جاذب‌های مختلف برای $d = 3.19$ (د) آشوب برای $d = 3.24$



شکل ۶: فضای فاز سیستم (۱) برای مقادیر پارامتر $a = 3.4, c = 0.2$ (آ) جاذب قیل از انشعاب برای $d = 3.1$ (ب) نقطه انشعاب نایمارک ساگر در $d = 3.11$ (ج و د) ایجاد خم پایای بسته بعد از انشعاب نایمارک ساگر در $d = 3.2, d = 3.13$ (ه) نابودی خم پایای بسته برای $d = 3.5$ (و) آشوب برای $d = 3.8$



شکل ۷: حداکثر نمایه لیاپانف (آ) مربوط به شکل ۵ (ب) مربوط به شکل ۶

References

1. J. Ren, L. Yu, and S. Siegmund, Bifurcations and chaos in a discrete predator–prey model with Crowley–Martin functional response, *Nonlinear Dyn.* **90** (2017), 427–446.
2. G. P. Neverova, O. L. Zhdanova, E. Bapan Ghosh and Ya. Frisman, Dynamics of a discrete-time stage-structured predator–prey system with Holling type II response function, *Nonlinear Dyn.* **98** (2019), 427–446.
3. X. Liu, and C. Wang, Bifurcation of a predator–prey model with disease in the prey, *Nonlinear Dyn.* **62** (2010), 841–850.
4. U. Saeed, I. Ali, and Q. Din, Neimark–Sacker bifurcation and chaos control in discrete-time predator–prey model with parasites, *Nonlinear Dyn.* **94** (2018), 2527–2536.
5. J. Maynard Smith, *Mathematical Ideas in Biology*, Cambridge University Press. 1968.
6. R. J. Sacker and H. F. Von Bremen, A new approach to cycling in a 2-locus 2-allele genetic model, *J. Difference. Equ. Appl.* **95** (2003), 441–448.
7. D. Summers, C. Justian and H. Brian, Chaos in periodically forced discrete-time ecosystem models, *Chaos. Soliton. Fract.* **11** (2000), 2331–2342.
8. M. Danca, S. Codreanu and B. Bako, Detailed analysis of a nonlinear prey-predator model, *J. Biol. Phys.* **23** (1997), 11–20.
9. S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer-Verlag, New York. **2** (2003).
10. S. N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer-Verlag, New York. 1996.
11. A. Q. Khan, Neimark-Sacker Bifurcation of a Two-dimensional Discrete-Time Predator-Prey

Model, *SpringerPlus*. 2016.

12. S. Kartal, Mathematical modeling and analysis of tumor-immune system interaction by using Lotka-Volterra predator-prey like model with piecewise constant arguments, *Period. Eng. Natural. Sci.* **2** (2014), 7-12.

13. Q. Din, Complexity and chaos control in a discrete-time prey-predator model, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* **49** (2017), 113-134.

14. Q. Din, A novel chaos control strategy for discrete-time Brusselator models, *J. Math. Chem.* **56** (2018), 3045-3075.

15. Q. Din and M. Hussain, Controlling chaos and Neimark-Sacker bifurcation in a host-parasitoid model, *Asian. J. Control.* **21** (2019), 1-14.

16. J. Zhang, T. Deng, Y. Chu, S. Qin, W. Du and H. Luo, Stability and bifurcation analysis of a discrete predator-prey model with Holling type III functional response, *J. Nonlinear. Sci. Appl.* **9** (2016), 6228-6243.

17. H. N. Agiza and E. M. Elabbassy, Chaotic dynamics of a discrete prey-predator model with Holling type II, *Nonlinear. Anal. Real.* **10** (2009), 19-41.

18. Q. Fang, X. Li and M. Cao, Dynamics of a discrete predator-prey system with Beddington-DeAngelis function response, *Appl. Math.* **3** (2012), 389-394.

19. A. N. W. Hone, M. V. Irlé and G. W. Thurura, On the Neimark-Sacker bifurcation in a discrete predator-prey system, *J. Biol. Dyn.* **4**, (2010), 594-606.

20. K. Murakami, Stability and bifurcation in a discrete-time predator-prey model, *J. Differ. Equ. Appl.* **13**, (2007), 911-925.

21. He, Zhimin, and Xin Lai. Bifurcation and chaotic behavior of a discrete-time predator-prey system, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **12.1** (2011): 403-417.

22. Chen, Xian-wei, Xiang-ling Fu, and Zhu-jun Jing, Dynamics in a discrete-time predator-prey system with Allee effect, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* **29** (2013), 143-164.

23. Zhao, Ming, Zuxing Xuan, and Cuiping Li. Dynamics of a discrete-time predator-prey system, *Advances in Difference Equations* (2016), 191.

24. Y. A. Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory. *Springer Science and Business Media.* **112** (2013).

25. W. Govaerts, R. K. Ghaziani, Y. A. Kuznetsov and H. G. Meijer, Numerical methods for two-parameter local bifurcation analysis of maps. *SIAM journal on scientific computing*, **29**(6) (2007), 2644-2667.