Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Common fixed points for multi-valued mappings by applying inequalities on binomials and trinomials

Hojjat Afshari[1] ✉, Mohsen Abdolhosseinzadeh[2], Monireh Nosrati Sahlan[3]

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, University of Bonab, Bonab, Iran.

✉ E-mail: hojat.afshari@ubonab.ac.ir

2. Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, University of Bonab, Bonab, Iran.

E-mail: mohsen.ab@ubonab.ac.ir

3. Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, University of Bonab, Bonab, Iran.

E-mail: nosrati@ubonab.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
12 October 2020
Revised form:
6 December 2020
Accepted:
22 December 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:

Hausdorff metric; Complete metric space; Common fixed point; Multi-valued mappings; Topological space.

ABSTRACT

Introduction

Fixed point theory has fascinated many researchers since 1922 with the celebrated Banach fixed point theorem. There exists a vast literature on the topic field and this is a very active field of research at present. Fixed point theorems are very important tools for proving the existence and uniqueness of the solutions to various mathematical models (integral and partial equations, variational inequalities, etc). Its core subject is concerned with the conditions for the existence of one or more fixed points of a mapping or multi-valued mapping T from a topological space X into itself that is, we can find $x \in X$ such that $Tx = x$ (for mapping) or $x \in Tx$ (for multi-valued mapping).

In a wide range of mathematical, computational, economic, modeling, and engineering problems, the existence of a solution to a theoretical or real-world problem is equivalent to the existence of a fixed point for a suitable map or operator. Fixed points are therefore of paramount importance in many areas of mathematics, sciences, and engineering.

In 1922 Stefan Banach proved a famous theorem which under suitable conditions stated the existence and uniqueness of a mapping. The result of the fixed point theorem or Banach contraction principle was obtained by Stefan Banach.

In 1985, V. Popa proved common fixed point theorems for multi-valued mappings that verify rational inequalities, which contain the Hausdorff metric in their expressions.

In 2010, A. Petcu proved other common fixed point theorems for two or more multi-valued mappings without using the Hausdorff metric.

In this paper, by using some completely different conditions, we study the existence of common fixed points for multi-valued mappings with applying inequalities on binomials and trinomials.

Material and methods

The content of this paper is organized as follows. First, we present some definitions, lemmas, and basic results that will be used in the proofs of our theorems. Then, we study the existence of common fixed points for multi-valued mappings by applying inequalities on binomials and trinomials.

Results and discussion

Let F be all multi-valued mappings of X into $Pb,cl(X)$. First, we define an equivalence relation for the elements of F as follows;

$$F \sim G \text{ if and only if } \text{fix}F = \text{fix}G, \quad (F,G \in F).$$

Where $\text{fix}F = \{x \in X: x \in Fx\}$.

Denote the equivalence class of F by $\tilde{F}$, and define it as follows:

$\tilde{F} = \frac{F}{\sim} = \{\tilde{F}: F \in \mathcal{F}\}$. Also define $\tilde{d}$ on $\tilde{F}$ with $\tilde{d}(\tilde{F},\tilde{G}) = H(fixF, fixG)$.

$(\tilde{F},\tilde{d})$ is a metric space. In this article, by considering some conditions on the maps F and G in complete metric space we conclude that $\tilde{F} = \tilde{G}$.

Conclusion

The well known Banach contraction principle ensures the existence and uniqueness of the fixed point of a contraction on a complete metric space. After this interesting principle, several authors generalized this principle by introducing the various contractions on metric spaces. Thereafter, Popa and Petcu obtained some results in about common fixed points of multi-valued mappings. This paper studies the existence of common fixed points for multi-valued mappings by applying inequalities on binomials and trinomials and using different conditions.

How to cite: Afshari, H., Abdolhosseinzadeh, M., Nosrati Sahlan, M; (2022) Common fixed points for multi-valued mappings by applying inequalities on binomials and trinomials. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-11

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نقاط ثابت مشترک برای نگاشت‌های چند مقداری با به کاربردن نامساوی‌هایی روی دوجمله‌ای‌ها و سه‌جمله‌ای‌ها

حجت افشاری[۱] ✉، محسن عبدالحسین‌زاده[۲]، منیره نصرتی سهلان

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه بناب، بناب، ایران. پست الکترونیکی: hojat.afshari@ubonab.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه بناب، بناب، ایران. پست الکترونیکی: mohsen.ab@ubonab.ac.ir

۳. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه بناب، بناب، ایران. پست الکترونیکی: nosrati@ubonab.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۹/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:
نقطه ثابت،
نگاشت‌های چند مقداری،
نامساوی‌های کسری.

چکیده

پوپا قضایای نقطه ثابت مشترک را برای نگاشت‌های چند مقداری اثبات کرد به طوری که در نامساوی‌های کسری صدق می‌کنند، و در فضای متری هاسدورف تعریف می‌شوند. پتکو قضایای نقطه ثابت دیگری را برای دو یا تعداد بیشتری از نگاشت‌های چند مقداری بدون استفاده از متر هاسدورف اثبات کرد. در این مقاله با در نظر گرفتن شرایط کاملاً متفاوت وجود نقاط ثابت را برای نگاشت‌های چند مقداری بررسی خواهیم کرد.

استناد: افشاری، حجت؛ عبدالحسین‌زاده، محسن؛ نصرتی سهلان، منیره؛ (۱۴۰۱). نقاط ثابت مشترک برای نگاشت‌های چند مقداری با به کاربردن نامساوی‌هایی روی دوجمله‌ای‌ها و سه‌جمله‌ای‌ها. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۱-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

نظریهٔ نقطهٔ ثابت یکی از ابزارهای جدید و قدرتمند در آنالیز غیرخطی است. موضوع اصلی این نظریه بررسی شرایطی جهت اثبات وجود یک یا تعداد بیشتری از نقاط ثابت برای یک نگاشت (چند مقداری) T از فضای توپولوژیک مانند X به داخل خودش است در واقع هدف یافتن $x \in X$ است به طوری که $Tx = x$ (برای یک نگاشت معمولی)، و یا $x \in Tx$ (برای یک نگاشت چند مقداری) برقرار باشد.

در سال ۱۹۲۲، ریاضیدان لهستانی، استفان باناخ [۴]، قضیه‌ای را اثبات کرد که تحت شرایط مناسب، وجود و منحصر به فرد بودن نقطه ثابت یک تابع را ارائه می‌داد. این نتیجهٔ به دست آمده توسط باناخ را قضیه نقطه ثابت باناخ یا اصل انقباض باناخ می‌نامند. این قضیه همچنین برای نشان دادن وجود و منحصر به فردی راه حل‌ها اعمال می‌شود.

معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و بسیاری دیگر از مسائل ریاضیات کاربردی به کمک نقطه ثابت باناخ حل می‌شوند. بسیاری از نویسندگان [۱,۲,۳,۵,۱۱] قضیهٔ ثابت مذکور را تعمیم و بهبود داده‌اند. همچنین قضیهٔ مذکور، در سال ۱۹۶۹ توسط نادلر [۶] به توابع چند مقداری تعمیم داده شد. در سال ۱۹۸۷ پوپا [۱۰] قضایایی از نقطه ثابت را برای توابع چند مقداری که در نامساوی های کسری صدق می‌کنند با استفاده از متر هاسدورف ثابت کرد. پتکو [۷,۸,۹] قضایایی از نقاط ثابت مشترک را در این زمینه بدون استفاده از متر هاسدورف ثابت کرد. در این مقاله مولفان با در نظر گرفتن نامساوی‌هایی روی دوجمله‌ای‌ها و سه‌جمله‌ای‌ها و با بهره‌گیری از حل و بحث جواب‌های معادلات درجهٔ دوم و سوم وجود نقاط ثابت مشترک برای دو چند تابعی را بررسی می‌کنند.

۲. تعاریف و مفاهیم مقدماتی

فرض کنید X مجموعه‌ای غیرتهی، $P(X)$ مجموعه تمامی زیرمجموعه‌های غیرتهی X، T یک تابع چند مقداری از X به $P(X)$ باشند، در این صورت $F(T)$ مجموعه نقاط ثابت T به صورت $F(T) = \{x \in X: x \in Tx\}$ تعریف می‌شود. در این مقاله، برای یک فضای توپولوژیک X مجموعه تمامی زیرمجموعه‌های بسته X را با $P_{cl}(X)$، و هرگاه X یک فضای متری باشد، مجموعهٔ تمامی زیرمجموعه‌های بسته و کراندار X را با $P_{b,cl}(X)$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد، که به ازای هر $x \in X$ و $A, B \subseteq X$، داریم

$$D(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) \quad \text{و} \quad H(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} D(x, B), \sup_{y \in B} D(y, A)\right\}.$$

همچنین، قرار دهید: $\delta(A, B) = \sup\{d(a, b): a \in A, b \in B\}$.

در این صورت H یک متر روی زیرمجموعه‌های بسته و کراندار X می‌باشد، که آن را متر هاسدورف می‌نامند.

۳. نقاط ثابت مشترک برای نگاشت‌های چند مقداری با به‌کاربردن نامساوی‌هایی روی چندجمله‌ای-های درجه سوم

قرار دهید $\mathcal{F}$ مجموعهٔ تمام نگاشت‌های چند مقداری از X به $P_{b,cl}(X)$ باشد. رابطهٔ هم ارزی برای اعضای $\mathcal{F}$ مانند F و G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$F \sim G$ اگر و تنها اگر $fixF = fixG$.

کلاس هم ارزی روی $\mathcal{F}$ را با $\widetilde{\mathcal{F}}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{F}}{\sim} = \{\tilde{F} : F \in \mathcal{F}\}.$$

به همین ترتیب می‌توان $\tilde{d}$ روی $\widetilde{\mathcal{F}}$ را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{d}(\tilde{F}, \tilde{G}) = H(fixF, fixG).$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $(\widetilde{\mathcal{F}}, \tilde{d})$ یک فضای متری است.

لم ۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متری و $S, T: X \to P_{b,cl}(X)$ دو نگاشت چند مقداری باشند، به طوری که به ازای هر $x \in X$ و هر $y \in Sx$ (یا $y \in Tx$)، $z \in Ty$ (یا به ترتیب $z \in Sy$) وجود دارد به طوری که:

$$d^{3m}(x,y) - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} c^2 d^{2m}(y,z) d(x,y) - \frac{c^3}{8} d^{3m}(y,z) \geq 0. \qquad (۳,۱)$$

که در آن $m \geq 1$، $c > 1$ و $F(S) \neq \emptyset$ و $F(T) \neq \emptyset$. در این صورت $\tilde{S} = \tilde{T}$.

اثبات: فرض کنید $u \in F(S)$، در نتیجه $u \in Su$. بنابراین $z \in Tu$ وجود دارد و (۳,۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$d^3(u,u) - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} c^2 d^2(u,z) d(u,u) - \frac{c^3}{8} d^3(u,z) \geq 0$$

از آنجا که $-\frac{c^3}{8} d^3(u,z) \geq 0$ و $c > 1$، داریم $d(u,z) = 0$. بنابراین $z = u$ و لذا $u \in Tu$ که نتیجه می‌دهد $F(T) \subset F(S)$.

به طور مشابه می‌توان نشان داد $F(S) \subset F(T)$، در نتیجه $F(T) = F(S)$ و $\tilde{S} = \tilde{T}$.

قرار دهید $V: X \to P_{b,cl}(X)$ و (X, d) فضای متری باشد. خاصیت زیر در ادامه استفاده خواهد شد.

خاصیت ۱. برای هر دنباله همگرای $(x_n)_{n\geq 0}$ از X، به صورت $\lim_{n\to\infty} x_n = x$، که $x_{2n-1} \in Vx_{2n-2}$ (یا $x_{2n} \in Vx_{2n-1}$)، نتیجه می‌شود $x \in Vx$.

قضیهٔ ۱: فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل باشد، و $S,T: X \to P_{b,cl}(X)$ دو نگاشت چند مقداری باشند به طوری که به ازای هر $x \in X$ و $y \in Sx$ (یا $y \in Tx$)، $z \in Ty$ (به ترتیب $z \in Sy$) وجود داشته باشد به طوری که نامساوی (۳,۱) به ازای $m \geq 1$ و $c > 1$ برقرار است. اگر یکی از نگاشت‌های چند مقداری S و T در شرایط خاصیت (۱) صدق کنند، آنگاه $\tilde{S} = \tilde{T}$.

اثبات: قرار دهید $x_0 \in X$ نقطه دلخواهی باشد و $x_1 \in Sx_0$، در این صورت $x_2 \in Tx_1$ به طوری که

$$d^{3m}(x_0,x_1) - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} c^2 d^{2m}(x_1,x_2) d(x_0,x_1) - \frac{c^3}{8} d^{3m}(x_1,x_2) \geq 0.$$

چون S در شرایط خاصیت (۱) صدق می‌کند در نتیجه $u \in Su$. از لم ۱ نتیجه می‌گیریم که $u \in Tu$ و $F(S) = F(T)$، و بنابراین $\tilde{S} = \tilde{T}$.

در ادامه لم ۲ و لم ۳ ارائه می‌شود، که با استفاده از آن‌ها به اثبات قضیه ۲ می‌پردازیم.

لم ۲ [۷]. اگر $A,B \in B(X)$ و $k \in \mathbb{R}$، $k > 1$، آنگاه به ازای هر $a \in A$، $b \in B$ وجود دارد به طوری که $d(a,b) \leq kH(A,B)$.

با استفاده از لم ۲ می‌توان لم ۳ را به صورت زیر نتیجه گرفت.

لم ۳. فرض کنید $k > 1$ و نگاشت‌های چند مقداری $S,T: X \to P_{b,cl}(X)$ داده شده باشند. آنگاه به ازای هر $y \in Sx$ (یا $y \in Tx$)، $z \in Ty$ (به ترتیب $z \in Sy$) موجود است به طوری که

$$d(y,z) \leq kH(Sx,Ty).$$

قضیهٔ ۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $T_1,T_2: X \to P_{b,cl}(X)$

دو نگاشت چند مقداری باشند به طوری که

$$H^m(T_1x, T_2y) \leq \frac{8d^{3m}(x,T_1x)}{c^2\delta^{2m}(y,T_2y) + 6c\delta^m(y,T_2y)\delta^m(x,T_1x) + 8\delta^{2m}(x,T_1x)} \tag{۳,۲}$$

و به ازای هر x و y از X

$$c^2\delta^{2m}(y,T_2y) + 6c\delta^m(y,T_2y)\delta^m(x,T_1x) + 8\delta^{2m}(x,T_1x) \neq 0$$

که در آن $m \geq 1$ و $c > 1$. آنگاه $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2$.

اثبات. با ضرب طرفین نامساوی (۳,۲) در مخرج کسر داریم

$$H^m(T_1x,T_2y)\times\left(c^2\delta^{2m}(y,T_2y)+6c\delta^m(y,T_2y)\delta^m(x,T_1x)+8\delta^{2m}(x,T_1x)\right)$$
$$\le 8d^{3m}(x,T_1x) \qquad (۳,۳)$$

نامساوی (۳,۳) برای هر $x,y\in X$ و به ویژه $y\in T_1x$ برقرار است. فرض کنید $1<c<k^m$. برای $x\in X$ و $y\in T_1x$ با استفاده از لم ۳ نتیجه می‌شود که $z\in T_2y$ وجود دارد به طوری که

$d(y,z)\le kH(T_1x,T_2y)$، و در نتیجه داریم:

$$cd^m(y,z)\left(c^2d^{2m}(y,z)+\frac{6c}{\sqrt[3]{4}}d^m(y,z)d^m(x,y)\right)\le 8d^3(x,y).$$

بنابراین به ازای هر $x\in X$ و هر $y\in T_1x$، $z\in T_2y$ وجود دارد به طوری که

$$d^{3m}(x,y)-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}cd^{2m}(y,z)d(x,y)-\frac{c^3}{8}d^{3m}(y,z)\ge 0$$

که در آن $m\ge 1$ و $1<c<k^m$. نامساوی فوق به شکل نامساوی (۳,۱) است. حال ثابت می‌کنیم که T_1 در شرایط خاصیت (۱) صدق می‌کند. فرض کنید $(x_n)_{n\ge 0}$ دنباله‌ای همگرا از X باشد به طوری‌که $\lim_{n\to\infty}x_n=x\in X$ و

$$x_{2n-1}\in T_1x_{2n-2} \text{ و } x_{2n}\in T_2x_{2n-1}.$$

داریم

$$d(T_1x,x_{2n})\le H(T_1x,T_2x_{2n-1}).$$

به طور مشابه از (۳,۳) می‌توانیم بنویسیم

$$d^m(T_1x,x_{2n})\left(c^2d^{2m}(x_{2n-1},x_{2n})+6cd^m(x_{2n-1},x_{2n})d^m(x_{2n},T_1x)+\right.$$
$$\left.8d(x_{2n},T_1x)\right)\le 8d^{3m}(x_{2n},T_1x)$$

از آن‌جا وقتی $n\to\infty$، نتیجه می‌شود

$$d(x,T_1x)\le\frac{1}{c}d(x,T_1x).$$

بنابراین $d(x,T_1x)=0$. چون T_1x یک مجموعه بسته است نتیجه می‌گیریم $x\in T_1x$ و از قضیه ۲ و لم ۳ نتیجه می‌گیریم که $F(T_1)=F(T_2)$، و $\tilde{T}_1=\tilde{T}_2$.

۴. نقاط ثابت مشترک برای نگاشت‌های چند مقداری با به کاربردن نامساوی‌هایی روی چندجمله‌ای-های درجه دوم

لم ۴. فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $S,T:X\to P_{b,cl}(X)$ دو نگاشت چند مقداری باشند، به طوری که به ازای هر $x\in X$ و هر $y\in Sx$ (یا $y\in Tx$)، $z\in Ty$ (یا به ترتیب $z\in Sy$) وجود دارد به طوری که:

$$(1-c)d^{2m}(y,z)+d^m(y,z)d(x,y)-cd^{2m}(x,y)\leq 0. \qquad (۴,۱)$$

که در آن $m\geq 1$، $c>1$ و $F(S)\neq\emptyset$. در این صورت $F(T)\neq\emptyset$ و $\tilde{S}=\tilde{T}$.

اثبات: فرض کنید $u\in F(S)$، در نتیجه $u\in Su$. بنابراین $z\in Tu$ وجود دارد و (۴,۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$(1-c)d^{2m}(u,z)+d^m(u,z)d(u,u)-cd^{2m}(u,u)\leq 0.$$

از آن‌جا که $(1-c)d^{2m}(u,z)\leq 0$ و $c>1$، داریم $d(u,z)=0$. بنابراین $z=u$، لذا $u\in Tu$ که نتیجه می‌دهد $F(T)\subset F(S)$.

به طور مشابه می‌توان نشان داد $F(S)\subset F(T)$، در نتیجه $F(T)=F(S)$ و $\tilde{S}=\tilde{T}$.

قضیهٔ ۳: فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل باشد، و $S,T:X\to P_{b,cl}(X)$ دو نگاشت چند مقداری باشند به طوری که به ازای هر $x\in X$ و $y\in Sx$ (یا $y\in Tx$)، $z\in Ty$ (به ترتیب $z\in Sy$) وجود داشته باشد که نامساوی (۴,۱) به ازای $m\geq 1$ و $c>1$ برقرار است. اگر یکی از نگاشت‌های چند مقداری S و T در شرایط خاصیت (۱) صدق کنند، آن‌گاه $\tilde{S}=\tilde{T}$.

اثبات: قرار دهید $x_0\in X$ نقطه دلخواهی باشد و $x_1\in Sx_0$، در این صورت $x_2\in Tx_1$ به طوری که

$$(1-c)d^{2m}(x_1,x_2)+d^m(x_0,x_1)d^m(x_1,x_2)-cd^{2m}(x_0,x_1)\leq 0.$$

ازاین‌رو $x_3\in Sx_2$ وجود دارد به طوری که

$$(1-c)d^{2m}(x_2,x_3)+d^m(x_1,x_2)d^m(x_2,x_3)-cd^{2m}(x_1,x_2)\leq 0.$$

با ادامه این روند دنباله $x_0,x_1,\ x_2,x_3,\dots x_{n-1},x_{n-2},\dots$ به دست می‌آید به طوری که

$x_{2n-1}\in Sx_{2n-2}$ و $x_{2n}\in Tx_{2n-1}$ و به ازای هر $n\geq 1$ رابطه زیر برقرار است:

$$(1-c)d^{2m}(x_n,x_{n+1})+d^m(x_{n-1},x_n)d^m(x_n,x_{n+1})-cd^{2m}(x_{n-1},x_n)\leq 0 \qquad (۴,۲)$$

عبارت سمت چپ نامساوی (۴,۲) یک معادله درجه دوم با متغیر $d^m(x_n,x_{n+1})$ و با مبین زیر است:

$$\Delta= d^{2m}(x_{n-1},x_n)+4(1-c)d^{2m}(x_{n-1},x_n)=(1+4c-4c^2)d^{2m}(x_{n-1},x_n)>0.$$

بنابراین نامساوی (۴,۲) زمانی برقرار است که $d^m(x_n,x_{n+1})$ بین دو ریشه قرار گیرد. از این رو داریم:

$$\frac{-1-\sqrt{1+4c-4c^2}}{2(1-c)}d^m(x_{n-1},x_n)\le d^m(x_n,x_{n+1})\le\frac{-1-\sqrt{1+4c-4c^2}}{2(1-c)}d^m(x_{n-1},x_n).$$

به آسانی دیده می‌شود که $k=\frac{-1-\sqrt{1+4c-4c^2}}{2(1-c)}<1$ و چون $d(x_n,x_{n+1})\ge 0$ لذا داریم

$$0\le d^m(x_n,x_{n+1})\le k^m d^m(x_{n-1},x_n).$$

در نتیجه به ازای هر $n\ge 1$، $0\le d(x_n,x_{n+1})\le kd(x_{n-1},x_n)$، که رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$d(x_n,x_{n+1})\le k^n d(x_0,x_1).$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که به ازای اعداد طبیعی دلخواه n و p رابطه زیر برقرار است:

$$d\left(x_n,x_{n+p}\right)\le\frac{k^n}{1-k}d(x_0,x_1)$$

و این نشان می‌دهد که رابطهٔ $(x_n)_{n\ge0}$ یک دنباله کشی است، چون فضای X کامل است لذا دنباله $(x_n)_{n\ge0}$ همگراست. اگر $u=\lim_{n\to\infty}x_n$ آنگاه $x_{2n-1}\in Sx_{2n-2}$ و با فرض اینکه S در خاصیت (۱) صدق می‌کند، نتیجه می‌گیریم که $u\in Su$. با استفاده از لم ۴ ملاحظه می‌شود که $u\in Tu$، ازاین‌رو $F(S)=F(T)$، و بنابراین $\tilde S=\tilde T$.

قضیه ۴. فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $T_1,T_2\colon X\to P_{b,cl}(X)$

دو نگاشت چند مقداری باشند به طوری که

$$H^m(T_1x,T_2y)\le\frac{d^{2m}(x,T_1x)+d^{2m}(y,T_2y)}{\delta^m(y,T_2y)+\delta^m(x,T_1x)} \tag{۴,۳}$$

و به ازای هر x و y از X، $\delta^m(y,T_2y)+\delta^m(x,T_1x)\ne 0$ که در آن $m\ge1$ و $0<c<1$. آن‌گاه $\tilde T_1=\tilde T_2$.

اثبات. با ضرب طرفین نامساوی (۴,۳) در مخرج کسر داریم

(۴,۴) $H^m(T_1x,T_2y)\times\left(\delta^m(y,T_2y)+\delta^m(x,T_1x)\right)\le c\left(\delta^m(y,T_2y)+\delta^m(x,T_1x)\right)$. نامساوی فوق به ازای هر x,y از X بالاخص برای هر $y\in T_1x$ برقرار است.

قرار می‌دهیم $0<k<c^{\frac{-1}{m}}$. طبق لم ۲ به ازای هر $x\in X$ و هر $y\in T_1x$، $z\in T_2y$ وجود دارد به طوری که

$$d(y,z)\le kH(T_1x,T_2y).$$

هرگاه $n\to\infty$، نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$d(x,T_1x)\le\frac{1}{c}d(x,T_1x).$$

بنابراین $d(x,T_1x)=0$. چون T_1x یک مجموعه بسته است داریم $x\in T_1x$ و از قضیه ۴ و لم ۴ نتیجه می‌گیریم که $F(T_1)=F(T_2)$، و $\tilde{T}_1=\tilde{T}_2$.

از این‌جا داریم

$$d^m(y,z)\times\left(\delta^m(y,T_2y)+\delta^m(x,T_1x)\right)$$

$$\le k^mH^m(T_1x,T_2y)\left(\delta^m(y,T_2y)+\delta^m(x,T_1x)\right)$$

با توجه به (۴،۴) رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$d^m(y,z)\times\left(\delta^m(y,T_2y)+\delta^m(x,T_1x)\right)\le ck^m\left(d^m(y,T_2y)+d^m(x,T_1x)\right)$$

و از آن‌جا

$$d^m(y,z)\times\left(d^m(y,T_2y)+d^m(x,T_1x)\right)\le ck^m\left(d^m(y,T_2y)+d^m(x,T_1x)\right).$$

در نتیجه به ازای هر $x\in X$ و هر $y\in T_1x$، $z\in T_2y$ وجود دارد به طوری که

$$(1-ck^m)d^{2m}(y,z)+d^m(x,y)d^m(y,z)-ck^md^{2m}(x,y)\le 0.$$

که در آن $m\ge 1$ و $0<ck^m<1$.

نشان می‌دهیم T_1 در خاصیت (۱) صدق می‌کند. فرض کنیم $(x_n)_{n\ge 0}$ یک دنباله همگرا در X با $x=\lim_{n\to\infty}x_n$ باشد، و همچنین $x_{2n-1}\in T_1\,x_{2n-2}$ و $x_{2n}\in T_2x_{2n-1}$. داریم

$$d(T_1x,x_{2n})\le kH(T_1x,T_2x_{2n-1}).$$

با استفاده از رابطهٔ (۴،۴) می‌توانیم رابطه زیر را به‌دست آوریم

$$d^m(T_1x,x_{2n})\times\left(\delta^m(x,T_1x)+\delta^m(x_{2n-1},T_1x_{2n-1})\right)$$

$$\le c\left(d^{2m}(x,T_1x)+d^{2m}(x_{2n-1},T_1x_{2n-1})\right)$$

و در نتیجه

$$d^m(T_1x,x_{2n})\times\left(d^m(x,T_1x)+d^m(x_{2n-1},T_1x_{2n})\right)$$

$$\le c\left(d^{2m}(x,T_1x)+d^{2m}(x_{2n-1},T_1x_{2n})\right)$$

از آن‌جا وقتی $n\to\infty$، نتیجه می‌شود $d(T_1x,x)\le cd(x,T_1x)$، لذا $d(T_1x,x)=0$. و چون T_1x بسته است پس $x\in T_1x$. حال با به کار بردن لم ۴ و قضیه ۳ حکم قضیه ثابت می‌شود.

References

1. Afshari H., Aydi H., “On the extended multivalued Suzuki type contractions via a topological property”, Fixed Point Theory, 20 (2), 407-416, 2019.

2. Afshari H., Rezapour S., Shahzad N., “Some results on absolute retractivity of the fixed points set of KS-multifunctions”, Math. Slovaca, 65 (6), 1509-1516, 2015.

3. Alghamdi M.A., Berinde V., Shahzad N., “Fixed points of multivalued nonself almost contractions”, Journal of Applied Mathematics, 2013, Article ID 621614, 6 pages http://dx.doi.org/10.1155/2013/621614.

4. Banach S., Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations, integrals, Fund. Math., 3, 133–181, 1922.

5. Kunze H.E., Torre D. La, and Vrscay E.R., “Contraction multifunctions, fixed point inclusions and iterated multifunction systems”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 330, 159–173, 2007.
6. Nadler S.B., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math., 30, 475–488, 1969.

7. Petcu A., “Common Fixed Points for Multi-functions satisfying a Polynomial Inequality”, Universitatii Petrol-Gas din Ploiesti, Seria Matematica-Informatica-Fizica, LXII, 60-65, 2010.

8. Petcu A., "Theoreme de punct fix pentru multifuncţii (d)-contractive în in spaţii metrice", Bultinul Universitatii Petrol-Gaze din Ploieşti, Seria Matematică-Informatică-Fizică, LVII (2), 1-7, 2005.

9. Petcu A., “Common Fixed Points for d-contractive Multifunctins in metric spaces, Bultinul of Petroleum Gas University of Ploiesti”, Mathematics, Informatics, Physics Series, LX(2), 1-4, 2008.

10. Popa V., “Common fixed points for multifunctions satisfying a rational inequality”, Kobe Journal of Mathematics, 2(1), 23-28, 1985.

11. Rus I.A., “Fixed points Theorems for Multi-valued Mappings in Complete Metric spaces”, Mathematica Japonicae, 20, 21-24, 1975.