Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

The Legendre-Picard Iteration Method for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind

M. Tafakkori-Bafghi [1], **M. Heydari** [2]✉, **G.B. Loghmani** [3]

1. Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran. E-mail: m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir
2. Corresponding Author, Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran.
   ✉ E-mail: m.heydari@yazd.ac.ir
3. Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran. E-mail: loghmani@yazd.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 12 October 2020
Received in revised form: 15 June 2021
Accepted: 23 January 2023
Published online: 29 February 2024

Keywords:
Almost contact structure,
B-metrics,
Natural metric,
Sphere bundle,
Structure tensor.

ABSTRACT

Introduction
The theory and applications of integral equations have been the subject of many researches during the last decades. Fredholm integral equations have been widely used in applied science such as engineering and physics. In recent years, methods based on orthogonal basis functions, including collocation, Tau and Galerkin methods with Jacobi, Legendre and Chebyshev polynomials have attracted the attention of mathematicians. The most important advantage of using orthogonal basis functions is simplifying the mentioned methods by solving a linear/nonlinear algebraic system. But solving algebraic systems is time-consuming, especially in nonlinear problems. This study presents an efficient iterative semi-analytical method by employing the shifted Legendre polynomials for solving the Fredholm integral equations of the second kind.

Material and Methods
The proposed method is based on the Picard iteration method, the shifted Legendre polynomials, and the shifted Legendre-Gauss integration rule. According to the orthogonal property of Legendre polynomials, the proposed method uses an iterative scheme to update the coefficients of the series of approximate solution. Also, a vector-matrix form is introduced to increase the efficiency and reduce the computational time. The numerical results clearly indicate the feasibility and the accuracy of the proposed technique.

Results and discussion
In order to examine the validity of the proposed method, we employed it to find the numerical solution of several Fredholm integral equations of the second kind. The results for six examples are reported in this section. Also, a comparison study between the proposed iterative method and other existing methods is provided. The obtained numerical results show the accuracy and efficiency of the iterative method.

Conclusion
In this paper, we presented the Legendre-Picard iteration method for the numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind. To obtain this method, the Picard iteration scheme, the shifted Legendre polynomials and the shifted Legendre-Gauss quadrature formula play a fundamental role. The proposed method

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

- basically, is an iterative method, that we can implement easily and attain more accurate approximate solutions with higher iteration.
- does not require integral computations, because the integration of the shifted Legendre polynomials is calculated analytically with an iterative formula when the coefficients are updated.
- unlike spectral methods, does not require solving linear or nonlinear systems of algebraic equations and calculating the inverse of a matrix.
- in vector-matrix form, implemented significantly faster than in the original iterative form.

How to cite: Tafakkori-Bafghi, M., Heydari, M., & Loghmani, G.B. (2023). The Legendre-Picard Iteration Method for The Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Mathematical Researches*, 9 (4), 80 – 110.

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

روش تکرار لژاندر–پیکارد برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم

محمد تفکری بافقی[۱]، محمد حیدری[۲] ✉، قاسم بریدلقمانی[۳]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: m.heydari@yazd.ac.ir
۳. گروه ریاضی، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: loghmani@yazd.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۳/۲۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

چکیده

در این مقاله یک روش عددی کارا برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم ارائه شده است. روش پیشنهادی بر اساس روش تکرار پیکارد، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته و قاعده‌ی انتگرال‌گیری لژاندر-گاوس انتقال‌یافته استوار است. با توجه به ویژگی تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر، روش پیشنهادی از یک رابطه‌ی تکراری برای به‌روزرسانی ضرایب بسط جواب تقریبی استفاده می‌کند. هم‌چنین یک ساختار برداری-ماتریسی برای افزایش کارایی و کاهش زمان محاسباتی روش معرفی می‌گردد. نتایج عددی به‌وضوح قابلیت اجرایی و دقت روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی:
معادلات انتگرال فردهلم،
چندجمله‌ای‌های لژاندر،
قاعده‌ی انتگرال‌گیری
لژاندر-گاوس،
روش تکرار لژاندر-پیکارد.

استناد: تفکری بافقی، محمد؛ حیدری، محمد؛ و بریدلقمانی، قاسم (۱۴۰۲). روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۸۰ – ۱۱۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.

CC BY NC

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیک، مهندسی، مکانیک سیالات، واکنش‌های الکتروشیمیایی و مدل‌های بیولوژیکی به‌صورت معادلات انتگرال ظاهر می شوند. یکی از مشهورترین آن‌ها، معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم است. در اینجا دو حالت خطی و غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

- حالت خطی:

$$u(x) = f(x) + \int_{\Lambda} K(x,t)u(t)dt, \quad x \in \Lambda = [a,b], \tag{۱}$$

- حالت غیرخطی:

$$u(x) = f(x) + \int_{\Lambda} K(x,t)F\big(u(t)\big)dt, \quad x \in \Lambda = [a,b], \tag{۲}$$

که در آن $f(x) \in L^{2}(\Lambda)$ و $K(x,t) \in L^{2}(\Lambda \times \Lambda)$.

معمولاً حل این معادلات از نظر تحلیلی دشوار است. تاکنون روش‌های بسیاری با رویکردهای عددی و نیمه‌تحلیلی برای حل آن‌ها ارائه شده است؛ از قبیل روش‌های نیوستروم [۱]، قضیه‌ی مقدار میانی وزن‌دار [۲]، تربیع [۳]، موجک‌های چبیشف، لژاندر و هار [۴]، عناصر متناهی [۵]، تقریب کمترین مربعات [۶]، توابع بلاک-پالس [۷]، توابع پایه‌ای شعاعی [۸]، توابع کلاهی [۹]، تجزیه‌ی آدومیان [۱۰]، تکرار وردشی [۱۱]، اختلال هموتوپی [۱۲]، آنالیز هموتوپی [۱۳]، برون‌یابی [۱۴]، توابع سینک [۱۵]، چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۱۶]، توابع اسپلاین و بی-اسپلاین [۱۷] و غیره.

در سال‌های اخیر، روش‌های مبتنی بر توابع پایه‌ای متعامد، از جمله روش‌های هم‌محلی، تاو و گالرکین با چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، لژاندر و چبیشف مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است [۲۰-۱۸]. مهم‌ترین مزیت استفاده از توابع پایه‌ای متعامد، ساده سازی روش‌های ذکر شده به‌صورت حل یک دستگاه جبری خطی/ غیرخطی است؛ اما حل دستگاه‌های جبری به‌ویژه در مسائل غیرخطی، زمان‌بر است.

هدف اصلی این مقاله ارائه‌ی یک روش نیمه‌تحلیلی برای حل معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم با ترکیبی از روش تکرار پیکارد، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته و قاعده‌ی انتگرال‌گیری لژاندر-گاوس است. در روش پیشنهادی برای محاسبه‌ی قسمت انتگرالی معادله، از ویژگی تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر استفاده کرده و ضرایب بسط جواب تقریبی که به‌صورت یک سری قطع‌شده است، در هر مرحله به‌روزرسانی می‌شود. در ادامه برای افزایش سرعت محاسباتی روش، یک نمایش برداری-ماتریسی نیز ارائه می‌گردد، که کارایی روش پیشنهادی را به‌قدر قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد.

روند مقاله به‌شرح زیر است: در بخش ۱، روش تکرار پیکارد و ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته شرح داده شده است. فرمول‌بندی روش تکرار لژاندر-پیکارد در بخش ۲ ارائه می‌گردد. به‌منظور افزایش بهره‌وری و کاهش زمان محاسباتی، ساختار برداری-ماتریسی روش پیشنهادی در بخش ۳ به‌دست آورده شده است. بخش ۴ به تحلیل همگرایی روش

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

تکرار لژاندر-پیکارد اختصاص دارد. در بخش ۵ برای نشان دادن دقت و کارایی روش پیشنهادی، چند مثال عددی بررسی شده است. این پژوهش در بخش ۶ با بیان ویژگی‌های روش و نتیجه‌گیری پایان می‌یابد.

۱. پیش‌نیازها

در این بخش برخی پیش‌نیازهای ریاضی، قضایا و روش‌هایی را بیان می‌کنیم که در بخش‌های بعدی این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱,۱ روش تکرار پیکارد

روش تقریب‌های متوالی (تکرار پیکارد)، یکی از مشـــهورترین روش‌ها برای حل معادلات دیفرانســـیل معمولی و معادلات انتگرال اســت. دنباله‌ی روش تکرار پیکارد برای حل معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم (۱) و (۲) به‌ترتیب به‌صـورت‌های زیر است:

$$u^{i}(x)=f(x)+\int_{a}^{b}K(x,t)u^{i-1}(t)dt,\quad i=1,2,\ldots, \tag{۳آ}$$

$$u^{i}(x)=f(x)+\int_{a}^{b}K(x,t)F\left(u^{i-1}(t)\right)dt,\quad i=1,2,\ldots. \tag{۳ب}$$

پیکارد نشان داد که با درنظر گرفتن تابع تقریبی آغازین منا سب $u^{0}(x)$، دنباله‌ی $\left\{u^{i}(x)\right\}_{i=0}^{\infty}$، تحت شرایط منا سب به جواب $u(x)$ همگرا اســت [۲۱]. لازم به ذکر اســت در صـورتی که انتگرالده (۳) غیرخطی باشـد، محاســبه‌ی انتگرال نظیر ممکن است بسیار پیچیده یا زمان‌بر شود. از این رو، رفع این چالش موضوع مورد علاقه‌ی برخی پژوهشگران است [۲۳-۲۲].

۲.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته

چندجمله‌ای‌های لژاندر، دســته‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد هســتند که توسـط ریاضـیدان فرانسـوی، ادرین-ماری لژاندر[۱] معرفی شدند. این‌چندجمله‌ای‌ها که با $L_n(\tau), n=0,1,2,\ldots$ نشان داده می شوند، جواب‌های مسئله‌ی اشتورم-لیوویل تکین

$$\left(1-\tau^{2}\right)L_n''(\tau)-2\tau L_n'(\tau)+n(n+1)L_n(\tau)=0,\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{۴}$$

و حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به‌صورت

$$L_n(\tau)=J_n^{0,0}(\tau),\quad n=0,1,2,\ldots,\quad \tau\in I=[-1,1], \tag{۵}$$

هستند [۲۴]. فرمول رودریگز چندجمله‌ای‌های لژاندر به‌صورت زیر است:

[۱] Adrien-Marie Legendre

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$L_n(\tau)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\left[(\tau^2-1)^n\right],\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{۶}$$

این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان از رابطه‌ی بازگشتی زیر نیز به‌دست آورد:

$$L_{n+1}(\tau)=\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\tau L_n(\tau)-\left(\frac{n}{n+1}\right)L_{n-1}(\tau),\quad n=1,2,\ldots, \tag{۷}$$

که در آن $L_0(\tau)=1$ و $L_1(\tau)=\tau$.

لم ۱.۱. [۲۴] چندجمله‌ای‌های لژاندر در ویژگی‌های زیر صدق می‌کنند:

$$\text{(i)}\ L_n(\pm 1)=(\pm 1)^n, \tag{۸آ}$$

$$\text{(ii)}\ L_n(\tau)=\frac{1}{2n+1}\left(L'_{n+1}(\tau)-L'_{n-1}(\tau)\right),\quad n=1,2,\ldots. \tag{۸ب}$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر $L_n(\tau), n=0,1,2,\ldots$ روی I، نسبت به تابع وزن $w(\tau)=1$ یک دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند و داریم:

$$\int_I L_n(\tau)L_m(\tau)d\tau=\left(\frac{2}{2n+1}\right)\delta_{nm}, \tag{۹}$$

که در آن δ_{nm} تابع دلتای کرونکر است. با تغییر متغیر $\tau=\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a}$، $\tau\in I$ به $x\in\Lambda$ انتقال می‌یابد. بر این اساس، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L^*_n(x)=L_n\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a}\right),\quad x\in\Lambda. \tag{۱۰}$$

مطابق با (۷) رابطه‌ی بازگشتی سه‌جمله‌ای زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} L^*_0(x)=1,\\ L^*_1(x)=\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a},\\ L^*_{n+1}(x)=\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a}\right)L^*_n(x)-\left(\frac{n}{n+1}\right)L^*_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots. \end{cases} \tag{۱۱}$$

مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته‌ی $L^*_n(x), n=0,1,2,\ldots$ روی Λ، نسبت به تابع وزن $w(x)=1$ یک دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند. از این‌رو با توجه به (۹) و (۱۰) داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\int_{\Lambda} L_n^*(x)L_m^*(x)dx = \left(\frac{b-a}{2n+1}\right)\delta_{nm}. \tag{۱۲}$$

بنابراین به‌ازای هر $f(x) \in L_w^2(\Lambda)$ می‌توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i L_i^*(x), \tag{۱۳آ}$$

$$f_i = \left(\frac{2i+1}{b-a}\right)\int_a^b f(x)L_i^*(x)dx, \quad i = 0,1,2,\ldots. \tag{۱۳ب}$$

با استفاده از قاعده‌ی انتگرال‌گیری لژاندر-گاوس انتقال‌یافته، می‌توان (۱۳ب) را به‌صورت زیر به‌دست آورد [۶۴]:

$$f_i \simeq \left(\frac{2i+1}{2}\right)\sum_{j=0}^{N} f(x_j)L_i^*(x_j)\omega_j, \quad i = 0,1,\ldots,N, \tag{۱۴}$$

که در آن

$$x_j = \frac{b-a}{2}\tau_j + \frac{b+a}{2}, \quad j = 0,1,\ldots,N, \tag{۱۵}$$

و $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ ریشه‌های $L_{N+1}(\tau)$ هستند. $\{\omega_j\}_{j=0}^{N}$ وزن‌های متناظر هستند که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند [۶۴]:

$$\omega_j = \frac{2}{\left(1-\tau_j^2\right)\left[L'_{N+1}(\tau_j)\right]^2}, \quad j = 0,1,\ldots,N. \tag{۱۶}$$

در این‌صورت سری تقریب لژاندر-گاوس انتقال‌یافته‌ی مرتبه‌ی N-اُم تابع $f(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{I}_N f(x) = \sum_{i=0}^{N} \tilde{f}_i L_i^*(x), \quad \tilde{f}_i = \frac{1}{\gamma_i}\sum_{j=0}^{N} f(x_j)L_i^*(x_j)\omega_j, \quad i = 0,1,\ldots,N, \tag{۱۷}$$

که در آن

$$\gamma_i = \frac{2}{2i+1}, \quad i = 0,1,\ldots,N. \tag{۱۸}$$

۲. فرمول‌بندی روش تکرار لژاندر-پیکارد

در این بخش، روش تکرار لژاندر-پیکارد را برای حل معادلات انتگرال فردهلم خطی و غیرخطی (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم.

۱.۲ حالت خطی

دنباله‌ی روش تکرار پیکارد برای حل (۱) را در نظر بگیرید:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$u^{i}(x)=f(x)+\int_{a}^{b}K(x,t)u^{i-1}(t)dt,\quad i=1,2,\ldots, \tag{۱۹}$$

که در آن، $u^{0}(x)$ تابع تقریب آغازین است و معمولاً $f(x)$ در نظر گرفته می‌شود. نخستین گام روش تکرار لژاندر-پیکارد، تقریب توابع $f(x)$ و $K(x,t)$ با استفاده از $\left\{L_r^*(x)\right\}_{r=0}^{N}$ است. با توجه به (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$f(x)\simeq\sum_{r=0}^{N}\tilde{f}_r L_r^*(x),\quad \tilde{f}_r=\frac{1}{\gamma_r}\sum_{j=0}^{N}f(x_j)L_r^*(x_j)\omega_j,\quad r=0,1,\ldots,N, \tag{۲۰آ}$$

$$K(x,t)\simeq\sum_{r=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{k}_{rn}L_r^*(x)L_n^*(t), \tag{۲۰ب}$$

$$\tilde{k}_{rn}=\frac{1}{\gamma_r\gamma_n}\sum_{l=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}K(x_l,t_j)L_r^*(x_l)L_n^*(t_j)\omega_l\omega_j,\quad r,n=0,1,\ldots,N, \tag{۲۰ج}$$

که در آن

$$x_j=t_j=\frac{b-a}{2}\tau_j+\frac{b+a}{2},\quad j=0,1,\ldots,N, \tag{۲۱}$$

و $\left\{\tau_j\right\}_{j=0}^{N}$ در (۱۵) تعریف شده‌اند. با جای‌گذاری (۲۰آ) و (۲۰ب) در (۱۹) داریم:

$$u^{i}(x)=\sum_{r=0}^{N}\tilde{f}_r L_r^*(x)+\int_{a}^{b}\Big(\sum_{r=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{k}_{rn}L_r^*(x)L_n^*(t)\Big)u^{i-1}(t)dt,\quad i=1,2,\ldots. \tag{۲۲}$$

با فرض این‌که تقریب آغازین و جواب‌های تقریبی در مرحله‌ی $(i-1)$-اُم و i-اُم به‌ترتیب با $u^{0}(x)$، $u^{i-1}(x)$ و $u^{i}(x)$ نشان داده شود، داریم:

$$u^{0}(x)\simeq\sum_{r=0}^{N}\tilde{u}_r^{0}L_r^*(x),\quad \tilde{u}_r^{0}=\frac{1}{\gamma_r}\sum_{j=0}^{N}u^{0}(x_j)L_r^*(x_j)\omega_j,\quad r=0,1,\ldots,N, \tag{۲۳آ}$$

$$u^{i-1}(x)\simeq\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i-1}L_k^*(x), \tag{۲۳ب}$$

$$u^{i}(x)\simeq\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i}L_k^*(x). \tag{۲۳ج}$$

هدف، به‌دست‌آوردن ضرایب $\left\{\tilde{u}_k^{i}\right\}_{k=0}^{N}$ است که جواب تقریبی معادله‌ی (۱۹) را در تکرار i-اُم تولید می‌کند. با جای‌گذاری (۲۳ب) و (۲۳ج) در (۲۲) داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\sum_{r=0}^{N}\tilde{u}_r^i L_r^*(x)=\sum_{r=0}^{N}\tilde{f}_r L_r^*(x)+\int_a^b\Big(\sum_{r=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{k}_{rn}L_r^*(x)L_n^*(t)\Big)\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i-1}L_k^*(t)dt. \qquad (۲۴)$$

در نتیجه

$$\sum_{r=0}^{N}\tilde{u}_r^i L_r^*(x)=\sum_{r=0}^{N}\tilde{f}_r L_r^*(x)+\sum_{r=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{k}_{rn}L_r^*(x)\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i-1}\int_a^b L_n^*(t)L_k^*(t)dt. \qquad (۲۵)$$

با توجه به ویژگی تعامد (۱۲) داریم:

$$\sum_{r=0}^{N}\tilde{u}_r^i L_r^*(x)=\sum_{r=0}^{N}\tilde{f}_r L_r^*(x)+\sum_{r=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{k}_{rn}L_r^*(x)\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i-1}\left(\frac{b-a}{2}\right)\gamma_r\delta_{kn}. \qquad (۲۶)$$

بعد از ساده‌سازی داریم:

$$\sum_{r=0}^{N}\tilde{u}_r^i L_r^*(x)=\sum_{r=0}^{N}\left[\tilde{f}_r+\left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{n=0}^{N}\tilde{k}_{rn}\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i-1}\gamma_k\delta_{kn}\right]L_r^*(x). \qquad (۲۷)$$

حال ضرایب $\{\tilde{u}_k^i\}_{k=0}^N$ مستقیماً از برابر هم قرار دادن ضرایب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته در طرفین (۲۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\tilde{u}_r^i=\tilde{f}_r+\left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{n=0}^{N}\tilde{k}_{rn}\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i-1}\gamma_k\delta_{kn},\quad r=0,1,\dots,N,\quad i=1,2,\dots. \qquad (۲۸)$$

با بسط سری‌های (۲۸) و تعریف تابع دلتای کرونکر داریم:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_r^i&=\tilde{f}_r+\frac{b-a}{2}\left(\tilde{k}_{r0}\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i-1}\gamma_k\delta_{k0}+\tilde{k}_{r1}\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i-1}\gamma_k\delta_{k1}+\cdots+\tilde{k}_{rN}\sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k^{i-1}\gamma_k\delta_{kN}\right)\\&=\tilde{f}_r+\frac{b-a}{2}\left(\tilde{k}_{r0}\tilde{u}_0^{i-1}\gamma_0+\tilde{k}_{r1}\tilde{u}_1^{i-1}\gamma_1+\cdots+\tilde{k}_{rN}\tilde{u}_N^{i-1}\gamma_N\right),\quad r=0,1,\dots,N.\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

بعد از دسته‌بندی جملات، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{u}_r^i=\tilde{f}_r+\left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{j=0}^{N}\tilde{k}_{rj}\tilde{u}_j^{i-1}\gamma_j,\quad r=0,1,\dots,N,\quad i=1,2,\dots. \qquad (۳۰)$$

به این ترتیب، فرمول ضرایب بسط جواب تقریبی در تکرار i-اُم، با یک ترکیب خطی از ضرایب بسط جواب تقریبی در تکرار $(i-1)$-اُم به‌دست می‌آید. در این رابطه، ضرایب $\{\tilde{f}_r\}_{r=0}^N$ و $\{\tilde{k}_{rj}\}_{r,j=0}^N$ ثابت‌اند و ضرایب $\{\tilde{u}_r^i\}_{r=0}^N$ در هر مرحله به‌روزرسانی می‌شوند. این روند تا زمانی‌که شرط توقف معینی برآورده گردد، ادامه می‌یابد. معمولاً از معیار توقف

$$\left\|u^i(x)-u^{i-1}(x)\right\|_\infty=\max_{x\in[a,b]}\left|u^i(x)-u^{i-1}(x)\right|<\varepsilon, \qquad (۳۱)$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

ا ستفاده می شود که در آن ε، دقت داده شده ا ست. الگوریتم ۱ گام‌های روش تکرار لژاندر-پیکارد را در حالت خطی ن شان می‌دهد.

الگوریتم ۱ نمایش تکراری روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردهلم خطی نوع دوم

ورودی: a، b، تابع $f(x)$، هسته‌ی $K(x,t)$، دقت ε، تقریب اولیه‌ی $u^{\circ}(x)$، $m=\circ$ و $N\in\mathbb{N}$.

۱: توابع پایه‌ای $\{L_k^*(x)\}_{k=\circ}^N$ را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.

۲: نقاط گرهی $\{x_j\}_{j=\circ}^N$ و $\{t_j\}_{j=\circ}^N$ و وزن‌های نظیر $\{\omega_j\}_{j=\circ}^N$ را به‌ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.

۳: **محاسبه کن**

۴: $\gamma_r=\frac{۲}{۲r+۱},\quad r=\circ,۱,\dots,N$

۵: $\tilde{f}_r=\frac{۱}{\gamma_r}\sum_{j=\circ}^N f(x_j)L_r^*(x_j)\omega_j,\quad r=\circ,۱,\dots,N$

۶: $\tilde{k}_{rn}=\frac{۱}{\gamma_r\gamma_n}\sum_{l=\circ}^N\sum_{j=\circ}^N K(x_l,t_j)L_r^*(x_l)L_n^*(t_j)\omega_l\omega_j,\quad r,n=\circ,۱,\dots,N$

۷: $\tilde{u}_r^{\circ}=\frac{۱}{\gamma_r}\sum_{j=\circ}^N u^{\circ}(x_j)L_r^*(x_j)\omega_j,\quad r=\circ,۱,\dots,N$

۸: **برای** $i=۱,۲,\dots$ **انجام بده**

۹: $m:=m+i$

۱۰: $\tilde{u}_r^i=\tilde{f}_r+\left(\frac{b-a}{۲}\right)\sum_{j=\circ}^N\tilde{k}_{rj}\tilde{u}_j^{i-۱}\gamma_j,\quad r=\circ,۱,\dots,N$

۱۱: $u^i(x)=\sum_{r=\circ}^N\tilde{u}_r^iL_r^*(x)$

۱۲: **اگر** $\left\|u^i(x)-u^{i-۱}(x)\right\|_\infty<\varepsilon$، **آن‌گاه**

۱۳: **خروج**

۱۴: **پایان (اگر)**

۱۵: **پایان (برای)**

خروجی: $u(x)\simeq\sum_{r=\circ}^N\tilde{u}_r^mL_r^*(x)$.

ملاحظه ۱,۲. در روند روش تکرار لژاندر-پیکارد، نیازی به تقریب سری تیلور، م شتق‌گیری عددی یا حل د ستگاه معادلات خطی/ غیرخطی نیست و تنها با یک دنباله‌ی تکراری از ضرایب تقریب‌ها به جواب مطلوب می‌ر سیم. بنابراین سرعت اجرای روش، قابل قبول است و می‌توان در الگوریتم، مقادیر بزرگ‌تر N را برای به‌دست آوردن تقریب‌های بهتر نیز درنظر گرفت.

ملاحظه ۲,۲. با یک فرآیند مشابه، روش تکرار لژاندر-پیکارد را می‌توان برای حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نیز به‌کار برد. جزئیات آن به خوانندگان علاقه‌مند واگذار می‌شود.

۲.۲ حالت غیرخطی

دنباله‌ی پیکارد متناظر برای معادله‌ی انتگرال (۲) به‌صورت زیر است:

$$u^i(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)F\left(u^{i-۱}(t)\right)dt,\quad i=۱,۲,\dots. \tag{۳۲}$$

با جای‌گذاری (۲۰آ) و (۲۰ب) در (۳۲) داریم:

$$u^i(x)=\sum_{r=\circ}^N\tilde{f}_rL_r^*(x)+\int_a^b\sum_{r=\circ}^N\sum_{n=\circ}^N\left(\tilde{k}_{rn}L_r^*(x)L_n^*(t)\right)F\left(u^{i-۱}(t)\right)dt,\quad i=۱,۲,\dots. \tag{۳۳}$$

حال با جای‌گذاری (۲۳ب) و (۲۳ج) در (۳۳) داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\sum_{r=0}^{N}\tilde{u}_r^i L_r^*(x)=\sum_{r=0}^{N}\tilde{f}_r L_r^*(x)+\int_a^b\Big(\sum_{r=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{k}_{rn}L_r^*(x)L_n^*(t)\Big)\sum_{k=0}^{N}\tilde{F}_k^{i-1}L_k^*(t)dt, \qquad (۳۴)$$

که در آن

$$\tilde{F}_r^{i-1}=\frac{1}{\gamma_r}\sum_{j=0}^{N}F\big(u^{i-1}(t_j)\big)L_r^*(t_j)\omega_j,\quad r=0,1,\dots,N. \qquad (۳۵)$$

در این صورت داریم:

$$\sum_{r=0}^{N}\tilde{u}_r^i L_r^*(x)=\sum_{r=0}^{N}\tilde{f}_r L_r^*(x)+\sum_{r=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{k}_{rn}L_r^*(x)\sum_{k=0}^{N}\tilde{F}_k^{i-1}\int_a^b L_n^*(t)L_k^*(t)dt. \qquad (۳۶)$$

حال مشابه با روند (۲۹)-(۲۶) بعد از ساده‌سازی و دسته‌بندی جملات، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{u}_r^i=\tilde{f}_r+\left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{j=0}^{N}\tilde{k}_{rj}\tilde{F}_j^{i-1}\gamma_j,\quad r=0,1,\dots,N,\quad i=1,2,\dots, \qquad (۳۷)$$

که در آن ضرایب $\{\tilde{k}_{rj}\}_{r,j=0}^{N}$ ثابت‌اند و ضرایب $\{\tilde{F}_j^{i-1}\}_{j=0}^{N}$ در هر مرحله با توجه به ضرایب $\{\tilde{u}_r^{i-1}\}_{r=0}^{N}$ به‌روزرسانی می‌شوند. الگوریتم ۲ گام‌های روش تکرار لژاندر-پیکارد را در حالت غیرخطی نشان می‌دهد.

الگوریتم ۲ نمایش تکراری روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی نوع دوم

ورودی: a، b، تابع $f(x)$، تابع $F(x)$، هسته‌ی $K(x,t)$، دقت ε، تقریب اولیه‌ی $u^0(x)$، $m=0$ و $N\in\mathbb{N}$.

۱: توابع پایه‌ای $\{L_k^*(x)\}_{k=0}^{N}$ را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.

۲: نقاط گرهی $\{x_j\}_{j=0}^{N}$ و $\{t_j\}_{j=0}^{N}$ و وزن‌های نظیر $\{\omega_j\}_{j=0}^{N}$ را به‌ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.

۳: **محاسبه کن**

۴: $\gamma_r=\frac{2}{2r+1},\quad r=0,1,\dots,N$

۵: $\tilde{f}_r=\frac{1}{\gamma_r}\sum_{j=0}^{N}f(x_j)L_r^*(x_j)\omega_j,\quad r=0,1,\dots,N$

۶: $\tilde{k}_{rn}=\frac{1}{\gamma_r\gamma_n}\sum_{l=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}K(x_l,t_j)L_r^*(x_l)L_n^*(t_j)\omega_l\omega_j,\quad r,n=0,1,\dots,N$

۷: $\tilde{u}_r^0=\frac{1}{\gamma_r}\sum_{j=0}^{N}u^0(x_j)L_r^*(x_j)\omega_j,\quad r=0,1,\dots,N$

۸: **برای** $i=1,2,\dots$ **انجام بده**

۹: $m:=m+i$

۱۰: $\tilde{F}_r^{i-1}=\frac{1}{\gamma_r}\sum_{j=0}^{N}F\left(u^{i-1}(t_j)\right)L_r^*(t_j)\omega_j,\quad r=0,1,\dots,N$

۱۱: $\tilde{u}_r^i=\tilde{f}_r+\left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{j=0}^{N}\tilde{k}_{rj}\tilde{F}_j^{i-1}\gamma_j,\quad r=0,1,\dots,N,\quad i=1,2,\dots$

۱۲: $u^i(x)=\sum_{r=0}^{N}\tilde{u}_r^i L_r^*(x)$

۱۳: **اگر** $\|u^i(x)-u^{i-1}(x)\|_\infty<\varepsilon$، **آن‌گاه**

۱۴: **خروج**

۱۵: **پایان (اگر)**

۱۶: **پایان (برای)**

خروجی: $u(x)\simeq\sum_{r=0}^{N}\tilde{u}_r^m L_r^*(x)$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

۳. ساختار برداری-ماتریسی

از آن‌جایی‌که محاسبه‌ی جمله به جمله‌ی ضرایب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته به‌ازای N های بزرگ قدری زمان‌بر است، در این بخش یک نمایش فشرده‌ی برداری-ماتریسی برای افزایش کارایی روش تکرار لژاندر-پیکارد ارائه می‌دهیم. برای این‌منظور، ضرایب جواب تقریبی $u^i(x)$ را به‌صورت برداری زیر درنظر می‌گیریم:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i = \left[\tilde{u}^i_0, \tilde{u}^i_1, \ldots, \tilde{u}^i_N\right]^T. \tag{۳۸}$$

هم‌چنین مقادیر جواب تقریبی تکرار i-اُم به‌ازای نقاط گرهی (۱۵) را به‌صورت برداری زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}^i = \left[u^i(x_0), u^i(x_1), \ldots, u^i(x_N)\right]^T. \tag{۳۹}$$

لم ۱,۳. برای $j = 0, 1, \cdots, N$ داریم:

$$L^*_n(x_j) = L_n(\tau_j).$$

برهان. با توجه به تعریف (۱۰)، به‌آسانی ثابت می‌شود.

باتوجه به (۲۳ج) و لم ۱,۳، بردار $\mathbf{u}^i$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^i &= \begin{bmatrix} \tilde{u}^i_0 L^*_0(x_0) + \tilde{u}^i_1 L^*_1(x_0) + \cdots + \tilde{u}^i_N L^*_N(x_0) \\ \tilde{u}^i_0 L^*_0(x_1) + \tilde{u}^i_1 L^*_1(x_1) + \cdots + \tilde{u}^i_N L^*_N(x_1) \\ \vdots \\ \tilde{u}^i_0 L^*_0(x_N) + \tilde{u}^i_1 L^*_1(x_N) + \cdots + \tilde{u}^i_N L^*_N(x_N) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L^*_0(x_0) & L^*_1(x_0) & \cdots & L^*_N(x_0) \\ L^*_0(x_1) & L^*_1(x_1) & \cdots & L^*_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^*_0(x_N) & L^*_1(x_N) & \cdots & L^*_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}^i_0 \\ \tilde{u}^i_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}^i_N \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_0(\tau_0) & L_1(\tau_0) & \cdots & L_N(\tau_0) \\ L_0(\tau_1) & L_1(\tau_1) & \cdots & L_N(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0(\tau_N) & L_1(\tau_N) & \cdots & L_N(\tau_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}^i_0 \\ \tilde{u}^i_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}^i_N \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{C_u} \tilde{\mathbf{u}}^i,
\end{aligned} \tag{۴۰}$$

که در آن

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\mathbf{C_u}=\begin{bmatrix} L_0(\tau_0) & L_1(\tau_0) & \cdots & L_N(\tau_0) \\ L_0(\tau_1) & L_1(\tau_1) & \cdots & L_N(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0(\tau_N) & L_1(\tau_N) & \cdots & L_N(\tau_N) \end{bmatrix}, \tag{۴۱}$$

یک ماتریس ثابت و مستقل از a و b است. حال روش تکرار لژاندر-پیکارد را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱.۳ حالت خطی

بر اساس (۳۰)، بردار $\tilde{\mathbf{u}}^i$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i=\begin{bmatrix}\tilde{u}_0^i\\ \tilde{u}_1^i\\ \vdots\\ \tilde{u}_N^i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{f}_0+\left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{j=0}^{N}\tilde{k}_{0j}\tilde{u}_j^{i-1}\gamma_j\\ \tilde{f}_1+\left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{j=0}^{N}\tilde{k}_{1j}\tilde{u}_j^{i-1}\gamma_j\\ \vdots\\ \tilde{f}_N+\left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{j=0}^{N}\tilde{k}_{Nj}\tilde{u}_j^{i-1}\gamma_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{f}_0\\ \tilde{f}_1\\ \vdots\\ \tilde{f}_N\end{bmatrix}+\frac{b-a}{2}\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{N}\tilde{k}_{0j}\tilde{u}_j^{i-1}\gamma_j\\ \sum_{j=0}^{N}\tilde{k}_{1j}\tilde{u}_j^{i-1}\gamma_j\\ \vdots\\ \sum_{j=0}^{N}\tilde{k}_{Nj}\tilde{u}_j^{i-1}\gamma_j\end{bmatrix}=\tilde{\mathbf{f}}+\frac{b-a}{2}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}^{i-1}, \tag{۴۲}$$

که در آن

$$\tilde{\mathbf{f}}=\begin{bmatrix}\tilde{f}_0\\ \tilde{f}_1\\ \vdots\\ \tilde{f}_N\end{bmatrix},\quad \tilde{\mathbf{K}}=\begin{bmatrix}\tilde{k}_{00} & \tilde{k}_{01} & \cdots & \tilde{k}_{0N}\\ \tilde{k}_{10} & \tilde{k}_{11} & \cdots & \tilde{k}_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{k}_{N0} & \tilde{k}_{N1} & \cdots & \tilde{k}_{NN}\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{bmatrix}\gamma_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \gamma_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_N\end{bmatrix}. \tag{۴۳}$$

بدین صورت بردار ضرایب جواب تقریبی $\tilde{\mathbf{u}}^i$ بر ا ساس بردار ضرایب $\tilde{\mathbf{u}}^{i-1}$ به‌د ست می‌آید. م شابه با نمایش تکراری روش تکرار لژاندر-پیکارد، بردار ضرایب $\tilde{\mathbf{u}}^i$ تا برقراری شرایط معینی بروزرسانی می‌شود. معیار توقف را به‌صورت

$$\left\|\mathbf{u}^i-\mathbf{u}^{i-1}\right\|_\infty=\max_{0\le j\le N}\left|u^i(x_j)-u^{i-1}(x_j)\right|<\varepsilon, \tag{۴۴}$$

یا

$$\left\|\tilde{\mathbf{u}}^i-\tilde{\mathbf{u}}^{i-1}\right\|_\infty=\max_{0\le j\le N}\left|\tilde{u}_j^i-\tilde{u}_j^{i-1}\right|<\varepsilon, \tag{۴۵}$$

درنظر می‌گیریم، که در آن ε دقت داده‌شده است. الگوریتم ۳ گام‌های نمایش برداری-ماتریسی روش تکرار لژاندر-پیکارد را در حالت خطی نشان می‌دهد.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

الگوریتم ۳ نمایش برداری-ماتریسی روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردهلم خطی نوع دوم

ورودی: a، b، تابع $f(x)$، هسته‌ی $K(x,t)$، دقت ε، تقریب اولیه‌ی $u^{\circ}(x)$، $m=\circ$ و $N\in\mathbb{N}$.

۱: توابع پایه‌ای $\{L_k^*(t)\}_{k=\circ}^{N}$ را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.
۲: نقاط گرهی $\{x_j\}_{j=\circ}^{N}$ و $\{t_j\}_{j=\circ}^{N}$ و وزن‌های نظیر $\{\omega_j\}_{j=\circ}^{N}$ را به‌ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.
۳: تعریف کنید $\mathbf{u}^{\circ}=[u^{\circ}(x_\circ),u^{\circ}(x_۱),\ldots,u^{\circ}(x_N)]^T$.
۴: بردار $\tilde{\mathbf{f}}$ و ماتریس‌های $\tilde{\mathbf{K}}$ و $\mathbf{G}$ را به‌ترتیب با توجه به (۴۳) تعریف کنید.
۵: **برای** $i=۱,۲,\ldots$ **انجام بده**
۶: $m:=m+i$
۷: بردار ضرایب را با توجه به $\tilde{\mathbf{u}}^i=\tilde{\mathbf{f}}+\frac{b-a}{۲}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}^{i-۱}$ محاسبه کنید.
۸: محاسبه کنید $\mathbf{u}^i=\mathbf{C_u}\tilde{\mathbf{u}}^i$.
۹: **اگر** $\|\mathbf{u}^i-\mathbf{u}^{i-۱}\|_\infty<\varepsilon$ **آن‌گاه**
۱۰: **خروج**
۱۱: **پایان (اگر)**
۱۲: **پایان (برای)**

خروجی: $u(x)\simeq\sum_{r=\circ}^{N}\mathbf{u}_r^m L_r^*(x)$.

ملاحظه ۱،۳. چون بردار $\tilde{\mathbf{f}}$ و ماتریس‌های ضرایب $\tilde{\mathbf{K}}$ و $\mathbf{G}$ در هر تکرار ثابت‌اند، می‌توانیم آن‌ها را تنها یک مرتبه قبل از حلقه‌ی الگوریتم محاسبه نماییم؛ بنابراین ساختار برداری-ماتریسی روش از نظر محاسباتی سریع‌تر از نمایش تکراری استاندارد است.

۲.۳ حالت غیرخطی

در این حالت نخست مشابه با روند (۴۱)-(۳۸) عمل می‌کنیم. سپس با توجه به (۳۷) بردار $\tilde{\mathbf{u}}^i$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i=\begin{bmatrix}\tilde{u}_\circ^i\\ \tilde{u}_۱^i\\ \vdots\\ \tilde{u}_N^i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{f}_\circ+\left(\frac{b-a}{۲}\right)\sum_{j=\circ}^{N}\tilde{k}_{\circ j}\tilde{F}_j^{i-۱}\gamma_j\\ \tilde{f}_۱+\left(\frac{b-a}{۲}\right)\sum_{j=\circ}^{N}\tilde{k}_{۱j}\tilde{F}_j^{i-۱}\gamma_j\\ \vdots\\ \tilde{f}_N+\left(\frac{b-a}{۲}\right)\sum_{j=\circ}^{N}\tilde{k}_{Nj}\tilde{F}_j^{i-۱}\gamma_j\end{bmatrix}. \tag{۴۶}$$

مشابه با روند (۴۲)، بعد از ساده‌سازی داریم:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i=\tilde{\mathbf{f}}+\frac{b-a}{۲}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{G}\tilde{\mathbf{F}}^{i-۱}, \tag{۴۷}$$

که در آن $\tilde{\mathbf{f}}$، $\tilde{\mathbf{K}}$ و $\mathbf{G}$ در (۴۳) تعریف شده‌اند و

$$\tilde{\mathbf{F}}^{i-۱}=\left[\tilde{F}_\circ^{i-۱},\tilde{F}_۱^{i-۱},\ldots,\tilde{F}_N^{i-۱}\right]^T=\mathbf{G}^{-۱}\mathbf{C}_\mathbf{u}^T\mathbf{W}\mathbf{F}^{i-۱}, \tag{۴۸}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

که در آن

$$\mathbf{F}^{i-1} = \left[F(\mathbf{u}_0^{i-1}), F(\mathbf{u}_1^{i-1}), \ldots, F(\mathbf{u}_N^{i-1}) \right]^T.$$

بدین‌صورت بردار ضرایب جواب تقریبی $\tilde{\mathbf{u}}^i$ به‌دست می‌آید. با این فرمول، الگوریتم حالت غیرخطی را می‌توان مشابه با الگوریتم ۳ به‌صورت زیر نوشت.

الگوریتم ۴ نمایش برداری-ماتریسی روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی نوع دوم

ورودی: a، b، تابع $f(x)$، تابع $F(x)$، هسته‌ی $K(x,t)$، دقت ε، تقریب اولیه‌ی $u^0(x)$، $m = 0$ و $N \in \mathbb{N}$.

۱: توابع پایه‌ای $\{L_k^*(t)\}_{k=0}^N$ را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.
۲: نقاط گرهی $\{x_j\}_{j=0}^N$ و $\{t_j\}_{j=0}^N$ و وزن‌های نظیر $\{\omega_j\}_{j=0}^N$ را به‌ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.
۳: تعریف کنید $\mathbf{u}^0 = [u^0(x_0), u^0(x_1), \ldots, u^0(x_N)]^T$.
۴: بردار $\tilde{\mathbf{f}}$ و ماتریس‌های $\tilde{\mathbf{K}}$ و $\mathbf{G}$ را به‌ترتیب با توجه به (۴۳) تعریف کنید.
۵: **برای** $i = 1, 2, \ldots$ **انجام بده**
۶: $m := m + i$
۷: $\mathbf{F}^{i-1} = \left[F(\mathbf{u}_0^{i-1}), F(\mathbf{u}_1^{i-1}), \ldots, F(\mathbf{u}_N^{i-1}) \right]^T$
۸: $\tilde{\mathbf{F}}^{i-1} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}_\mathbf{u}^T\mathbf{W}\mathbf{F}^{i-1}$
۹: بردار ضرایب را با توجه به $\tilde{\mathbf{u}}^i = \tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{2}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{G}\tilde{\mathbf{F}}^{i-1}$ محاسبه کنید.
۱۰: محاسبه کنید $\mathbf{u}^i = \mathbf{C}_\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}^i$.
۱۱: **اگر** $\|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}\|_\infty < \varepsilon$ **آن‌گاه**
۱۲: **خروج**
۱۳: **پایان (اگر)**
۱۴: **پایان (برای)**

خروجی: $u(x) \simeq \sum_{r=0}^N \mathbf{u}_r^m L_r^*(x)$.

۴. تحلیل همگرایی روش

به‌خاطر انباشتگی خطای گرد کردن و استفاده از سری قطع‌شده لژاندر مرتبه‌ی N در گام‌های روش، نتایج همگرایی روش تکرار لژاندر-پیکارد با روش پیکارد کلاسیک تفاوت دارد. برای حصول همگرایی روش، در این بخش نشان می‌دهیم که روش تکرار لژاندر-پیکارد تحت شرایط مناسب و کافی برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی همگرا خواهد بود.

قضیه ۱,۴. برای معادله‌ی انتگرال (۲)، روش تکرار لژاندر-پیکارد همگراست، هرگاه

$$b - a < \frac{2}{L\,\|\mathbf{C}_\mathbf{u}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C}_\mathbf{u}^T\mathbf{W}\|}, \tag{۴۹}$$

که در آن L ثابت لیپ‌شیتز برای تابع F است.

برهان. از (۴۰)، (۴۷) و (۴۸) داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^{i}-\mathbf{u}^{i-1} &= \mathbf{C_u}\left(\tilde{\mathbf{u}}^{i}-\tilde{\mathbf{u}}^{i-1}\right)\\
&= \mathbf{C_u}\left[\left(\tilde{\mathbf{f}}+\frac{b-a}{2}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{G}\tilde{\mathbf{F}}^{i-1}\right)-\left(\tilde{\mathbf{f}}+\frac{b-a}{2}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{G}\tilde{\mathbf{F}}^{i-2}\right)\right]\\
&= \frac{b-a}{2}\mathbf{C_u}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{G}\left(\tilde{\mathbf{F}}^{i-1}-\tilde{\mathbf{F}}^{i-2}\right)\\
&= \frac{b-a}{2}\mathbf{C_u}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C_u}^{T}\mathbf{W}\left(\mathbf{F}^{i-1}-\mathbf{F}^{i-2}\right)\\
&= \frac{b-a}{2}\mathbf{C_u}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C_u}^{T}\mathbf{W}\left(\mathbf{F}^{i-1}-\mathbf{F}^{i-2}\right)\\
&= \frac{b-a}{2}\mathbf{Q}\left(\mathbf{F}^{i-1}-\mathbf{F}^{i-2}\right),
\end{aligned}
\tag{۵۰}
$$

که در آن

$$
\mathbf{Q}=\mathbf{C_u}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C_u}^{T}\mathbf{W}. \tag{۵۱}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathbf{u}^{i}-\mathbf{u}^{i-1}\right\| &= \frac{b-a}{2}\left\|\mathbf{Q}\left(\mathbf{F}^{i-1}-\mathbf{F}^{i-2}\right)\right\|\\
&\le \frac{b-a}{2}\left\|\mathbf{Q}\right\|\left\|\mathbf{F}^{i-1}-\mathbf{F}^{i-2}\right\|\\
&= \frac{b-a}{2}\left\|\mathbf{Q}\right\|\max_{0\le k\le N}\left|F(\mathbf{u}_k^{i-1})-F(\mathbf{u}_k^{i-2})\right|\\
&\le \frac{b-a}{2}\left\|\mathbf{Q}\right\|\max_{0\le k\le N} L\left|\mathbf{u}_k^{i-1}-\mathbf{u}_k^{i-2}\right|\\
&= \frac{b-a}{2}L\left\|\mathbf{Q}\right\|\max_{0\le k\le N}\left|\mathbf{u}_k^{i-1}-\mathbf{u}_k^{i-2}\right|\\
&= \frac{b-a}{2}L\left\|\mathbf{Q}\right\|\left\|\mathbf{u}^{i-1}-\mathbf{u}^{i-2}\right\|,
\end{aligned}
\tag{۵۲}
$$

که در آن L ثابت لیپ‌شیتز تابع F است. حال با استفاده مکرر از (۵۲) داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{u}^{i}-\mathbf{u}^{i-1}\right\| &\le \frac{b-a}{2}L\|\mathbf{Q}\|\left\|\mathbf{u}^{i-1}-\mathbf{u}^{i-2}\right\| \\ &\le \left(\frac{b-a}{2}L\|\mathbf{Q}\|\right)^{2}\left\|\mathbf{u}^{i-2}-\mathbf{u}^{i-3}\right\| \\ &\le \left(\frac{b-a}{2}L\|\mathbf{Q}\|\right)^{3}\left\|\mathbf{u}^{i-3}-\mathbf{u}^{i-4}\right\| \\ &\le \cdots \\ &\le \left(\frac{b-a}{2}L\|\mathbf{Q}\|\right)^{i-1}\left\|\mathbf{u}^{1}-\mathbf{u}^{0}\right\|.\end{aligned} \tag{۵۳}$$

در نتیجه

$$\left\|\mathbf{u}^{i}-\mathbf{u}^{i-1}\right\| \le \left(\frac{b-a}{2}L\|\mathbf{Q}\|\right)^{i-1}\left\|\mathbf{u}^{1}-\mathbf{u}^{0}\right\|. \tag{۵۴}$$

حال اگر $\frac{b-a}{2}L\|\mathbf{Q}\|<1$، آن‌گاه

$$\lim_{i\to\infty}\left\|\mathbf{u}^{i}-\mathbf{u}^{i-1}\right\|=0, \tag{۵۵}$$

که برهان را کامل می‌کند.

۵. مثال‌های عددی

در این بخش نتایج حاصل از روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم گزارش شده است. الگوریتم‌ها با نرم افزار میپل نسخه‌ی ۲۰۱۶.۲a با دقت ۶۴ رقم بر روی رایانه‌ی شخصی با پردازنده‌ی چهار هسته‌ای و هشت گیگابایت رم، تحت سیستم عامل ویندوز ۷ نسخه‌ی ۶۴ بیتی، بر روی چند مثال اجرا گردیده‌اند. برای ارزیابی دقت روش پیشنهادی، با درنظر گرفتن

$$\begin{aligned}L_2 &= \left\|u_{ext}(x)-u_{app}(x)\right\|_2, \\ L_\infty &= \left\|u_{ext}(x)-u_{app}(x)\right\|_\infty,\end{aligned}$$

که در آن $u_{ext}(x)$ و $u_{app}(x)$ به‌ترتیب جواب‌های دقیق و تقریبی هستند، نتایج به‌دست‌آمده را با روش‌های دیگر مقایسه نمودیم.

مثال ۱,۵. معادله‌ی انتگرال خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$u(x)=f(x)+\frac{1}{12}\int_0^1 \frac{xt-1}{1+x^2}u(t)dt, \quad 0\le x\le 1, \tag{۵۶}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

که در آن $f(x)$ به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود تا جواب دقیق $u(x)=\sin(x+۱)$ به‌دست آید. با درنظر گرفتن $N=۳$، داریم:

$$\mathbf{C_u}=\begin{bmatrix} ۱ & -۰.۸۶۱۱۴ & ۰.۶۱۲۳۳ & -۰.۳۰۴۷۵ \\ ۱ & -۰.۳۳۹۹۸ & -۰.۳۲۶۶۲ & ۰.۴۱۱۷۳ \\ ۱ & ۰.۳۳۹۹۸ & -۰.۳۲۶۶۲ & -۰.۴۱۱۷۳ \\ ۱ & ۰.۸۶۱۱۴ & ۰.۶۱۲۳۳ & ۰.۳۰۴۷۵ \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{K}}=\begin{bmatrix} -۰.۰۵۱۰۱۰ & ۰.۰۱۴۴۴۱ & ۹.۲۵۰۰\times۱۰^{-۱۱} & ۱.۶۰۸۲\times۱۰^{-۱۰} \\ ۰.۰۳۳۳۸۹ & ۰.۰۱۰۳۲۷ & -۵.۷۰۰۰\times۱۰^{-۱۱} & -۶.۷۲۰۰\times۱۰^{-۱۱} \\ -۰.۰۰۱۵۶۴۳ & -۰.۰۰۴۲۶۴۷ & ۱.۵۰۰۰\times۱۰^{-۱۱} & -۵.۲۵۰۰\times۱۰^{-۱۲} \\ -۰.۰۰۲۱۸۳۴ & ۰.۰۰۰۱۸۷۷۱ & -۷.۸۷۵۰\times۱۰^{-۱۲} & -۱.۴۷۰۰\times۱۰^{-۱۱} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰.۶۶۶۶۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰.۴۰۰۰۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰.۲۸۵۷۱ \end{bmatrix}, \tag{۵۷}$$

$$\tilde{\mathbf{f}}=\begin{bmatrix} ۱.۵۳۲۱ \\ ۰.۳۷۷۷۱ \\ -۰.۰۳۶۳۵۱ \\ -۰.۰۰۴۰۷۴۹ \end{bmatrix}.$$

در این‌صورت جواب تقریبی روش پیشنهادی بعد از ۲۰ تکرار به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u(x)\simeq ۰.۹۹۹۸+۱.۰۰۴۰x-۰.۰۱۸۴x^{۲}-۰.۱۴۴۷x^{۳}. \tag{۵۸}$$

برای بررسی کارایی روش پیشنهادی، جدول ۱ را آماده کرده‌ایم، که ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی را به‌ازای مقادیر مختلف N، نشان می‌دهد. جدول ۲ به مقایسه‌ی زمان محاسباتی حلقه‌ی تکرار for مابین نمایش تکراری و برداری-ماتریسی اختصاص دارد. با ملاحظه‌ی نتایج این جدول در می‌یابیم که نمایش برداری-ماتریسی روش، به‌قدر قابل ملاحظه‌ای سریع‌تر است؛ بنابراین در مثال‌های بعدی، روش پیشنهادی را با ساختار برداری-ماتریسی اجرا می‌کنیم. خطای مطلق به‌صورت نقطه به نقطه نیز با خطای حاصل از روش درونیاب اسپلاین طبیعی (NSI) و روش درونیاب شبه‌اسپلاین (SQI ۱-۲) [۲۵] در جدول ۳ مقایسه شده است. شکل ۱ نمودارهای جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق نظیر را به‌ازای $N=۲۰$ و $\varepsilon=۱۰^{-۲۵}$ نشان می‌دهد. نمودار لگاریتم خطای حاصل از روش تکرار لژاندر-پیکارد در شکل ۲ به‌ازای مقادیر متفاوت N رسم شده است. جدول‌ها و شکل‌های ارائه شده، دقت و کارایی روش این پژوهش را تأیید می‌کند.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

جدول ۱. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$. (تعداد تکرارها = ۲۰)

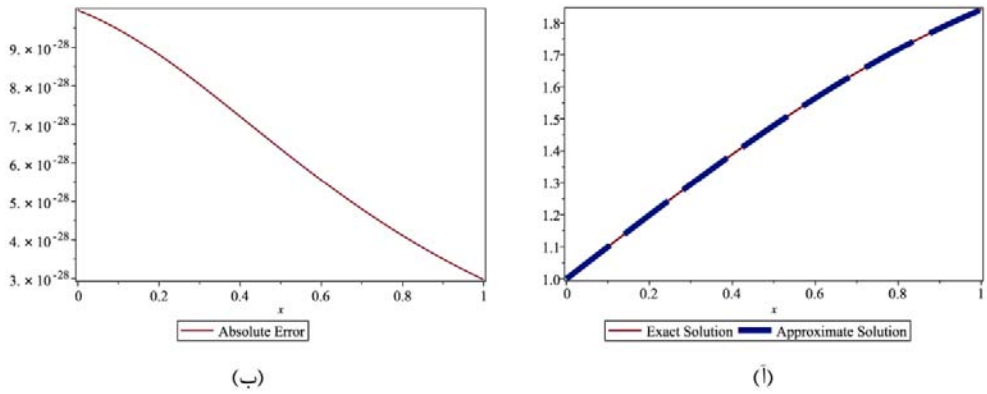
N	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
L_∞	۸.۰۶۵۱۸۹×۱۰^{-۷}	۳.۱۶۹۱۳۳×۱۰^{-۱۴}	۴.۰۰۱۱۴۷۷×۱۰^{-۲۳}	۹.۹۶۴۵۷۱×۱۰^{-۲۸}	۸.۳۵۷۹۸۴×۱۰^{-۳۳}

جدول ۲. مقایسه‌ی زمان محاسباتی (ثانیه) نمایش تکراری (IF) و برداری-ماتریسی (VMF) روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$.

N	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
IF	۰.۷۶۶	۱.۶۷۲	۳.۴۳۷	۴.۸۲۸	۶.۲۳۴
VMF	۰.۱۲۵	۰.۱۵۷	۰.۲۳۵	۰.۳۵۹	۰.۵۳۱

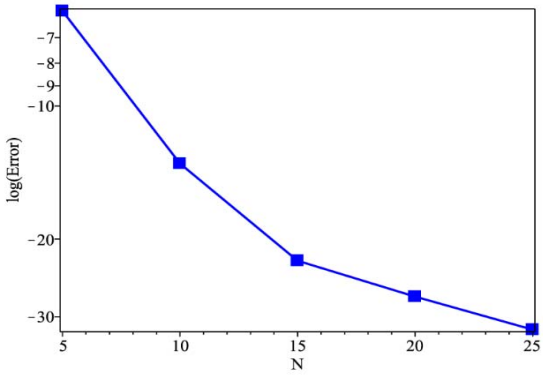
جدول ۳. مقایسه‌ی خطای مطلق نقطه به نقطه‌ی روش پیشنهادی با ۱۰ تکرار و روش‌های ارائه شده در [۲۵].

x	NSI[۲۵] N = ۲۰	SQI1[۲۵] N = ۲۰	SQI2[۲۵] N = ۲۰	روش پیشنهادی N = ۲۰
۰.۰	۴.۶×۱۰^{-۴}	۵.۳×۱۰^{-۹}	۱.۰×۱۰^{-۸}	۱.۶۸۸۳۹۴×۱۰^{-۱۲}
۰.۱	۵.۵×۱۰^{-۴}	۱.۲×۱۰^{-۸}	۳.۱×۱۰^{-۷}	۱.۶۰۴۳۴۱×۱۰^{-۱۲}
۰.۲	۶.۱×۱۰^{-۴}	۲.۹×۱۰^{-۸}	۵.۳×۱۰^{-۸}	۱.۴۹۲۶۶۸×۱۰^{-۱۲}
۰.۳	۶.۵×۱۰^{-۴}	۴.۷×۱۰^{-۸}	۱.۶×۱۰^{-۷}	۱.۳۶۱۸۰۳×۱۰^{-۱۲}
۰.۴	۶.۸×۱۰^{-۴}	۶.۴×۱۰^{-۸}	۲.۸×۱۰^{-۷}	۱.۲۲۰۹۹۶×۱۰^{-۱۲}
۰.۵	۶.۸×۱۰^{-۴}	۸.۰×۱۰^{-۸}	۳.۰×۱۰^{-۷}	۱.۰۷۸۶۷۷×۱۰^{-۱۲}
۰.۶	۶.۶×۱۰^{-۴}	۹.۵×۱۰^{-۸}	۲.۶×۱۰^{-۷}	۹.۴۱۴۲۳۸×۱۰^{-۱۳}
۰.۷	۶.۴×۱۰^{-۴}	۱.۰×۱۰^{-۷}	۱.۹×۱۰^{-۷}	۸.۱۳۶۴۲۲×۱۰^{-۱۳}
۰.۸	۶.۰×۱۰^{-۴}	۱.۲×۱۰^{-۷}	۱.۲×۱۰^{-۷}	۶.۹۷۷۵۴۵×۱۰^{-۱۳}
۰.۹	۵.۶×۱۰^{-۴}	۱.۳×۱۰^{-۸}	۶.۶×۱۰^{-۸}	۵.۹۴۶۴۵۲×۱۰^{-۱۳}
۱.۰	۵.۱×۱۰^{-۴}	۱.۰×۱۰^{-۹}	۲.۲×۱۰^{-۸}	۵.۰۴۱۴۹۱×۱۰^{-۱۳}



شکل ۱. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای $N = ۲۰$ و شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]



شکل ۲. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$.

مثال ۲,۵. معادله‌ی انتگرال خطی زیر موسوم به لاو[۱] [۲۶]

$$u(x) = ۱ + \frac{۱}{\pi}\left(\arctan(x-۱) - \arctan(x+۱)\right) - \frac{\delta}{\pi}\int_{-۱}^{۱} \frac{۱}{\delta^{۲} + (x-t)^{۲}} u(t)dt, \quad -۱ \le x \le ۱, \quad (۵۹)$$

را درنظر بگیرید، که در آن $\delta = -۱$. جواب دقیق این معادله $u(x) = ۱$ اســـت. با درنظر گرفتن $N = ۵$ بعد از ۲۰ تکرار، روش پیشنهادی جواب تقریبی زیر را به‌دست می‌دهد:

(۶۰)

$$u(x) \simeq ۱.۰۰۰ - ۴.۴۷۶\times۱۰^{-۱۲۷}x - ۰.۰۰۰۰۸۷۳۱x^{۲} + ۱.۸۹۱\times۱۰^{-۱۲۶}x^{۳} + ۰.۰۰۰۰۷۹۶۴x^{۴} - ۱.۴۸۷\times۱۰^{-۱۲۶}x^{۵}.$$

جدول ۴ نشان‌دهنده‌ی خطای مطلق روش ارائه شده در این مقاله به‌ازای مقادیر مختلف N است؛ از طرفی خطای $L_{۲}$ در جدول ۵ با خطای چند روش کارا مقایسه گردیده است. این جدول نشان می‌دهد روش پیشنهادی از روش‌های ارائه شده در [۳۳-۲۷] دقیق‌تر است. شکل ۳ نمودار لگاریتم خطا به‌ازای مقادیر متفاوت N را نشان می‌دهد.

جدول ۴. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$.(تعداد تکرارها = ۷۲)

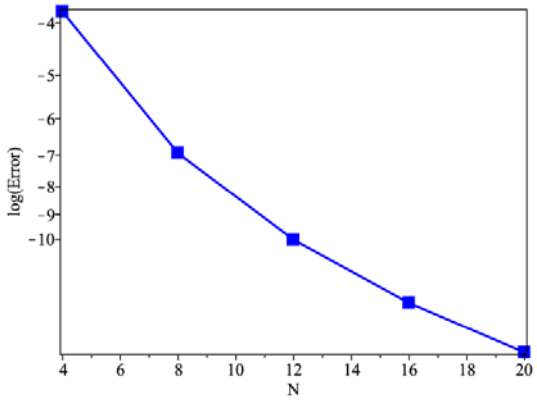
N	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
L_{∞}	۱.۵۴۰۸۸۴×۱۰^{-۴}	۱.۱۳۸۰۴۸×۱۰^{-۷}	۹.۴۸۶۴۵۳×۱۰^{-۱۱}	۸.۰۸۰۵۳۲×۱۰^{-۱۴}	۶.۹۴۹۱۲۴×۱۰^{-۱۷}

[۱] Love's integral equation

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

جدول ۵. مقایسه‌ی خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$ و روش‌های ارائه شده در [۳۳-۲۷].

روش	خطای $L_۲$
موجک هار [۲۷] $(۲M = ۳۲)$	۴.۴۵۱۶۸×۱۰^{-۳}
توابع هار کسری [۲۸] $(m = ۶۴)$	۱.۸۹۰۳۶×۱۰^{-۳}
موجک هارمونیک [۲۹] $(M = ۳۲)$	۸.۲۴۹۰۱×۱۰^{-۴}
شبه درونیابی [۳۰] $(N = ۵,\ d = ۰.۰۱)$	۹.۷۵۶۷۶×۱۰^{-۴}
موجک هار بهبودیافته [۳۱] $(۲M = ۳۲)$	۳.۲۹۱۷۹×۱۰^{-۵}
نیستروم بهبودیافته [۳۲] $(N = ۳۲,\ \gamma = -۰.۵,\ h = ۱)$	۵.۱۶۳۷۱×۱۰^{-۶}
توابع پایه‌ای مثلثاتی سینوسی [۳۳] $(d = ۱۶,\ M = ۲,\ m = ۸)$	۳.۰۵۴۰۳×۱۰^{-۸}
تکرار لژاندر-پیکارد $(N = ۱۰)$	۳.۲۷۶۱۷×۱۰^{-۹}
تکرار لژاندر-پیکارد $(N = ۱۶)$	۸.۰۸۰۵۳×۱۰^{-۱۴}
تکرار لژاندر-پیکارد $(N = ۳۲)$	۱.۰۷۹۱۲×۱۰^{-۲۵}



شکل ۳. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$.

مثال ۳,۵. معادله‌ی انتگرال غیرخطی

$$u(x) = \sin(\pi x) + \frac{۱}{۵}\int_{۰}^{۱} \cos(\pi x)\sin(\pi t)\big(u(t)\big)^{۳}\, dt, \quad ۰ \le x \le ۱, \tag{۶۱}$$

را که جواب دقیق آن به صورت $u(x) = \sin(\pi x) + \frac{۱}{۳}(۲۰ - \sqrt{۳۹۱})\cos(\pi x)$ است، درنظر بگیرید. با انتخاب $N = ۵$، روش پیشنهادی بعد از ۱۲ تکرار جواب تقریبی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$u(x) \simeq ۰.۰۷۶۷۱ + ۳.۰۸۶x + ۰.۱۷۵۶x^{۲} - ۷.۳۰۲x^{۳} + ۴.۰۶۷x^{۴} - ۰.۱۷۷۴x^{۵}. \tag{۶۲}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

جدول ۶ ماکزیمم خطای مطلق روش تکرار لژاندر-پیکارد را به‌ازای $N = ۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵$ نشان می‌دهد. به‌ازای $N = ۱۰$ خطای مطلق نقطه به نقطه‌ی روش تکرار لژاندر-پیکارد با خطای حاصل از روش‌های اختلال هموتوپی (HPM) [۳۴]، آنالیز هموتوپی (HAM) [۳۵]، کوادراتور نیوتن-کانتروویچ (NKQ) [۳۶]، هم‌محلی (CM) [۳۷] و قضیه‌ی مقدار میانی برای انتگرال‌ها (IMVT) [۳۸] در جدول ۷ مقایسه شده است. شکل ۴ جواب تقریبی و جواب دقیق را به‌همراه خطای مطلق روش به‌ازای $N = ۲۵$ و $\varepsilon = ۱۰^{-۲۰}$ نشان می‌دهد. به‌ازای مقادیر متفاوت N، نمودار لگاریتم خطا در شکل ۵ رسم شده است. ملاحظه می‌شود با افزایش N، خطا به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد.

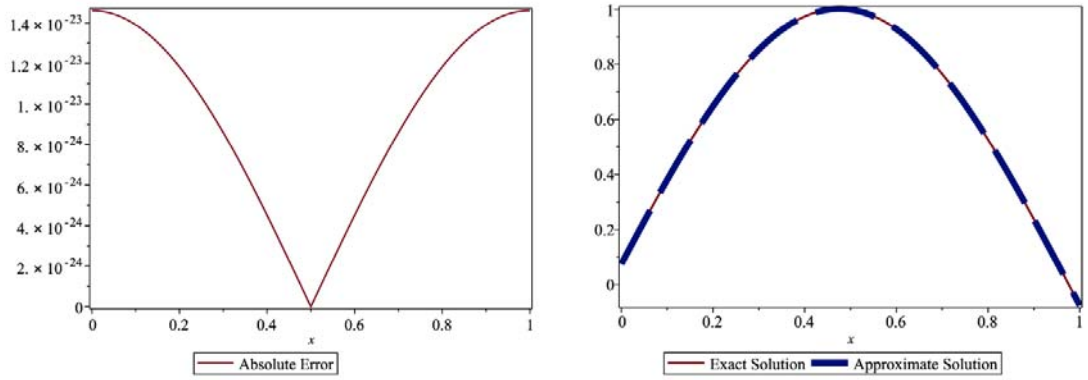
جدول ۶. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۰}$. (تعداد تکرارها = ۱۲)

N	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
L_∞	۱.۳۱۳۸۸۵×۱۰^{-۳}	۲.۰۴۸۱۰۹×۱۰^{-۹}	۶.۹۳۰۹۹۲×۱۰^{-۱۵}	۱.۵۷۵۶۸۲×۱۰^{-۲۲}	۱.۴۶۲۲۸۳×۱۰^{-۲۳}

جدول ۷. مقایسه‌ی خطای مطلق نقطه به نقطه‌ی روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۰}$ و روش‌های ارائه شده در [۳۸-۳۴].

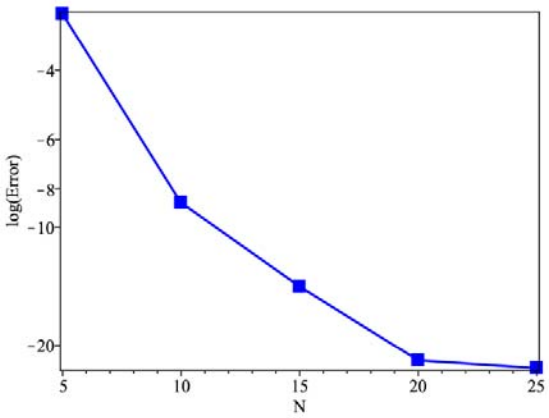
x	HPM [۳۴] $N=۵$	HAM [۳۵] $N=۱۵$	NKQ [۳۶] $m=۱,\ N=۲۰$	CM [۳۷] $N=۲۰$	IMVT [۳۸] $N=۲۵$	روش پیشنهادی $N=۲۰$
۰.۰	۱.۱۸۹۷۶۲×۱۰^{-۶}	۲.۵۶۱۸۶۵×۱۰^{-۸}	۰.۰۴۹۸۳۸	۰	۳.۱۹×۱۰^{-۱۶}	۱.۸۳۶۵۱۰×۱۰^{-۲۳}
۰.۱	۱.۱۳۱۵۳۱×۱۰^{-۶}	۲.۵۳۳۰۹۹×۱۰^{-۸}	۰.۰۴۷۳۹۹	۱.۸۴×۱۰^{-۷}		۱.۷۴۰۱۵۱×۱۰^{-۲۳}
۰.۲	۹.۶۲۵۳۷۹×۱۰^{-۷}	۲.۱۹۴۳۲۲×۱۰^{-۸}	۰.۰۴۰۳۲۰	۱.۵۶×۱۰^{-۷}		۱.۷۶۵۸۲۲×۱۰^{-۲۳}
۰.۳	۶.۹۹۳۲۴۵×۱۰^{-۷}	۱.۴۵۵۲۹۱×۱۰^{-۸}	۰.۰۲۹۲۹۴	۱.۱۴×۱۰^{-۷}	۳.۳۳×۱۰^{-۱۶}	۱.۳۰۵۸۹۹×۱۰^{-۲۳}
۰.۴	۳.۶۷۶۵۶۸×۱۰^{-۷}	۱.۰۶۴۷۶۲×۱۰^{-۸}	۰.۰۱۵۴۰۱	۵.۹۹×۱۰^{-۸}		۵.۱۱۱۵۵۸×۱۰^{-۲۴}
۰.۵	۰	۱.۸۴۰۲۳۷×۱۰^{-۸}	۰	۱.۱۱×۱۰^{-۱۶}		۰
۰.۶	۳.۶۷۶۵۶۸×۱۰^{-۷}	۶.۸۴۹۷۶۳×۱۰^{-۹}	۰.۰۱۵۴۰۱	۶.۹۰×۱۰^{-۸}	۱.۱۱×۱۰^{-۱۶}	۹.۶۲۱۲۵۵×۱۰^{-۲۴}
۰.۷	۶.۹۹۳۲۴۷×۱۰^{-۷}	۶.۰۸۷۲۳۸×۱۰^{-۱۰}	۰.۰۲۹۲۹۴	۱.۱۴×۱۰^{-۷}		۱.۸۵۱۸۳۸×۱۰^{-۲۳}
۰.۸	۹.۶۲۵۳۷۹×۱۰^{-۷}	۳.۵۵۱۰۷۲×۱۰^{-۹}	۰.۰۴۰۳۲۰	۱.۵۷×۱۰^{-۷}		۳.۳۰۶۱۵۳×۱۰^{-۲۳}
۰.۹	۱.۱۳۱۵۳۱×۱۰^{-۶}	۲.۸۱۹۶۵۱×۱۰^{-۹}	۰.۰۴۷۳۹۹	۱.۸۴×۱۰^{-۷}	۳.۸۹×۱۰^{-۱۶}	۳.۹۴۲۰۲۵×۱۰^{-۲۳}
۱.۰	۱.۱۸۹۷۶۲×۱۰^{-۶}	۴.۱۶۳۷۶۱×۱۰^{-۱۰}	۰.۰۴۹۸۳۸	۱.۹۴×۱۰^{-۷}		۱.۵۷۵۶۸۲×۱۰^{-۲۲}

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]



(ب) (آ)

شکل ۴. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای $N = ۲۵$ و شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۰}$.



شکل ۵. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۰}$.

مثال ۴,۵. معادله‌ی انتگرال غیرخطی

$$u(x) = -x^{۲} - \frac{۱}{۳}(۲\sqrt{۲} - ۱)x + ۲ + \int_{۰}^{۱} xt\sqrt{u(t)}dt, \quad ۰ \le x \le ۱, \tag{۶۳}$$

را با جواب دقیق $u(x) = ۲ - x^{۲}$ درنظر بگیرید. روش پیشنهادی به‌ازای $N = ۴$ بعد از ۲۰ تکرار، جواب تقریبی زیر را می‌دهد:

$$u(x) \simeq ۲.۰۰۰۰ + ۱.۹۴۳۱ \times ۱۰^{-۷} x - ۱.۰۰۰۰ x^{۲} + ۲.۳۱۳۲ \times ۱۰^{-۱۲۴} x^{۳} - ۹.۵۳۲۹ \times ۱۰^{-۱۲۵} x^{۴}. \tag{۶۴}$$

ماکزیمم خطای مطلق به‌دست آمده توسط روش تکرار لژاندر-پیکارد را به‌ازای مقادیر مختلف N در جدول ۸ گزارش نموده‌ایم. هم‌چنین این خطا را با خطای حاصل از روش‌های موجک هار (HWM) [۲۷،۳۹]، موجک هار کسری

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

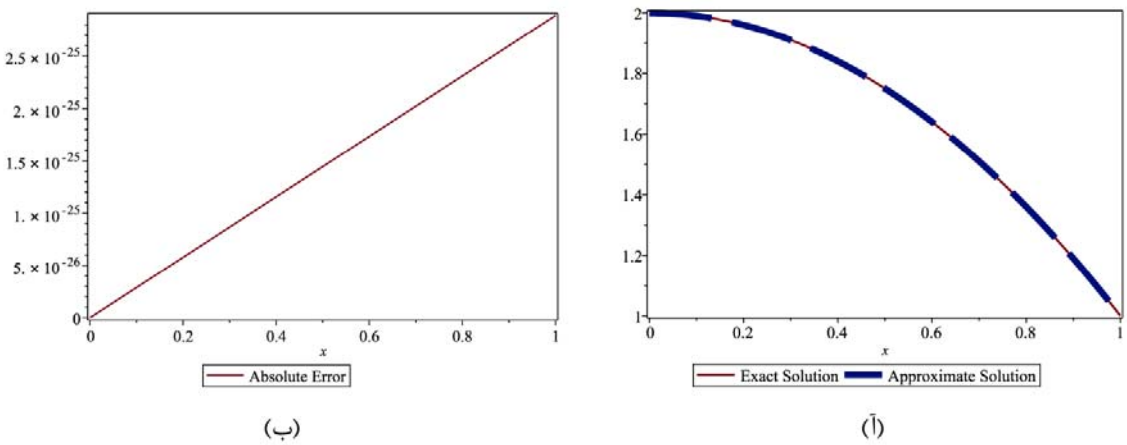
(RHWM) [۴۰]، قضـیه‌ی مقدار میانی وزن‌دار برای انتگرال‌ها (IMVT) [۳۸] و تکرار وردشـی بهبودیافته (MVIM) [۴۱]، در جدول ۹ مقایسه شده است. در شکل ۶ جواب تقریبی، جواب دقیق و خطای مطلق متناظر روش پیشنهادی را به‌ازای $N = ۲۰$ و $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$ رسـم نموده‌ایم. باتوجه به شـکل ۷ درمی‌یابیم با افزایش N، خطا به‌صـورت نمایی کاهش می‌یابد.

جدول ۸. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$. (تعداد تکرارها = ۳۲)

N	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
L_∞	۱.۹۴۳۰۵۷×۱۰^{-۷}	۴.۶۴۴۸۲۲×۱۰^{-۱۲}	۱.۶۱۲۴۹۹×۱۰^{-۱۶}	۶.۵۷۳۳۹۵×۱۰^{-۲۱}	۲.۸۸۹۷۴۶×۱۰^{-۲۵}

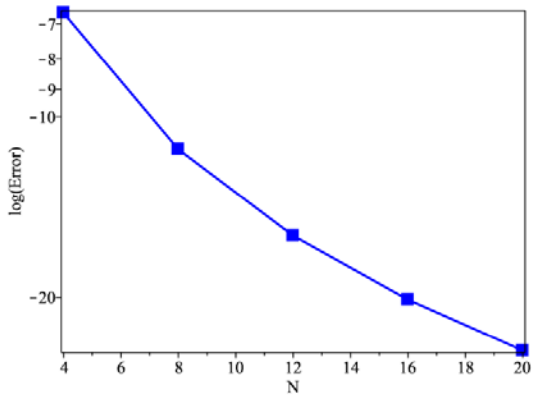
جدول ۹. مقایسه‌ی ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$ و روش‌های ارائه شده در [۴۱-۲۷،۳۸].

N	HWM [۲۷]	HWM [۳۹]	RHWM [۴۰]	IMVT [۳۸]	MVIM [۴۱]	روش پیشنهادی
۸	۲.۷×۱۰^{-۳}	۱.۰×۱۰^{-۳}	۳.۶×۱۰^{-۲}	۱.۶۳×۱۰^{-۳}	۳.۶۳۸۱×۱۰^{-۵}	۴.۶۴۴۸×۱۰^{-۱۲}
۱۶	۱.۱×۱۰^{-۳}	۲.۶×۱۰^{-۴}	۸.۸×۱۰^{-۳}	۴.۰۹×۱۰^{-۴}	۱.۲۷۹۶×۱۰^{-۱۰}	۶.۵۷۳۴×۱۰^{-۲۱}
۳۲	۳.۷×۱۰^{-۴}	۶.۶×۱۰^{-۵}	۷.۱×۱۰^{-۳}	۹.۹۴×۱۰^{-۵}	–	۴.۲۵۲۹×۱۰^{-۲۷}



شکل ۶. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای $N = ۲۰$ و شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۵}$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]



شکل ۷. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = 10^{-25}$.

مثال ۵,۵. معادله‌ی انتگرال غیر خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$u(x) = x + \frac{2-\pi}{16}x^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 x^2 t \arctan\big(u(t)\big)\,dt, \quad 0 \le x \le 1. \tag{۶۵}$$

جواب دقیق این معادله $u(x) = x$ به‌دست آید. به‌ازای $N = 5$ و شرط توقف $\varepsilon = 10^{-30}$، جواب تقریبی روش پیشنهادی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} u(x) \simeq\ & 1.34\times 10^{-126} + 1.0000x + 1.5824\times 10^{-10}x^2 - 1.8238\times 10^{-123}x^3 \\ & + 2.2372\times 10^{-123}x^4 - 9.5068\times 10^{-124}x^5. \end{aligned} \tag{۶۶}$$

برای برر سی کارایی روش تکرار لژاندر-پیکارد، جدول ۱۰ را تنظیم نموده‌ایم، که ماکزیمم خطای مطلق روش پی شنهادی را به‌ازای مقادیر مختلف N، نشان می‌دهد. هم‌چنین این خطا را در مقایسه با خطای حاصل از روش‌های موجک هار HWM [۲۷]، موجک هار کسری RHWM [۴۰] و پایه‌های شودر[1] SBM [۴۲] در جدول ۱۱ گردآوری نموده‌ایم. نمودارهای جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق نظیر به‌ازای $N = 25$ و $\varepsilon = 10^{-30}$ در شکل ۸ ترسیم شده است. شکل ۹ نمودار لگاریتم خطای مطلق حا صل از روش تکرار لژاندر-پیکارد را به‌ازای مقادیر متفاوت N نشان می‌دهد. جدول‌ها و شکل‌های ارائه شده، دقت و کارایی روش این مقاله را تأیید می‌کند.

جدول ۱۰. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف $\varepsilon = 10^{-30}$. (تعداد تکرارها = ۲۳)

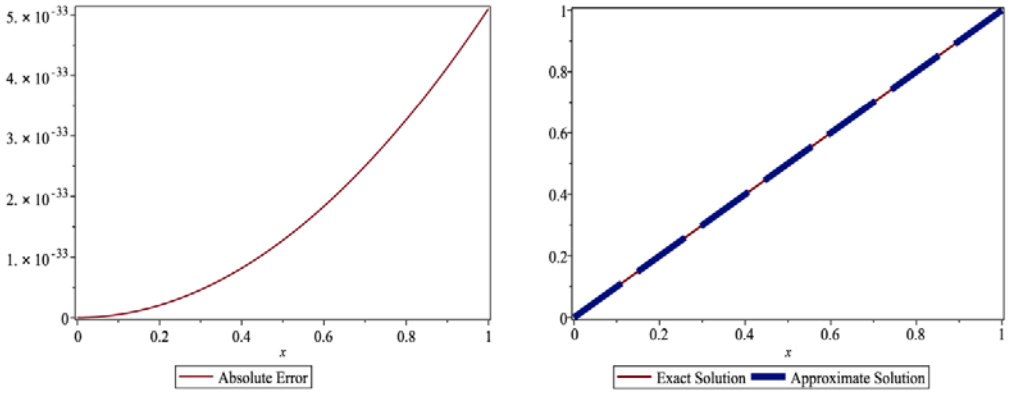
N	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
L_∞	1.5824227×10^{-10}	4.8908859×10^{-17}	3.3427780×10^{-24}	8.4623381×10^{-31}	8.3579784×10^{-33}

[1] Schauder

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

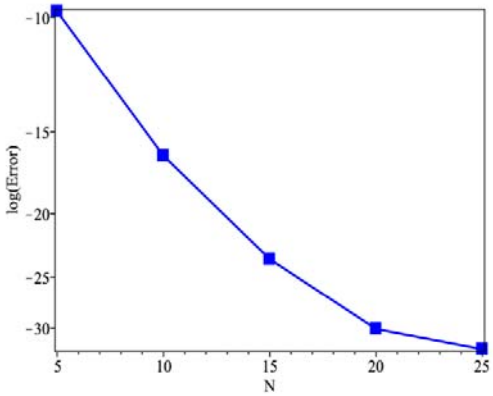
جدول ۱۱. مقایسه‌ی ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۳۰}$ و روش‌های ارائه شده در [۲۷،۴۰،۴۲].

روش پیشنهادی $N = ۷$	RHWM [۴۰] $k = ۷$	SBM [۴۲]	HVM [۲۷]
۵.۵۶۵۱۵۴×۱۰^{-۱۳}	۸.۹۷×۱۰^{-۷}	۲.۷۱×۱۰^{-۶}	۳.۴۰×۱۰^{-۵}



(ب) (آ)

شکل ۸. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای $N = ۲۵$ و شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۳۰}$.



شکل ۹. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۳۰}$.

مثال ۶,۵. معادله‌ی انتگرال غیرخطی زیر را درنظر بگیرید:

$$u(x) = f(x) + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} xe^{t}\sin\big(u(t)\big)\,dt, \quad ۰ \le x \le ۱, \tag{۶۷}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

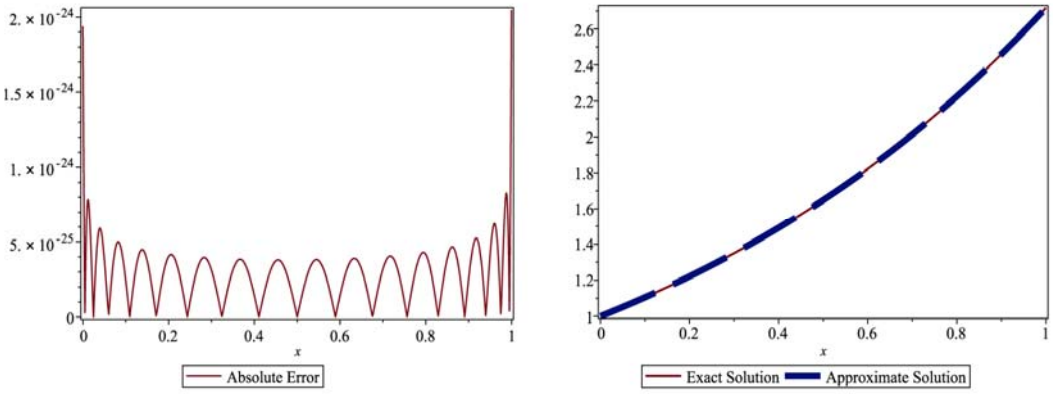
که در آن $f(x)$ به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود تا جواب دقیق $u(x)=e^x$ به‌دست آید. به‌ازای $N=۴$ و شرط توقف $\varepsilon=۱۰^{-۲۰}$، جواب تقریبی روش پیشنهادی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$u(x)\simeq ۱.۰۰۰۱+۰.۹۹۸۴۹x+۰.۵۱۰۳۹x^{۲}+۰.۱۳۹۹۵x^{۳}+۰.۰۶۹۳۳۵x^{۴}. \qquad (۶۸)$$

برای بررسی قابلیت اجرایی و دقت روش پیشنهادی، جدول ۱۲ فراهم شده است، که خطای $L_۲$ و L_∞ روش را در مقایسه با روش تکرار ورد شی بهبودیافته MVIM [۴۱]، به‌ازای مقادیر مختلف N نشان می‌دهد. در شکل ۱۰ نمودارهای جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق نظیر به‌ازای $N=۱۶$ و $\varepsilon=۱۰^{-۲۰}$ نشان داده شده است. نمودار لگاریتم خطای مطلق روش تکرار لژاندر-پیکارد به‌ازای مقادیر متفاوت N در شکل ۱۱ تأکید می‌کند که با افزایش N، دقت روش بالاتر رفته و خطا به‌طور نمایی کاهش می‌یابد.

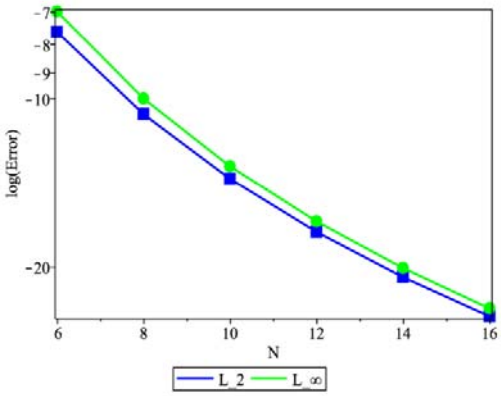
جدول ۱۲. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف $\varepsilon=۱۰^{-۲۰}$.(تعداد تکرارها = ۴۹)

N	روش عددی	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
$L_۲$	MVIM	۲.۴۹۸۱×۱۰^{-۵}	۴.۰۸۶۵×۱۰^{-۷}	۱.۱۰۴۰×۱۰^{-۱۰}	۶.۹۳۴۶×۱۰^{-۱۱}	۷.۲۹۰۶×۱۰^{-۱۳}	۳.۱۱۶۵×۱۰^{-۱۵}
	روش پیشنهادی	۲.۴۸۱۷×۱۰^{-۸}	۲.۱۵۸۰×۱۰^{-۱۱}	۱.۲۲۷۵×۱۰^{-۱۴}	۴.۹۲۱۷×۱۰^{-۱۸}	۱.۴۶۵۸×۱۰^{-۲۱}	۳.۳۶۹۶×۱۰^{-۲۵}
L_∞	MVIM	۱.۶۲۱۰×۱۰^{-۵}	۲.۳۱۱۶×۱۰^{-۷}	۵.۶۰۸۷×۱۰^{-۱۱}	۳.۲۲۴۵×۱۰^{-۱۱}	۳.۱۴۴۱×۱۰^{-۱۳}	۱.۳۳۲۲×۱۰^{-۱۵}
	روش پیشنهادی	۱.۰۲۰۶×۱۰^{-۷}	۹.۸۸۶۱×۱۰^{-۱۱}	۶.۱۳۴۱×۱۰^{-۱۴}	۲.۶۴۹۴×۱۰^{-۱۷}	۸.۴۱۷۹×۱۰^{-۲۱}	۲.۰۴۹۱×۱۰^{-۲۴}



شکل ۱۰. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای $N=۲۰$ و شرط توقف $\varepsilon=۱۰^{-۲۰}$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]



شکل ۱۱. لگاریتم خطای $L_۲$ و L_∞ روش پیشنهادی با شرط توقف $\varepsilon = ۱۰^{-۲۰}$.

۶. ملاحظات پایانی و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش تکرار لژاندر-پیکارد را برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم خطی و غیرخطی ارائه دادیم. برای به‌دســـت آوردن روش، دنباله‌ی تکرارهای پیکارد، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته و قاعده‌ی انتگرال‌گیری لژاندر-گاوس انتقال‌یافته به شکل مناسبی به‌کار گرفته شد تا روش تکراری پیشنهادی فرمول‌بندی شود. این روش اساساً یک روش تکراری است که به‌سادگی قابل پیاده‌سازی است و برخلاف روش‌های شبه طیفی و طیفی، نیازی به تقریب مشتق و انتگرال یا حل دســـتگاه‌های جبری ندارد؛ هم‌چنین به‌دلیل اســـتفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته، نیازی به تغییر و انتقال بازه در ساختار معادلات انتگرال نیست. برای افزایش کارایی روش تکرار لژاندر-پیکارد، یک ساختار برداری-ماتریسی ارائه دادیم، که مشاهده شد سرعت اجرای روش به قدر قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. در پایان کارایی روش تکرار لژاندر-پیکارد را با حل چند مثال نشان دادیم. ملاحظه می‌شود نتایج تقریبی تطابق مناسبی با جواب دقیق دارد، که نشان‌دهنده‌ی دقت و کاربردی بودن روش پیشنهادی است.

References

1. S. Lemita, H. Guebbai, New process to approach linear Fredholm integral equations defined on large interval, Eur. J. Math. **12**(1) (2019), DOI: 10.1142/S1793557119500098.
2. A. Alturk, Numerical solution of linear and nonlinear Fredholm integral equations by using weighted mean-value theorem, SpringerPlus **5** (2016), DOI: 10.1186/s40064-016-3645-8.
3. I. Suryani, M. Imran, M.D.H. Gamal, Composite Mendeleev's quadratures for solving a linear Fredholm integral equation of the second kind, Global J. Pure Appl. Math. **12**(4) (2016), 3493-3498.
4. A. Mennouni, N. E. Ramdani, K. Zennir, A new class of Fredholm integral equations of the

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

second kind with non-symmetric kernel: solving by wavelets method, Bol. Soc. Paran. Mat. (2019), Doi:10.5269/$bspm$.41734.

5. N. Koshev, L. Beilina, An adaptive finite element method for Fredholm integral equations of the first kind and its verification on experimental data, Cent. Eur. J. Math. **11**(8) (2013), 1489-1509.
6. M. Ahmadinia, H. Afshari A., M. Heydari, Numerical solution of Itô-Volterra integral equation by least squares method, Numer. Algorithms **84** (2020), 591-602.
7. Z. Masouri, Numerical expansion-iterative method for solving second kind Volterra and Fredholm integral equations using block-pulse functions, Adv. Comput. Tech. Electromagn. (2012), DOI:10.5899/2012/$acte$-00108.
8. Z. Avazzadeh, M. Heydari, W. Chen, G. B. Loghmani, Exponential convergence for numerical solution of integral equations using radial basis functions, J. Appl. Math. (2014), DOI:10.1155/2014/710437.
9. F. Mirzaee, E. Hadadiyan, A new improved hat function for numerical solution of linear Fredholm integral equations, Thai J. Math. **15**(1) (2017), 17-31.
10. H. O. Bakodah, Some modifications of Adomian decomposition method applied to nonlinear system of Fredholm integral equations of the second kind, Int. J. Contemp. Math. Sciences **7**(19) (2012), 929-942.
11. J. Biazar, H. Ebrahimi, Variational iteration method for Fredholm integral equations of the second kind, Iranian J. Optim. **1**(1) (2009), 11-17.
12. S.M. Mirzaei, Fredholm integral equations of the first kind solved by using the homotopy perturbation method, Int. J. Math. Anal. **5**(19) (2011), 935-940.
13. B. Ghanbari, On the convergence of the homotopy analysis method for solving Fredholm integral equations, Walailak J. Sci Tech. **10**(4) (2013), 395-403.
14. A.J. Mohammed, J.I. Mustafa, Construction of a new technique in Aitken extrapolation method for solving Fredholm integral equation of the first kind with iterated kernel, J. Edu. Sci. **21**(2) (2008), 143-149.
15. M. Muhammad, N. Ahniyaz, M. Masatake, S. Masaaki, Numerical solution of integral equations by means of the Sinc-collocation method based on the double exponential transformation, J. Comput. Appl. Math. **177**(2) (2005), 269-286.
16. S. Davaei far, Y. Ordokhani, Solving Fredholm integral equations with Bernstein multi-scaling functions, J. Sci. Kharazmi University **13**(2) (2013), 305-320.
17. J. Rashidinia, E. Babolian, Z. Mahmoodi, Spline collocation for Fredholm integral equations, Math. Sci. **5**(2) (2011), 147-158.
18. Y. Liu, Application of the Chebyshev polynomial in solving Fredholm integral equations, Math. Comput. Model. **50**(3-4) (2009), 465-469.
19. H. Guo, H. Cai, X. Zhang, A Jacobi-collocation method for second kind Volterra integral equations with a smooth kernel, Abstr. Appl. Anal. (2014), DOI: 10.1155/2014/913691.
20. Nemati Saray, Sparse multiscale representation of Galerkin method for solving linear□mixed Volterra□Fredholm integral equations, Math. Methods Appl. Sci. **43**(5) (2020), 2601-2614.
21. A.M. Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations: methods and applications, Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2011.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

22. J. Junkins, A. B. Younes, R. M. Woollands, X. Bai, Picard iteration, Chebyshev polynomials and Chebyshev-Picard methods: Application in astrodynamics, J. Astronaut. Sci. **60**(3) (2013), 623-653.

23. M. Tafakkori-Bafghi, G.B. Loghmani, M. Heydari, X. Bai, Jacobi-Picard iteration method for the numerical solution of nonlinear initial value problems, Math. Meth. Appl. Sci. **43**(3) (2020), 1084-1111.

24. J.Shen, T. Tang, L. L. Wang, Spectralmethods: algorithms, analysis and applications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.

25. A. Bellour, D. Sbibih, A. Zidna, Two cubic spline methods for solving Fredholm integral equation, Appl. Math. Comput. **276** (2016), 1-11.

26. E. Love, The electrostatic field of two equal circular conducting disks, Q. J. Mech. Appl. Math. **2**(4) (1949), 420-451.

27. Ü. Lepik, E. Tamme, Solution of nonlinear Fredholm integral equations via the Haar wavelet method, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. **56**(1) (2007), 17-27.

28. M. Reihani, Z.Abadi, Rationalized Haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations, J. Comput. Appl. Math. **200**(1) (2007), 12-20.

29. C. Cattani, A. Kudreyko, Harmonic wavelet method towards solution of the Fredholm type integral equations of the second kind, Appl. Math. Comput. **215**(12) (2010), 4164-4171.

30. Müller, W. Varnhorn, On approximation and numerical solution of Fredholm integral equations of second kind using quasi-interpolation, Appl. Math. Comput. **217**(13) (2011), 6409-6416.

31. S. Islam, I. Aziz, A. Al-Fhaid, An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders, J. Comput. Appl. Math. **260** (2014), 449-469.

32. S. Panda, S. Martha, A. Chakrabarti, A modified approach to numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind, Appl. Math. Comput. **271** (2015), 102-112.

33. S. Amiri, M, Hajipour, D. Baleanu, On accurate solution of the Fredholm integral equations of the second kind, Appl. Numer. Math. **150** (2020), 478-490.

34. J. Biazar, H. Ghazvini, Numerical solution for special non-linear Fredholm integral equation by HPM, Appl. Math. Comput. **195**(2) (2008), 681-687.

35. Awawdeh, A. Adawi, S. Al-Shara, A numerical method for solving nonlinear integral equations, Int. Math. Forum **4**(17) (2009), 805-817.

36. J. Saberi-Nadjafi, M. Heidari, Solving nonlinear integral equations in the Urysohn form by Newton-Kantorovich-quadrature method, Comput. Math. Appl. **60**(7) (2010), 2058-2065.

37. N. Ebrahimi, J. Rashidinia, Collocation method for linear and nonlinear Fredholm and Volterra integral equations, Appl. Math. Comput. **270** (2015), 156-164.

38. H. Li, J. Huang, A novel approach to solve nonlinear Fredholm integral equations of the second kind, SpringerPlus **5** (2016), DOI: 10.1186/s40064-016-1810-8.

39. I. Aziz, S.Islam, New algorithms for the numerical solution of nonlinear Fredholm and Volterra integral equations using Haar wavelets, J. Comput. Appl. Math. **239** (2013), 333-345.

40. M. Erfanian, M. Gachpazan, H. Beiglo, Rationalized Haar wavelet bases to approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations with error analysis, Appl. Math. Comput. **265** (2015),

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

304-312.

41. M. H. Daliri, J. Saberi-Nadjafi, Improved variational iteration method for solving a class of nonlinear Fredholm integral equations, SeMA J. **76** (2019), 65-77.

42. M. I. Berenguer, M. F. Muñoz, A. G. Guillem, M.R. Galán, Numerical treatment of fixed point applied to the nonlinear Fredholm integral equation, Fixed Point Theory Appl. (2009), DOI:10.1155/2009/735638.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]