Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

On computation of some types Krasner hyperrings of order less than 4 and their automorphisms

Yaser Vazirih[1], Mansour Ghadiri[2], Saeed Mirvakili[3]

1. Department of Mathematics, Yazd University, Yazd, Iran.
   E-mail: forutan.vaziri@yahoo.com
2. Department of Mathematics, Yazd University, Yazd, Iran.
   ✉E-mail: mghadiri@yazd.ac.ir
3. Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran.
   E-mail: saeed_mirvakili@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:

Received:
17 October 2020
Received in revised form:
14 April 2021
Accepted:
10 May 2021
Published online:
20 June 2023

Keywords:

Krasner hyperring,
enumerate,
polygroup,
semigroup,
automorphism.

ABSTRACT

Introduction

Hyperstructure theory was founded in 1934 at the 8th congress of Scandinavian Mathematicians. Marty introduced the hypergroups as a generalization of groups in order to study problems in non-commutative algebra, such as cosets determined by non-invariant subgroups and then he proved its utility in solving some problems of groups, algebraic functions and rational fractions. Now this field of modern algebra is widely studied from the theoretical and applied viewpoints because of their applications can be used in the following areas: optimization theory, theory of discrete event dynamical systems, formal language theory, geometry, graphs, fuzzy sets, cryptography, automata, lattices binary relations, analysis of computer programs, codes and artificial intelligence have been extensively studied in the literature.

M. Krasner was the first to expand hypercompositional structures via the creation of structures containing composition and hypercompositions. Thus in 1956, he replaced the additive group of a field with a special hypergroup, thereby introducing the hyperfield. He then used the hyperfield as the proper algebraic tool, in order to define a certain approximation of complete valued fields by sequences of such fields. Later, he introduced a more general structure, which relates to hyperfields in the same way rings relate to fields. He called this structure hyperring. Additional hypercompositional structures, similar to the above, introduced by various researchers, soon followed. Examples of those are the superring and the superfield, in which both the addition and the multiplication are hypercompositions. Additionally, the study of formal languages introduced structures in which the hypercompositional component is a join hypergroup. Hyperstructures are much more flexible and varied than classical algebraic structures. For examples if H is of prime order p, there are a large number of non-isomorphic hypergroups on H while up to isomorphism, there is only one group $\mathbb{Z}_p$. This becomes clear in this paper, which enumerates the Krasner and new classes of hyperrings of order less than 4 and their automorphism groups. An important case in algebraic structures is characterize of them. Our aim in this paper is characterizing of Krasner hyperrings and new classes of

hyperrings of order less than 4 and then determine their automorphisms groups that is useful for researchers, Ph.D. students and et al.

Material and methods

There are only 10 non-isomorphic canonical hypergroups of order 3. For obtain the all hyperrnigs we need to all permutations of members respect to multiplications of semigroups with zero of order 3. We obtain 8 semigroups of order 3 with zero element up to isomorphism.

According to the number of canonical hypergroups and semigroups of order 3, with the help of a computer program, we calculate the types Krasner hyperrings of order 3 up to isomorphism.

Results

With the notation below, all the hyperrings introduced in definitions 2-2 and 2-3 of the third order are stated in one table.

=	Krasner Hyperring
$\cap$	Weak Distributive Krasner Hyperring
$\subseteq$	Left Inclusion Distributive Krasner Hyperring
$\supseteq$	Right Inclusion Distributive Krasner Hyperring
L	left Near Krasner Hyperring
R	Right Near Krasner Hyperring

We note that the relation "=" imply the relations "$\cap$", "$\supseteq$", "$\subseteq$", "L" and "R", the relation "$\supseteq$" implies the relation "$\cap$" and the relation "$\subseteq$" implies the relation "$\cap$".

R	$\bullet_1$	$\bullet_2$	$\bullet'_2$	$\bullet_3$	$\bullet'_3$	$\bullet_4$	$\bullet'_4$	$\bullet_5$	$\bullet'_5$	$\bullet_6$	$\bullet'_6$	$\bullet_7$	$\bullet'_7$	$\bullet_8$	$\bullet'_8$	$\bullet_9$	$\bullet_{10}$	$\bullet'_{10}$	$\bullet_{11}$	$\bullet_{12}$
$+_1$	=	=			=			L	L $\subseteq$		$\subseteq$	R	R $\subseteq$						R	L
$+_2$	=	$\supseteq$			$\supseteq$			L	L $\cap$		$\subseteq$	R	R $\cap$		$\subseteq$			$\subseteq$	R	L
$+_3$	=	$\subseteq$			$\subseteq$			L	L $\subseteq$		$\subseteq$	R	R $\subseteq$	$\subseteq$			$\subseteq$		R	L
$+_4$	=	=			=			L	L $\subseteq$		$\subseteq$	R	R $\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$		$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$ R	L $\subseteq$
$+_5$	=	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	=	=	$\cap$ L	L $\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$ R	R $\cap$			$\cap$			R	L
$+_6$	=	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$ L	L $\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$ R	R $\cap$		$\subseteq$	$\cap$		$\subseteq$	R	L
$+_7$	=	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	=	=	$\cap$ L	L $\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$ R	R $\cap$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\cap$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$ R	L $\subseteq$
$+_8$	=	$\supseteq$	$\supseteq$	$\supseteq$	$\supseteq$	=	=	L $\supseteq$	L $\supseteq$	$\supseteq$	$\supseteq$	$\supseteq$ R	R $\supseteq$	$\supseteq$	$\supseteq$	$\supseteq$	$\supseteq$	$\supseteq$	$\supseteq$ R	L $\supseteq$
$+_9$	=					=	=	L	L			R	R						R	L
$+_{10}$	=	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	=	=	$\cap$ L	L $\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$ R	R $\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$ R	L $\cap$

But in general:
The relation "⋂" does not result in the relation "⊇", see example $(R, +_{10}, \bullet_{11})$.
The relation "⋂" does not result in the relation "⊇", see example $(R, +_{10}, \bullet_{11})$
The relation "⊆"does not result in the relation "=", see example $(R, +_2, \bullet'_8)$.
The relation "⊇" does not result in the relation "=", see example $(R, +_2, \bullet_2)$.
The relation "⋂" does not result in the relation "=", see example $(R, +_{10}, \bullet_{11})$.
The relation "L" does not result in the relation "=", see example $(R, +_{10}, \bullet_{12})$
.
The relation "R" does not result in the relation "=", see example $(R, +_{10}, \bullet_{11})$.

Conclusion

According to the theorems and results of this article, the following counts for hyperrings were obtained up to isomorphism:

Table of the number of hyperrings and near yperrin of order 3

	Commutative	Non-commutative	Total
Krasner Hyperring	19	0	19
Krasner Hyperfield	5	0	19
Weak Distributive Krasner Hyperring	83	13	96
Left Inclusion Distributive Krasner Hyperring	37	10	47
Right Inclusion Distributive Krasner Hyperring	27	4	31
left Near Krasner Hyperring	19	25	44
Right Near Krasner Hyperring	19	25	44

For the future works, Krasner hyperrings of order 4 or a special class of them can be characterized by a similar method. Also, considering that hypervector spaces are defined on Krasner hyperfields and hypermodules are defined on Krasner hyperrings, the results stated in this article are useful in counting and classifying these hyperstructures. Also, it will be possible to characterize hyperrings made of Krasner and polysymmetric hyperrings using their automorphism groups in small orders.

How to cite: Vazirih, Y., Ghadiri, M., Mirvakili, S. (2023). On computation of some types Krasner hyperrings of order less than and their automorphisms. *Mathematical Researches*, 9 (1), 246-263.

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/
Kharazmi University

رده‌بندی (شبه) ابرحلقه‌های کراسنر تا مرتبهٔ ۴

یاسر وزیری[۱]، منصور قدیری[۲]✉، سعید میروکیلی[۳]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: forutan.vaziri@yahoo.com
۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه یزد، یزد ، ایران. رایانامه: mghadiri@yazd.ac.ir
۳. ، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: saeed_mirvakili@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۲۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۲۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

واژه‌های کلیدی:
ابرحلقه کراسنر،
ابرمیدان کراسنر،
ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف،
ابرحلقه کراسنر شمولی چپ (راست)،
شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ (راست)،
گروه خودریختی.

چکیده

در حد یکریختی به تعداد ۱۰ ابرگروه کانونی و ۱۲ نیم‌گروه با عضو صفر از مرتبهٔ ۳ وجود دارند. در این مقاله، به بررسی توزیع‌پذیری عمل نیم‌گروه‌ها نسبت به ابرعمل ابرگروه‌های کانونی تا مرتبهٔ ۴ به کمک محاسبات کامپیوتری پرداخته می‌شود. سپس ابرحلقه‌ها و ابرمیدان‌های کراسنر و کلاس‌های جدیدی از ابرحلقه‌ها (ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف، ابرحلقه کراسنر شمولی چپ، ابرحلقه کراسنر شمولی راست، شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ و شبه‌ابرحلقه کراسنر راست) با مرتبه‌های کمتر از ۴ شمارش و در حد یکریختی رده‌بندی می‌شوند. در پایان، گروه‌های خودریختی ابرحلقه‌های کراسنر به دست آمده را می‌یابیم.

استناد: وزیری، یاسر؛ قدیری، منصور؛ میروکیلی، سعید؛ (۱۴۰۲). رده‌بندی (شبه) ابرحلقه‌های کراسنر تا مرتبهٔ ۴. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۱)، ۲۶۳-۲۴۶.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

کراسنر نخستین کسی بود که از طریق ایجاد ساختارهایی حاوی عمل و ابرعمل، مفهوم ابرحلقه را ارائه کرد. او همچنین گروه جمعی یک میدان را با ابرگروه خاصی جایگزین و ابرمیدان را معرفی کرد [۱۴]. در مرجع [۱۰] انواع ابرحلقه‌ها و کاربردهای آن را می‌توان دید. در بین انواع ابرحلقه‌های معرفی شده، ابرحلقه های کراسنر به دلیل نزدیک بودن آن به حلقه‌های معمولی مورد توجه بیشتر محققان قرار گرفته است. رده‌بندی و شمارش حلقه‌ها و میدان‌ها از یک مرتبه معین و در حد یکریختی یک موضوع اساسی در نظریه حلقه ها و میدان‌ها است. پرداختن به این موضوع در نظریه ابرساختارها نیز مدتی است توسط پژوهشگران در حال انجام است. با توجه به تعداد زیاد ابرعمل‌ها در مقایسه با عمل‌های روی یک مجموعه، رده‌بندی و شمارش ابرساختارها قابل مقایسه با رده‌بندی و شمارش ساختارهای جبری نیستند. به عنوان نمونه دو گروه از مرتبۀ ۴ در حد یک‌ریختی وجود دارند ولی تعداد H_v-گروه‌های آبلی مرتبۀ ۴ بالای هشت میلیارد هستند [۵]. در مراجع [۵، ۷، ۱۸] با محاسبات کامپیوتری تعداد ابرگروه‌ها و H_v-گروه‌ها مشخص شده است.

از آن‌جا که مطالعه و بررسی ابرساختارهای متناهی حاکم بر پدیده‌های مادی مورد توجه تعدادی از پژوهشگران قرار گرفته است[۱، ۲، ۹، ۱۱، ۱۲]، لذا مشخص شدن تعداد و شکل ساختاری این ابرساختارها برای شناخت بهتر روابط حاکم بر پدیده‌های مادی مورد بررسی، مفید خواهند بود. تعداد ابرحلقه‌های مرتبه ۳ شمارش شده بوسیله کامپیوتر و بدون رده‌بندی به تعداد ۳۳،۲۷۷،۶۴۲ است[۴]. عامری و همکاران [۳] تعداد ابرمیدان‌های(از نوع کراسنر) تا مرتبه ۶ را بوسیله برنامه کامپیوتری شمارش کرده‌اند. ایرانمنش و همکاران [۱۳] پلی‌گروه‌ها و ابرمیدان‌های کراسنر مرتبۀ ۴ را شمارش کرده‌اند. در مقاله [۴] فقط تعداد ابرحلقه‌های مرتبه ۳ بدون هیچگونه دسته‌بندی انجام شده است. همچنین، در مقالات [۳، ۱۳] ابرمیدان‌های کراسنر از مرتبه کوچک شمارش شده‌اند. در خصوص ابرحلقه‌های کراسنر و مشخص سازی آن‌ها بوسیله جداول کیلی آن تاکنون کاری انجام نشده است و این ایده باعث شد تا ابرحلقه‌های کراسنر و انواع دیگر ابرحلقه‌های مرتبط را در حد یک‌ریختی شمارش و رده‌بندی کنیم. یکی از کاربردهای مستقیم رده‌بندی ابرحلقه‌ها و ابرمیدان‌های کراسنر، مطالعه و شناخت عمیق‌تر ابرفضاهای برداری روی ابرمیدان‌های کراسنر و ابرمدول‌ها روی ابرحلقه‌های کراسنر هستند. همچنین، شمارش ابرحلقه‌های کامل، ابرحلقه‌های چندمتقارن [۱۵] ساخته شده از ابرحلقه کراسنر و (H,R) -ابرحلقه‌ها با استفاده از رده‌بندی ابرحلقه‌های کراسنر و داشتن گروه‌های خودریختی آن‌ها، در مرتبه‌های کوچک امکان‌پذیر خواهد بود.

در این مقاله، با استفاده از ابرگروه‌های کانونی و نیم‌گروه‌های ۳ عضوی، الگوریتم کامپیوتری با موضوع بررسی انواع توزیع‌پذیری عمل نیم‌گروه روی ابرعمل ابرگروه کانونی متناظر تهیه شده و محاسبات انجام شده است. در این‌جا علاوه بر شمارش، ساختار ابرحلقه و جداول کیلی آن نیز به طور دقیق مشخص شده است. در بخش ۲، تعاریف مورد نیاز آورده شده و در خصوص یک‌ریختی بین دو ابرحلقه قضایا و نتایجی بیان شده است. در بخش ۳، تعداد دقیق (در حد یک‌ریختی) تمامی ابرحلقه‌ها و

ابرمیدان‌های کراسنر و کلاس‌های جدیدی از ابرحلقه‌ها (ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف، ابرحلقه کراسنر شمولی چپ، ابرحلقه کراسنر شمولی راست، شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ و شبه‌ابرحلقه کراسنر راست) با مرتبه‌های کمتر از ۴ مشخص و رده‌بندی می‌شوند. در بخش ۴، گروه خودریختی ابرحلقه‌های کراسنر تا مرتبه کمتر از ۴ را به دست آورده و در پایان نتایج این مقاله در سه جدول ارائه می‌شوند.

۲. مفاهیم پایه

مجموعه غیرتهی H به همراه نگاشت $\circ: H \times H \to P^*(H)$ (نگاشت $\circ$ را ابرعمل می‌گویند و $P^*(H)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های غیرتهی H می‌باشد) که در دو شرط زیر صدق کند را یک ابرگروه می‌نامند:

(۱) شرکت‌پذیری: به ازای هر $x, y, z \in H$، $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

(۲) اصل تکثیر: به ازای هر $x \in H$، $x \circ H = H \circ x = H$.

فرض کنید A و B دو زیرمجموعه غیرتهی از H باشند، آن‌گاه قرار می‌دهیم $A \circ B = \bigcup\{a \circ b | a \in A, b \in B\}$. همچنین به جای $A \circ \{x\}$ و $\{x\} \circ A$ به ترتیب از $A \circ x$ و $x \circ A$ استفاده می‌کنیم.

ابرگروه‌های کانونی اولین بار توسط کراسنر در معرفی ابرحلقه‌های کراسنر مورد استفاده قرار گرفت [۱۴]. پلی‌گروه‌ها حالت کلی‌تر ابرگروه‌های کانونی هستند.

تعریف ۲-۱:[۸] ابرساختار $(P, \circ, e, ^{-1})$ را **پلی‌گروه** گوییم هرگاه $e \in P$، $^{-1}$ یک عملگر یکانی روی P، " $\circ$ " یک ابرعمل روی P و اصول زیر برقرار است:

(۱) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$،

(۲) $x \circ e = e \circ x = x$،

(۳) اگر $x \in y \circ z$ آنگاه $y \in x \circ z^{-1}$ و $z \in y^{-1} \circ x$.

یک پلی‌گروه جابه‌جایی را **ابرگروه کانونی** می‌نامیم.

ابرحلقه‌های کراسنر نوع خاصی از ابرحلقه‌ها هستند که به حلقه‌های معمولی نزدیکترند. این نوع از ابرحلقه‌ها برای اولین بار توسط کراسنر تعریف و مورد بررسی قرار گرفت.

تعریف ۲-۲:[۱۰] یک ابرساختار $(R,+,\bullet)$ را **ابرحلقه کراسنر** گوییم هرگاه:

(۱) $(R,+,e,{}^{-1})$ یک ابرگروه کانونی باشد.

(۲) $(R,\bullet)$ یک نیم‌گروه با عنصر **صفر** e باشد، یعنی برای هر $x\in R$ داشته باشیم $x\bullet e=e\bullet x=e$ (e را صفر ابرحلقه می‌نامیم).

(۳) توزیع پذیری عمل " $\bullet$ " نسبت به ابرعمل " $+$ " از چپ و راست برقرار باشد، یعنی برای هر $x,y,z\in R$،

$$(D)\qquad x\bullet(y+z)=x\bullet y+x\bullet z,\qquad (x+y)\bullet z=x\bullet z+y\bullet z.$$

ابرحلقه کراسنر $(R,+,\bullet)$ را **ابرحلقه تقسیم کراسنر** گوییم، هرگاه $(R-\{e\},\bullet)$ یک گروه باشد.

ابرحلقه کراسنر $(R,+,\bullet)$ را **ابرمیدان کراسنر** گوییم، هرگاه $(R-\{e\},\bullet)$ یک گروه آبلی باشد.

ابرحلقه کراسنر $(R,+,\bullet)$ را **ابرحلقه کراسنر صفر** گوییم هرگاه به ازای هر $x,y\in R$ داشته باشیم $x\bullet y=e$ که در آن e عضو صفر R است.

تعریف ۲-۳: ابرساختار تعریف ۲-۲ را:

ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف گوییم هرگاه شرط (D) را با شرط‌های زیر جایگزین کنیم:

$$(WD)\quad (x+y)\bullet z\cap x\bullet z+y\bullet z\neq\Phi,\qquad x\bullet(y+z)\cap x\bullet y+x\bullet z\neq\Phi.$$

ابرحلقه کراسنر شمول چپ گوییم هرگاه شرط (D) را با شرط‌های زیر جایگزین کنیم:

$$(LID)\quad (x+y)\bullet z\subseteq x\bullet z+y\bullet z,\qquad x\bullet(y+z)\subseteq x\bullet y+x\bullet z.$$

ابرحلقه کراسنر شمول راست گوییم هرگاه شرط (D) را با شرط‌های زیر جایگزین کنیم:

$$(RID)\quad (x+y)\bullet z\supseteq x\bullet z+y\bullet z,\qquad x\bullet(y+z)\supseteq x\bullet y+x\bullet z.$$

شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ گوییم هرگاه شرط (D) را با شرط زیر جایگزین کنیم:

$$(RnD)\quad x\bullet(y+z)=x\bullet y+x\bullet z.$$

شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ گوییم هرگاه شرط (D) را با شرط زیر جایگزین کنیم:

$$(LnD)\quad (x+y)\bullet z = x\bullet z + y\bullet z.$$

ابرساختارهای فوق را **جابجایی** گوییم هرگاه $(R,\bullet)$ جابجایی باشد. شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ و شبه‌ابرحلقه‌های کراسنر راست، غیرجابه‌جایی هستند. در این مقاله منظور از ابرحلقه یکی از تعاریف ۲-۲ یا ۲-۳ است.

برای راحتی کار نماد $x\bullet y$ را با xy نمایش می‌دهیم.

لم ۲-۴: (۱) اگر $(R,+,\bullet)$ یک ابرحلقه کراسنر باشد آنگاه یک ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف، ابرحلقه کراسنر شمول چپ، ابرحلقه کراسنر شمول راست، شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ و شبه‌ابرحلقه کراسنر راست نیز است.

(۲) اگر $(R,+,\bullet)$ یک ابرحلقه کراسنر شمول چپ یا راست باشد آن‌گاه یک ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف نیز است.

نگاشت یک به یک و پوشای $f: R_1 \to R_2$ از ابرحلقه‌ها را یکریخت گوییم هرگاه $f(x+y)=f(x)+f(y)$ و $f(xy)=f(x)f(y)$. در این مورد می‌گوییم R_1 و R_2 یک‌ریخت هستند و با $R_1 \cong R_2$ نشان می‌دهیم.

لم ۲-۵: فرض کنید $(R,+,\bullet)$ و $(R,+',\bullet')$ دو ابرحلقه یک‌ریخت با عضو صفر e باشند. آن‌گاه $(R,+)$ و $(R,+')$ دو ابرگروه کانونی یک‌ریخت و $(R,\bullet)$ و $(R,\bullet')$ دو نیم‌گروه یک‌ریخت هستند.

اثبات. اگر $f: R\to R$ یک‌ریختی بین $(R,+,\bullet)$ و $(R,+',\bullet')$ باشد، آن‌گاه f یک‌ریختی بین دو ابرگروه کانونی $(R,+)$ و $(R,+')$ و f یک‌ریختی بین دو نیم‌گروه $(R,\bullet)$ و $(R,\bullet')$ است.

نتیجهٔ ۲-۶: فرض کنید $(R,+,\bullet)$ و $(R,+,\bullet')$ دو ابرحلقه با عضو صفر e باشند. اگر $(R,\bullet)$ و $(R,\bullet')$ دو نیم‌گروه غیریکریخت باشند، آنگاه $(R,+,\bullet)$ و $(R,+,\bullet')$ دو ابرحلقه غیریک‌ریخت هستند.

نکتهٔ ۲-۷: فرض کنید $(R,+,\bullet)$ و $(R,+,\bullet')$ دو ابرحلقه با عضو صفر e باشند. اگر $(R,\bullet)$ و $(R,\bullet')$ دو نیم‌گروه یک‌ریخت باشند، آن‌گاه ممکن است $(R,+,\bullet)$ و $(R,+,\bullet')$ دو ابرحلقه یک‌ریخت یا غیریک‌ریخت باشند. به عنوان مثال ابرحلقه‌های توزیع‌پذیر ضعیف کراسنری $(R,+_6,\bullet_7')$ و $(R,+_6,\bullet_7)$ در قضیه۳-۲۱ غیریک‌ریخت هستند، در حالی که نیم‌گروه‌های $(R,\bullet_7)$ و $(R,\bullet_7')$ یک‌ریخت هستند.

نکتهٔ ۲-۸: فرض کنید $(R,+,\bullet)$ و $(R,+,\bullet')$ دو ابرساختار با عضو صفر e باشند. اگر $(R,\bullet)$ و $(R,\bullet')$ دو نیم‌گروه یک‌ریخت باشند، آن‌گاه ممکن است $(R,+,\bullet)$ ابرحلقه و $(R,+,\bullet')$ ابرحلقه نباشد. به عنوان مثال بنا به قضیهٔ۳-۸،

$(R,+_9,\bullet_4)$ یک ابرحلقه کراسنر است ولی $(R,+_9,\bullet'_4)$ ابرحلقه کراسنر نیست. درحالی که نیم‌گروه‌های $(R,\bullet_4)$ و $(R,\bullet'_4)$ یک‌ریخت هستند.

نتیجهٔ ۲-۹: فرض کنید $(R,+,\bullet)$ و $(R,+',\bullet)$ دو ابرحلقه با عضو صفر e باشند. اگر $(R,+)$ و $(R,+')$ دو ابرگروه کانونی غیریک‌ریخت باشند، آن‌گاه $(R,+,\bullet)$ و $(R,+',\bullet)$ دو ابرحلقه غیریک‌ریخت هستند.

قضیهٔ ۲-۱۰: فرض کنید $(R,+,\bullet)$ یک ابرحلقه باشد. اگر $(R,\bullet)$ و $(R,\bullet')$ دو نیم‌گروه یک‌ریخت باشند آن‌گاه ابرعمل $+'$ وجود دارد به‌طوری که دو ابرگروه کانونی $(R,+)$ و $(R,+')$ یک‌ریخت هستند و $(R,+',\bullet) \cong (R,+,\bullet')$.

اثبات: فرض کنید $f:(R,\bullet) \to (R,\bullet')$ یک‌ریختی نیم‌گروهی باشد. در این صورت ابرعمل $+'$ را برای هر $x,y \in R$ به صورت $x+'y = f^{-1}(f(x)+f(y))$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $(R,+')$ ابرگروه کانونی و یکریخت با $(R,+)$ است و این یک‌ریختی با تابع $f:(R,+') \to (R,+)$ می‌باشد. حال $f:(R,+',\bullet) \to (R,+,\bullet')$ یکریختی ابرحلقه‌ای نیز می‌باشد.

نتیجهٔ ۲-۱۱: اگر $(R,+)$ ابرگروه کانونی با عضو همانی e و $(R,\bullet)$ نیم‌گروه با صفر e باشد، آن‌گاه تمام ابرحلقه‌های غیریکریخت $(R,+,\bullet')$ وقتی $(R,\bullet)$ با $(R,\bullet')$ یکریخت هست با تمام ابرحلقه‌های غیریکریخت $(R,+',\bullet)$ وقتی $(R,+)$ با $(R,+')$ یکریخت هست، تناظری یک به یک دارند.

نتیجهٔ ۲-۱۲: اگر $(R,+)$ ابرگروه کانونی با عضو همانی e و $(R,\bullet)$ نیم‌گروه با صفر e باشد، آنگاه تمام ابرحلقه‌های غیریکریخت $(R,+,\bullet')$ وقتی $(R,\bullet)$ با $(R,\bullet')$ یکریخت هست با تمام ابرحلقه‌های غیریکریخت $(R,+'',\bullet'')$ وقتی $(R,+'')$ با $(R,+')$ یک‌ریخت و $(R,\bullet'')$ با $(R,\bullet')$ یک‌ریخت هستند، تناظری یک به یک دارند.

۳. رده‌بندی ابرحلقه‌ها و ابرمیدان‌های کراسنری

در این بخش تمامی ابرحلقه‌های کراسنری را از مرتبه ۲ و ۳ بررسی و آن‌ها را در حد یکریختی رده‌بندی می‌کنیم.
به راحتی می‌توان دید فقط یک ابرحلقه کراسنر $(R=\{e\},+,\bullet)$ تک عضوی وجود دارد و در نتیجه فقط یک ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف، ابرحلقه کراسنر شمولی چپ، ابرحلقه کراسنر شمولی راست، شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ و شبه‌ابرحلقه کراسنر راست از مرتبه یک وجود دارد که همه‌ی آن‌ها جابه‌جایی هستند.
حال فرض کنید $R=\{e,a\}$. ابتدا ابرگروه‌های کانونی و سپس نیم‌گروه‌های مرتبهٔ دو را مشخص کرده و در نهایت قانون توزیع‌پذیری را بررسی می‌کنیم.

لم ۳-۱: فرض کنید $R=\{e,a\}$. در این صورت دو ابرگروه کانونی غیریک‌ریخت $(R,+_1)$ و $(R,+_2)$ با جدول‌های کیلی زیر وجود دارند.

$+_1$	e	a
e	e	a
a	a	e,a

$+_2$	e	a
e	e	a
a	a	e

لم ۳-۲: فرض کنید $R=\{e,a\}$. در این صورت دو نیم‌گروه غیریکریخت $(R,\bullet_1)$ و $(R,\bullet_2)$ با جدول‌های کیلی زیر وجود دارند.

$\bullet_2$	e	a
e	e	e
a	e	a

$\bullet_1$	e	a
e	e	e
a	e	e

قضیهٔ ۳-۳: با مفروضات لم ۳-۱ و لم ۳-۲، چهار ابرحلقه کراسنر غیریکریخت (۲ ابرحلقه کراسنر صفر و ۲ ابرحلقه کراسنر ناصفر) از مرتبه دو به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$(R,+_1,\bullet_1)\quad (R,+_1,\bullet_2)\quad (R,+_2,\bullet_1)\quad (R,+_2,\bullet_2).$$

همچنین دو ابرحلقه کراسنر ناصفر فوق، دو ابرمیدان کراسنر غیریکریخت از مرتبه دو هستند. هر چهار ابرحلقه کراسنر بالا جابه‌جایی هستند.

بنا به لم ۲-۴ و از آنجا که همه‌ی حالت‌های ممکن بررسی شده‌اند، نتیجه می‌گیریم چهار ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف، ابرحلقه کراسنر شمولی چپ، ابرحلقه کراسنر شمولی راست، شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ و شبه‌ابرحلقه کراسنر راست وجود دارد. همان طورکه می‌بینیم همهٔ این ابرساختارها جابه‌جایی هستند.

حال فرض کنید $R=\{e,a,b\}$. برای به دست آوردن همه‌ی حالت‌ها، ابتدا تمامی ابرگروه‌های کانونی مرتبه ۳ و تمام نیم‌گروه‌ها با عضو صفر e را در حد یکریختی پیدا می‌کنیم. سپس با توجه به قضایای ۲-۵، ۲-۱۰، ۲-۱۱ و ۲-۱۲ تمام جایگشت‌های ممکن (یکریختی) روی اعضای نیم‌گروه را اعمال می‌کنیم تا تمامی حالت‌های ممکن برای ابرحلقه کراسنر به دست بیاید.

قضیهٔ ۳-۴: [۸] ده ابرگروه کانونی غیریکریخت از مرتبه سه با جداول کیلی زیر وجود دارند.

$+_1$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	b	e,a

$+_2$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	b	e,a,b

$+_3$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e,a	b
b	b	b	e,a

$+_4$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e,a	b
b	b	b	e,a,b

$+_5$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e,b	a,b
b	b	a,b	e,a

$+_6$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e,b	a,b
b	b	a,b	e,a,b

$+_7$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e,a,b	a,b
b	b	a,b	e,a,b

$+_8$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	e,a,b
b	b	e,a,b	b

$+_9$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$+_{10}$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a,b	e,a,b
b	b	e,a,b	a,b

قضیهٔ ۳-۵: [۶] بیست و چهار نیم‌گروه از مرتبهٔ سه در حد یک‌ریختی وجود دارند که فقط دوازده عدد از آنها دارای عضو صفر e با جداول کیلی زیر هستند.

$\bullet_1$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	e	e
b	e	e	e

$\bullet_2$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	e	e
b	e	e	a

$\bullet_3$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	b
b	e	b	e

$\bullet_4$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	b
b	e	b	a

$\bullet_5$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	b
b	e	e	e

$\bullet_6$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	e
b	e	e	e

$\bullet_7$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	e
b	e	b	e

$\bullet_8$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	a
b	e	a	a

$\bullet_9$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	e
b	e	e	b

$\bullet_{10}$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	a
b	e	a	b

$\bullet_{11}$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	a
b	e	b	b

$\bullet_{12}$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	b
b	e	a	b

برای به دست آوردن تمامی ابرحلقه‌های کراسنر، باید ساختارهای یک‌ریخت با ابرگروه‌های کانونی قضیهٔ ۳-۴ یا نیم‌گروه‌های قضیهٔ ۳-۵ را به دست آوریم. با توجه به قضایای ۲-۱۰، ۲-۱۱ و ۲-۱۲ کافی است نیم‌گروه‌های با صفر e یک‌ریخت با نیم‌گروه‌های با صفر e در قضیه ۳-۵ را به دست آوریم. اگر جایگشت $F \in S_3$ یک یکریختی از نیم‌گروه‌ها با عضو صفر e باشد آن‌گاه $F(e) = e$. بنابراین فقط جای‌گشت همانی و جایگشت $(a\ b)$ می‌توانند به عنوان نگاشت یکریختی عمل کنند. جایگشت همانی ساختار جدیدی ایجاد نمی‌کند، پس با اثر دادن جای‌گشت $(a\ b)$ روی نیم‌گروه‌های قضیهٔ ۳-۵، همهٔ حالت‌های نیم‌گروه‌های یک‌ریخت و غیریک‌ریخت با آنها را به دست می‌آوریم.

عمل یکریخت با $\bullet_i$ تحت جای‌گشت $(a\ b)$ را با $\bullet'_i$ نمایش می‌دهیم. اگر $\bullet_i$=$\bullet'_i$ بود آن را نمی‌نویسیم. برای به دست آوردن جدول کیلی عمل $\bullet'_i$ کافیست خانه‌های aa و bb در جدول کیلی عمل $\bullet_i$ با هم و خانه‌های ab و ba در جدول کیلی عمل $\bullet_i$ با هم جا به جا شوند.

$\bullet'_2$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	b	e
b	e	e	e

$\bullet'_3$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	e	a
b	e	a	b

$\bullet'_4$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	b	a
b	e	a	b

$\bullet'_5$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	e	e
b	e	a	b

$\bullet'_6$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	e	e
b	e	e	b

$\bullet'_7$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	e	a
b	e	e	b

$\bullet'_8$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	b	b
b	e	b	b

$\bullet'_{10}$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	b
b	e	b	b

با توجه به جداول بالا داریم:

نتیجهٔ ۳-۶: به ازای هر $i = 5,7,8,9,10$ و $j = 1,2,3,\dots,12$ داریم $(R, +_i, \bullet_j) \cong (R, +_i, \bullet'_j)$.

همچنین به ازای هر $i = 1,2,3,4,6$ و $j = 1,9,11,12$ داریم $(R, +_i, \bullet_j) \cong (R, +_i, \bullet'_j)$.

همچنین به ازای هر $i = 1,2,3,4,6$ و $j = 2,3,4,5,6,7,8,10$ داریم $(R, +_i, \bullet_j) \ncong (R, +_i, \bullet'_j)$.

در ادامه، کار را با استفاده از برنامه نویسی کامپیوتری انجام می‌دهیم. در واقع در این برنامه که الگوریتم آن در زیر بیان شده است، به بررسی انواع توزیع‌پذیری ابرعمل ابرگروه‌های کانونی قضیهٔ ۳-۴ با عمل نیم‌گروه‌های یک‌ریخت با نیم‌گروه‌های در قضیهٔ ۳-۵ می‌پردازیم. در نهایت با کمک این الگوریتم، قضایا و نتایج قبل و محاسبات کامپیوتری، تمامی ابرحلقه‌های کراسنر، ابرمیدان‌های کراسنر و کلاس‌های جدیدی از ابرحلقه‌ها (ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف، ابرحلقه کراسنر شمولی چپ،

ابرحلقه کراسنر شمولی راست، شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ و شبه‌ابرحلقه کراسنر راست) با مرتبه ۳ را مشخص می‌کنیم و سپس در حد یک‌ریختی رده‌بندی می‌کنیم.

برای آسانی در محاسبات قرار دهید $\bullet'_2 := \bullet_{13}$، $\bullet'_3 := \bullet_{14}$، $\bullet'_4 := \bullet_{15}$، $\bullet'_5 := \bullet_{16}$، $\bullet'_6 := \bullet_{17}$، $\bullet'_7 := \bullet_{18}$، $\bullet'_8 := \bullet_{19}$، $\bullet'_{10} := \bullet_{20}$.

حال با توجه به نتیجهٔ ۳-۶، قضیهٔ ۳-۴ و قضیهٔ ۳-۵ الگوریتم زیر را داریم.

الگوریتم بررسی انواع ابرحلقه‌های کراسنری بیان شده در تعاریف ۲-۲ و ۲-۳

۱) قرار دهید $S = \{+_i | i = 1,2, \dots ,10\}$.

۲) قرار دهید $P = \{\bullet_j \,| j = 1,2, \dots ,20\}$.

۳) مجموعه‌های زیر را برابر با مجموعهٔ تهی در نظر بگیرید:

مجموعه ابرحلقه‌های کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف =:WDKH

مجموعه ابرحلقه‌های کراسنر شمولی چپ=:LIDKH

مجموعه ابرحلقه‌های کراسنر شمولی راست =:RIDKH

مجموعه شبه‌ابرحلقه‌های چپ =:LnDKH

مجموعه شبه‌ابرحلقه‌های راست =:RnDKH

مجموعه ابرحلقه‌های کراسنر =:DKH

۴) i=1 قرار دهید.

۵) j=1 قرار دهید.

۶) اگر $+_i$ روی $\bullet_j$ در شرط (WD) صدق کرد، ابرساختار $(R, +_i, \bullet_j)$ را به مجموعه ابرحلقه‌های کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف اضافه کنید و به مرحلهٔ ۷ بروید، وگرنه به مرحلهٔ ۹ بروید.

۷) اگر $+_i$ روی $\bullet_j$ در شرط (LID) صدق کرد، ابرساختار $(R, +_i, \bullet_j)$ را به مجموعه ابرحلقه‌های کراسنر شمولی چپ اضافه کنید.

۸) اگر $+_i$ روی $\bullet_j$ در شرط (RID) صدق کرد، ابرساختار $(R, +_i, \bullet_j)$ را به مجموعه ابرحلقه‌های کراسنر شمولی راست اضافه کنید.

۹) اگر $+_i$ روی $\bullet_j$ در شرط (LnD) صدق کرد، ابرساختار $(R, +_i, \bullet_j)$ را به مجموعه شبه‌ابرحلقه‌های کراسنر شمولی چپ اضافه کنید.

۱۰) اگر $+_i$ روی $\bullet_j$ در شرط (RnD) صدق کرد، ابرساختار $(R, +_i, \bullet_j)$ را به مجموعه ابرحلقه‌های کراسنر شمولی راست اضافه کنید، وگرنه به مرحلهٔ ۱۲ بروید.

۱۱) اگر $+_i$ روی $\bullet_j$ در شرط (D) صدق کرد، ابرساختار $(R, +_i, \bullet_j)$ را به مجموعه ابرحلقه‌های کراسنر اضافه کنید.

۱۲) اگر $j < 12$ به j یکی اضافه کنید و به مرحلهٔ ۶ بروید.

۱۳) اگر $i \in \{1,2,3,4,6\}$ و $j \leq 20$ به مرحلهٔ ۶ بروید.

۱۴) اگر $i < 10$ به i یکی اضافه کنید و به مرحلهٔ ۵ بروید.

۱۵) مجموعه‌های مرحله ۳ را چاپ کنید.

۱۶) پایان.

لم۳-۷: ده ابرحلقه کراسنر صفر غیریک‌ریخت از مرتبهٔ سه وجود دارند. در واقع $(R, +_i, \bullet_1)$ به ازای $i = 1,2,\ldots,10$ ابرحلقه‌های کراسنر صفر مرتبهٔ سه هستند.

قضیهٔ ۳-۸: فرض کنید $R = \{e, a, b\}$. در این صورت ۱۹ ابرحلقه کراسنر غیریک‌ریخت مرتبهٔ سه وجود دارند که ۱۰ عدد از آنها ابرحلقه کراسنر صفر و ۹ عدد از آنها ابرحلقه کراسنر ناصفر هستند:

$$(R, +_1, \bullet_2) \qquad (R, +_1, \bullet'_3) \qquad (R, +_4, \bullet_2) \qquad (R, +_4, \bullet'_3) \qquad (R, +_5, \bullet_4)$$

$$(R, +_7, \bullet_4) \qquad (R, +_8, \bullet_4) \qquad (R, +_9, \bullet_4) \qquad (R, +_{10}, \bullet_4).$$

نتیجهٔ ۳-۹: تمام ابرحلقه‌های کراسنر مرتبهٔ ۳ جابه‌جایی هستند.

یکی از نتایج قضیهٔ ۳-۸، تعیین تعداد ابرمیدان‌های کراسنر غیریک‌ریخت مرتبهٔ سه هستند که در زیر آورده شده است. این نتیجه به روش دیگری در مرجع [۳] بیان شده است.

نتیجهٔ ۳-۱۰: فرض کنید $R = \{e, a, b\}$. در این صورت ۵ ابرمیدان کراسنر غیریک‌ریخت مرتبهٔ سه وجود دارند، که در زیر آورده شده‌اند:

$$(R, +_5, \bullet_4) \qquad (R, +_7, \bullet_4) \qquad (R, +_8, \bullet_4) \qquad (R, +_9, \bullet_4) \qquad (R, +_{10}, \bullet_4).$$

حال برای به دست آوردن شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ، طبق لم ۲-۴، هر ابرحلقه کراسنر یک شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ است و نیازی به بررسی مجدد نیستند. بقیه شبه‌ابرحلقه های کراسنر چپ به صورت زیر هستند:

قضیهٔ ۳-۱۱: چهل و چهار شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ وجود دارد که ۱۹ عدد از آنها ابرحلقه کراسنر هستند (لم ۳-۸ و ۳-۹)، بقیهٔ آنها به صورت زیر هستند:

$(R,+_1,\bullet_5)$	$(R,+_1,\bullet_{12})$	$(R,+_1,\bullet'_5)$	$(R,+_2,\bullet_5)$	$(R,+_2,\bullet_{12})$
$(R,+_2,\bullet'_5)$	$(R,+_3,\bullet_5)$	$(R,+_3,\bullet_{12})$	$(R,+_3,\bullet'_5)$	$(R,+_4,\bullet_5)$
$(R,+_4,\bullet_{12})$	$(R,+_4,\bullet'_5)$	$(R,+_5,\bullet_5)$	$(R,+_5,\bullet_{12})$	$(R,+_6,\bullet_5)$
$(R,+_6,\bullet_{12})$	$(R,+_6,\bullet'_5)$	$(R,+_7,\bullet_5)$	$(R,+_7,\bullet_{12})$	$(R,+_8,\bullet_5)$
$(R,+_8,\bullet_{12})$	$(R,+_9,\bullet_5)$	$(R,+_9,\bullet_{12})$	$(R,+_{10},\bullet_5)$	$(R,+_{10},\bullet_{12})$.

بنابراین ۲۵ شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ غیریک‌ریخت وجود دارند که ابرحلقه کراسنر نیستند.

حال برای به دست آوردن شبه‌ابرحلقه کراسنر راست، طبق لم ۲-۴، هر ابرحلقه کراسنر یک شبه‌ابرحلقه کراسنر راست است و نیازی به بررسی مجدد نیستند. بقیه شبه‌ابرحلقه‌های کراسنر راست به صورت زیر هستند:

قضیهٔ ۳-۱۲: چهل و چهار شبه‌ابرحلقه کراسنر راست وجود دارد که ۱۹ عدد از آنها ابرحلقه کراسنر هستند (لم ۳-۸ و ۳-۹)، بقیه آنها به صورت زیر هستند:

$(\boldsymbol{R},+_{\boldsymbol{1}},\bullet_{\boldsymbol{7}})$	$(\boldsymbol{R},+_{\boldsymbol{1}},\bullet_{\boldsymbol{11}})$	$(\boldsymbol{R},+_{\boldsymbol{1}},\bullet'_{\boldsymbol{7}})$	$(\boldsymbol{R},+_{\boldsymbol{2}},\bullet_{\boldsymbol{7}})$	$(\boldsymbol{R},+_{\boldsymbol{2}},\bullet_{\boldsymbol{11}})$
$(R,+_2,\bullet'_7)$	$(R,+_3,\bullet_7)$	$(R,+_3,\bullet_{11})$	$(R,+_3,\bullet'_7)$	$(\boldsymbol{R},+_{\boldsymbol{4}},\bullet_{\boldsymbol{7}})$
$(R,+_4,\bullet_{11})$	$(R,+_4,\bullet'_7)$	$(R,+_5,\bullet_7)$	$(R,+_5,\bullet_{11})$	$(\boldsymbol{R},+_{\boldsymbol{6}},\bullet_{\boldsymbol{7}})$
$(R,+_6,\bullet_{11})$	$(R,+_6,\bullet'_7)$	$(R,+_7,\bullet_7)$	$(R,+_7,\bullet_{11})$	$(\boldsymbol{R},+_{\boldsymbol{8}},\bullet_{\boldsymbol{7}})$
$(R,+_8,\bullet_{11})$	$(R,+_9,\bullet_7)$	$(R,+_9,\bullet_{11})$	$(R,+_{10},\bullet_7)$	$(\boldsymbol{R},+_{\boldsymbol{10}},\bullet_{\boldsymbol{11}})$.

بنابراین ۲۵ شبه‌ابرحلقه کراسنر راست غیریکریخت وجود دارند که ابرحلقه کراسنر نیستند.

نتیجه ۳-۱۳: تعداد شبه‌ابرحلقه‌های کراسنر چپ و شبه‌ابرحلقه‌های کراسنر راست با هم برابرند.

نتیجه ۳-۱۴: تمام شبه‌ابرحلقه‌های کراسنر (چپ)راست غیریکریخت که ابرحلقه کراسنر نیستند، غیرجابه‌جایی هستند.

حال برای به دست آوردن ابرحلقه کراسنر شمولی چپ، طبق لم ۲-۴، هر ابرحلقه کراسنر یک ابرحلقه کراسنر شمولی چپ است و نیازی به بررسی مجدد نیستند. بقیه ابرحلقه‌های کراسنر شمولی چپ در قضیه زیر ارائه می‌شوند.

قضیه ۳-۱۵: چهل و هفت ابرحلقه کراسنر شمولی چپ وجود دارد که ۱۹ عدد از آن‌ها ابرحلقه کراسنر هستند (لم ۳-۸ و لم ۳-۹)، بقیه آنها به صورت زیر هستند:

$\boldsymbol{(R,+_1,\bullet'_5)}$	$\boldsymbol{(R,+_1,\bullet'_6)}$	$\boldsymbol{(R,+_1,\bullet'_7)}$	$\boldsymbol{(R,+_2\ \bullet'_6)}$	$\boldsymbol{(R,+_2,\bullet'_8)}$	$\boldsymbol{(R,+_2,\bullet'_{10})}$
$(R,+_3,\bullet_2)$	$(R,+_3,\bullet_8)$	$(R,+_3,\bullet_{10})$	$(R,+_3,\bullet'_3)$	$(R,+_3,\bullet'_5)$	$\boldsymbol{(R,+_3,\bullet'_6)}$
$(R,+_3,\bullet'_7)$	$(R,+_4,\bullet_8)$	$(R,+_4,\bullet_{10})$	$(R,+_4,\bullet_{11})$	$(R,+_4,\bullet_{12})$	$\boldsymbol{(R,+_4,\bullet'_5)}$
$(R,+_4,\bullet'_6)$	$(R,+_4,\bullet'_7)$	$(R,+_4,\bullet'_8)$	$(R,+_4,\bullet'_{10})$	$(R,+_6,\bullet'_8)$	$\boldsymbol{(R,+_6,\bullet'_{10})}$
$(R,+_7,\bullet_8)$	$(R,+_7,\bullet_{10})$	$(R,+_7,\bullet_{11})$	$(R,+_7,\bullet_{12}).$		

بنابراین ۲۸ ابرحلقه کراسنر شمولی چپ غیریکریخت وجود دارند که ابرحلقه کراسنر نیستند.

نتیجهٔ ۳-۱۶: ده ابرحلقه کراسنر شمولی چپ غیرجابجایی وجود دارند و به صورت زیر هستند:

$(R,+_1,\bullet'_5)$	$(R,+_4,\bullet'_7)$	$(R,+_7,\bullet_{11})$	$(R,+_7,\bullet_{12})$	$(R,+_4,\bullet_{12})$
$(R,+_3,\bullet'_7)$	$(R,+_1,\bullet'_7)$	$(R,+_4,\bullet_{11})$	$(R,+_3,\bullet'_5)$	$(R,+_4,\bullet'_5).$

حال برای به دست آوردن ابرحلقه کراسنر شمولی راست، طبق لم ۲-۴، هر ابرحلقه کراسنر یک ابرحلقه کراسنر شمولی چپ است و نیازی به بررسی مجدد نیستند. بقیه ابرحلقه های کراسنر شمولی چپ به صورت زیر هستند.

قضیهٔ ۳-۱۷: سی و یک ابرحلقه کراسنر شمولی راست وجود دارد که ۱۹ عدد از آنها ابرحلقه کراسنر هستند (لم ۳-۸ و ۳-۹)، بقیه آنها به صورت زیر هستند:

$(R,+_2,\bullet_2)$	$(R,+_2,\bullet'_3)$	$(R,+_8,\bullet_2)$	$(R,+_8\ \bullet_3)$	$(R,+_8,\bullet_5)$	$(R,+_8,\bullet_6)$
$(R,+_8,\bullet_7)$	$(R,+_8,\bullet_8)$	$(R,+_8,\bullet_9)$	$(R,+_8,\bullet_{10})$	$(R,+_8,\bullet_{11})$	$(R,+_8,\bullet_{12}).$

بنابراین ۱۲ ابرحلقه کراسنر شمولی چپ غیریک‌ریخت وجود دارند که ابرحلقه کراسنر نیستند.

نتیجهٔ ۳-۱۸: چهار ابرحلقه کراسنر شمولی راست غیرجابه‌جایی وجود دارند و به صورت زیر هستند:

$$(R,+_8,\bullet_7) \qquad (R,+_8,\bullet_5) \qquad (R,+_8,\bullet_{11}) \qquad (R,+_8,\bullet_{12}).$$

تعریف ۳-۱۹: هر ابرحلقه کراسنر شمولی چپ که ابرحلقه کراسنر نیست را یک ابرحلقه کراسنر شمولی چپ محض می‌گوییم. همچنین هر ابرحلقه کراسنر شمولی راست که ابرحلقه کراسنر نیست را یک ابرحلقه کراسنر شمولی راست محض می‌گوییم.

نتیجهٔ ۳-۲۰: به تعداد ۲۸ ابرحلقه کراسنر شمولی چپ محض(۱۸ جابه‌جایی و ۱۰ غیرجابه‌جایی) و به تعداد ۱۲ ابرحلقه کراسنر شمولی راست محض (۸ جابه‌جایی و ۴ غیرجابه‌جایی) از مرتبهٔ سه داریم.

در نهایت برای به دست آوردن ابرحلقه‌های کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف، طبق لم ۲-۴، هر ابرحلقه کراسنر یک ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف است و نیازی به بررسی مجدد ابرحلقه‌های کراسنر نیست. بقیه ابرحلقه‌های کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف به صورت زیر هستند.

قضیهٔ ۳-۲۱: نود و شش ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف غیریک‌ریخت وجود دارد: ۱۹ ابرحلقه کراسنر (لم ۳-۸ و ۳-۹)، ۲۸ ابرحلقه کراسنر شمولی چپ محض، ۱۲ ابرحلقه شمولی راست محض و بقیه آنها به صورت زیر هستند:

$(R,+_2,\bullet'_5)$ $(R,+_2,\bullet'_7)$ $(R,+_5,\bullet_2)$ $(R,+_5\ \bullet_3)$ $(R,+_5,\bullet_5)$ $(R,+_5,\bullet_6)$

$(R,+_5,\bullet_7)$ $(R,+_5,\bullet_9)$ $(R,+_6,\bullet_2)$ $(R,+_6,\bullet_3)$ $(R,+_6,\bullet_4)$ $(R,+_6,\bullet_5)$

$(R,+_6,\bullet_6)$ $(R,+_6,\bullet_7)$ $(R,+_6,\bullet_9)$ $(R,+_6,\bullet'_2)$ $(R,+_6,\bullet'_3)$ $(R,+_6,\bullet'_4)$

$(R,+_6,\bullet'_5)$ $(R,+_6,\bullet'_6)$ $(R,+_6,\bullet'_7)$ $(R,+_7,\bullet_2)$ $(R,+_7,\bullet_3)$ $(R,+_7,\bullet_5)$

$(R,+_7,\bullet_6)$ $(R,+_7,\bullet_7)$ $(R,+_7,\bullet_9)$ $(R,+_{10},\bullet_2)$ $(R,+_{10},\bullet_3)$ $(R,+_{10},\bullet_5)$

$(R,+_{10},\bullet_6)$ $(R,+_{10},\bullet_7)$ $(R,+_{10},\bullet_8)$ $(R,+_{10},\bullet_9)$ $(R,+_{10},\bullet_{10})$ $(R,+_{10},\bullet_{11})$

$(R,+_{10},\bullet_{12})$.

بنابراین ۷۷ ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف غیریک‌ریخت وجود دارند که ابرحلقه کراسنر نیستند.

قضیهٔ ۳-۲۲: سیزده ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف غیریک‌ریخت غیرجابه‌جایی وجود دارد.

$(R,+_2,\bullet'_5)$ $(R,+_2,\bullet'_7)$ $(R,+_5,\bullet_5)$ $(R,+_5,\bullet_7)$ $(R,+_6,\bullet_5)$ $(R,+_6,\bullet_7)$

$(R,+_6,\bullet'_5)$ $(R,+_6,\bullet'_7)$ $(R,+_7,\bullet_5)$ $(R,+_7,\bullet_7)$ $(R,+_{10},\bullet_5)$ $(R,+_{10},\bullet_7)$

$(R,+_{10},\bullet_{12})$.

۴. گروه‌های خودریختی ابرحلقه‌های کراسنر

در این بخش گروه‌های خودریختی ابرحلقه‌های کراسنر با مرتبۀ کمتر از چهار را تعیین می‌کنیم (ابتدا ابرحلقه‌های کراسنر از مرتبۀ سه، سپس ابرحلقه‌های کراسنر از مرتبۀ دو و در نهایت ابرحلقه کراسنر از مرتبۀ یک).

فرض کنید $R = \{e, a, b\}$ یک ابرحلقه کراسنر از مرتبه سه است. می‌دانیم به تعداد ۶ جایگشت روی مجموعه R وجود دارد. اگر نگاشت f یک خودریختی از R باشد آنگاه $f(e) = e$ و فقط نگاشت های id و $(a\ b)$ می‌توانند به عنوان خودریختی از ابرحلقه کراسنر R باشند. اگر $|R| = 3$ باشد، آن‌گاه $Aut(R) \leq S_3$. از طرفی زیرگروه‌های $S_3 =< e, (e\ a), (e\ b), (a\ b), (e\ a\ b), (e\ b\ a) >$ به صورت زیر هستند:

زیرگروه از مرتبۀ یک $< e >= e$،

زیرگروه‌های از مرتبۀ دو $< (e\ a) >= K_1, < (e\ b) >= K_2, < (a\ b) >= K_3$،

زیرگروه‌های از مرتبۀ سه $< (e\ a\ b) >= H$،

زیرگروه‌های از مرتبۀ شش $< (e\ a), (e\ a\ b) >= K_2$.

بنابراین اگر $A \leq S_3$ باشد آن‌گاه:

الف) اگر $(e\ a\ b) \in A$ و $(e\ a) \in A$ آن‌گاه $A = S_3$،

ب) اگر $(e\ a\ b) \in A$ و $(e\ a) \notin A$ آن‌گاه $A = H$،

ج) اگر $(e\ a\ b) \notin A$ و $(e\ a) \in A$ آن‌گاه $A = K_1$،

د) اگر $(e\ a\ b) \notin A$ و $(e\ b) \in A$ آن‌گاه $A = K_2$،

و) اگر $(e\ a\ b) \notin A$ و $(a\ b) \in A$ آن‌گاه $A = K_3$.

بنابراین از آن‌جا که فقط نگاشت‌های id و $(a\ b)$ می توانند به عنوان خودریختی از ابرحلقه کراسنر R باشند، نتیجه می‌گیریم که $Aut(R) \cong \{id\}$ یا $Aut(R) \cong K_3$.

قضیهٔ ۱-۴: گروه خودریختی ابرحلقه‌های کراسنر مرتبهٔ ۳ به صورت زیر هست.

$$Aut(R,+_1,\bullet_1) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_1,\bullet_2) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_1,\bullet_3') \cong \{id\}$$

$$Aut(R,+_2,\bullet_1) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_3,\bullet_1) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_4,\bullet_1) \cong \{id\}$$

$$Aut(R,+_4,\bullet_2) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_4,\bullet_3') \cong \{id\} \quad Aut(R,+_5,\bullet_1) \cong K_3$$

$$Aut(R,+_5,\bullet_4) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_6,\bullet_1) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_7,\bullet_1) \cong K_3$$

$$Aut(R,+_7,\bullet_4) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_8,\bullet_1) \cong K_3 \quad Aut(R,+_8,\bullet_4) \cong \{id\}$$

$$Aut(R,+_9,\bullet_1) \cong K_3 \quad Aut(R,+_9,\bullet_4) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_{10},\bullet_1) \cong K_3$$

$$Aut(R,+_{10},\bullet_4) \cong \{id\}.$$

به طریق مشابه، برای ابرحلقه‌های کراسنر مرتبه دو $R=\{e,a\}$، فقط نگاشت id می‌تواند به عنوان خودریختی باشد. از آن‌جا که نگاشت id برای هر ابرحلقه ای یک یک‌ریختی است پس داریم:

$$Aut(R,+_1,\bullet_1) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_1,\bullet_2) \cong \{id\}$$

$$Aut(R,+_2,\bullet_1) \cong \{id\} \quad Aut(R,+_2,\bullet_2) \cong \{id\}.$$

در نهایت اگر $R=\{e\}$ آن‌گاه $Aut(R) \cong id$.

۵. نتیجه‌گیری

با نماد گذاری زیر تمامی ابرحلقه‌های معرفی شده در تعریف ۲-۲ و ۲-۳ از مرتبه سه در یک جدول بیان شده است.

ابرحلقه کراسنر	=
ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف	$\cap$
ابرحلقه کراسنر شمولی چپ	$\subseteq$
ابرحلقه کراسنر شمولی راست	$\supseteq$
شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ	L
شبه‌ابرحلقه کراسنر راست	R

توجه داریم که رابطه = رابطه‌های ∩، ⊆، ⊇، L و R را نتیجه داده، رابطه ⊆ رابطه ∩ را نتیجه داده و رابطه ⊇ رابطه ∩ را نتیجه می‌دهد.

R	$\bullet_1$	$\bullet_2$	$\bullet_2'$	$\bullet_3$	$\bullet_3'$	$\bullet_4$	$\bullet_4'$	$\bullet_5$	$\bullet_5'$	$\bullet_6$	$\bullet_6'$	$\bullet_7$	$\bullet_7'$	$\bullet_8$	$\bullet_8'$	$\bullet_9$	$\bullet_{10}$	$\bullet_{10}'$	$\bullet_{11}$	$\bullet_{12}$
$+_1$	=	=			=			L	⊆L		⊆	R	⊆R						R	L
$+_2$	=	⊇			⊇			L	∩L		⊆	R	∩R		⊆			⊆	R	L
$+_3$	=	⊆			⊆			L	⊆L		⊆	R	⊆R	⊆			⊆		R	L
$+_4$	=	=			=			L	⊆L		⊆	R	⊆R	⊆	⊆		⊆	⊆	R⊆	⊆L
$+_5$	=	∩	∩	∩	∩	=	=	L∩	∩L	∩	∩	R∩	∩R			∩			R	L
$+_6$	=	∩	∩	∩	∩	∩	∩	L∩	∩L	∩	∩	R∩	∩R		⊆	∩		⊆	R	L
$+_7$	=	∩	∩	∩	∩	=	=	L∩	∩L	∩	∩	R∩	∩R	⊆	⊆	∩	⊆	⊆	R⊆	⊆L
$+_8$	=	⊇	⊇	⊇	⊇	=	=	⊇L	⊇L	⊇	⊇	R⊇	⊇R	⊇	⊇	⊇	⊇	⊇	R⊇	⊇L
$+_9$	=					=	=	L	L			R	R						R	L
$+_{10}$	=	∩	∩	∩	∩	=	=	L∩	∩L	∩	∩	R∩	∩R	∩	∩	∩	∩	∩	R∩	∩L

اما در حالت کلی:

رابطه ∩ رابطه ⊆ را نتیجه نمی‌دهد، مثال $(R, +_{10}, \bullet_{11})$ را ببینید.

رابطه ∩ رابطه ⊇ را نتیجه نمی‌دهد، مثال $(R, +_{10}, \bullet_{11})$ را ببینید.

رابطه ⊆ رابطه = را نتیجه نمی‌دهد، مثال $(R, +_2, \bullet_8')$ را ببینید.

رابطه ⊇ رابطه = را نتیجه نمی‌دهد، مثال $(R, +_2, \bullet_2)$ را ببینید.

رابطه ∩ رابطه = را نتیجه نمی‌دهد، مثال $(R, +_{10}, \bullet_{11})$ را ببینید.

رابطه L رابطه = را نتیجه نمی‌دهد، مثال $(R, +_{10}, \bullet_{12})$ را ببینید.

رابطه R رابطه = را نتیجه نمی‌دهد، مثال $(R, +_{10}, \bullet_{11})$ را ببینید.

با توجه به قضایا و نتایج این مقاله، در حد یک‌ریختی شمارش‌های زیر برای ابرحلقه‌ها به دست آمد:

جدول تعداد ابرحلقه‌ها و شبه‌ابرحلقه‌های مرتبه ۳(کراسنری)

کل	غیرجابه‌جایی	جابه‌جایی	
۱۹	۰	۱۹	ابرحلقه کراسنر
۱۹	۰	۵	ابرمیدان کراسنر
۹۶	۱۳	۸۳	ابرحلقه کراسنر با توزیع‌پذیری ضعیف
۴۷	۱۰	۳۷	ابرحلقه کراسنر شمولی چپ
۳۱	۴	۲۷	ابرحلقه کراسنر شمولی راست
۴۴	۲۵	۱۹	شبه‌ابرحلقه کراسنر چپ
۴۴	۲۵	۱۹	شبه‌ابرحلقه کراسنر راست

همچنین رده‌بندی گروه خودریختی‌های ابرحلقه‌های کراسنر مرتبهٔ ۳ در جدول زیر آورده شده است:

جدول گروه‌های خودریختی ابرحلقه‌های مرتبه ۳

تعداد	گروه خودریختی
۱۴	$\{id\}$
۵	$\mathbb{Z}_2$

برای کارهای آینده می‌توان با روشی مشابه، ابرحلقه‌های کراسنر مرتبهٔ ۴ یا کلاس خاصی از آنها را مشخص‌سازی کرد. همچنین با توجه به این که ابرفضاهای برداری روی ابرمیدان‌های کراسنر و ابرمدول‌ها روی ابرحلقه‌های کراسنر تعریف شده‌اند، نتایج بیان شده در این مقاله در شمارش و دسته‌بندی این ابرساختارها مفید هستند. همچنین مشخص‌سازی ابرحلقه‌های ساخته شده از ابرحلقه کراسنر و چندمتقارن با استفاده از گروه‌های خودریختی آنها، در مرتبه‌های کوچک امکان‌پذیر خواهد بود.

References

1. Al-Tahan M. and Davvaz B., “N-ary hyperstructures associated to the genotypes of F2-offspring”, International Journal of Biomathematics, 10(08), (2017) 1750118 (17 pages).

2. Al-Tahan M. and Davvaz B., “Algebraic hyperstructures associated to biological inheritance”, Mathematical Biosciences, 285, (2017), 112-118.

3. Ameri R., Eyvazi M. and Hoskova-Mayerova S., “Advanced results in enumeration of hyperfields”, AIMS Mathematics, 5(6) (2020), 6552–6579.

4. Bayon R., “The hyperrings of order 3”, Journal of Integer Sequences, 11 (2008). 1-9.

5, Bayon R. and Lygeros N., “The H_v-groups and Marty-Moufang hypergroups”, In proceedings of first international conference on algebraic informatics, Aristotle University of Thessaloniki, (2005) 285-294.

6. Chotchaisthit S., “Simple proofs determining all non-isomorphic semigroups of order 3”, Appl. Math. Sci. 26 (2014), 1261-1269.

7. Cristea I., Jafarpour M., Mousavi S.Sh. and Soleymani A., “Enumeration of Rosenberg hypergroups”, Computers and Mathematics with applications, 60 (2010), 2753-2763.

8. Davvaz B., “Polygroup theory and related systems”, World Scientific Publishing, USA, (2013).

9. Davvaz B., Dehghan Nezhad A. and Benvidi A., “Chemical hyperalgebra: Dismutation reactions”, MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 67 (2012), 55-63.

10. Davvaz B. and Leoreanu-Fotea V., “Hyperring theory and applications”, USA: International Academic Press, (2007).

11. Dehghan Nezhad A., Moosavi Nejad S.M., Nadjafikhah M. and Davvaz B., “A physical example of algebraic hyperstructures: Leptons”, Indian Journal of Physics, 86(11) (2012), 1027-1032.

12. Ghadiri M., Davvaz B. and Nekouian R., “Hv-semigroup structure on F2-OFFSPRING of a GENE POOL”, International Journal of Biomathematics, 5(04) (2012) 1250011 (13 pages).

13. Iranmanesh M., Jafarpour M., Aghabozorgi H. and Zhan JM., “Classification of Krasner hyperfields of order 4”, Acta Mathematica Sinica, English Series, 36 (8) (2020), 889-902.

14. Krasner M., “A class of hyperrings and hyperfields”, Internat. J. Math. 2 (1983), 307-312.

15. Mirvakili S., Madani M. A. and Davvaz B., “Enumeration of additive M-hyperrings”, Submitted.

16. Tsitouras C. and Massouros Ch. G., “On enumeration of hypergroups of order 3”, Computers and Mathematics with applications, 59 (2010), 519-523.