



Solving partial integro-differential equation related to operational risk by applying finite differences method

Mansoureh Rasouli¹ , Mohammad Ali Fariborzi Araghi² , Tayebe Damercheli³

1. Department of Mathematics, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
E-mail: masi6014@gmail.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
 E-mail: fariborzi.araghi@gmail.com
3. Department of Mathematics, Yadegar-e-Emam Khomeini (RAH) Shahr-e-ray Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. E-mail: Tdamercheli@gmail.com

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 23 October 2020

Received in revised form:

15 January 2022

Accepted: 6 February 2022

Published online:

3 December 2023

Keywords:

Operational risk,
Partial integro-differential
equation,
Finite differences,
Stability,
Convergence.

ABSTRACT

Introduction

Operational risk is one of the factors identified in organizations, especially in banks, and banking supervisory committees pay special attention to it. In this paper, a mathematical model based on an advanced operational risk model is considered to calculate the probability of bank survival as a partial Volterra integro-differential equation. Integral equations are considered as one of the useful mathematical tools in pure and applied analysis. Often the results of applied equations such as partial differential equations, integro-differential equations, random equations and other equations including integro differential part are used in physical phenomena. One of the applications of these equations is in operational risk. In (1988) different methods for solving differential equations and integro-differential equations of parabolic type are presented. The issue of survival probability is an important issue in modeling a business's risk. The model under study is often expressed by the partial Volterra integro-differential equation. Types of risks available to organizations (banks) include credit risk, market risk or operational risk. One of the most important is the operational risk to which all the activities of the bank are exposed. Operational risk is the possibility of losses due to inadequacy and inadequacy of processes and methods, people and internal systems or due to events outside the organization (bank). The effects of this type of risk can sometimes be so wide that it can lead to the bankruptcy of a bank. Therefore, domestic and international regulators - especially the Wing Committee - and banks are making great efforts to accurately identify and effectively manage this risk. The wide range of this risk, in addition to the difficulty of quantifying it, makes it very difficult to obtain a reliable database that can be found by mathematical modeling of a particular trend or order among the data. To counter the consequences of operational risk, banks are required to allocate some reserves to hedge potential losses. This can be considered a form of autoimmunity, although the explicit allocation of capital to operational risk by the Basel Committee is not mandatory for banks. The concept of operational risk is the same for different organizations and its amount depends on the total capital of the organization.

Material and methods

This equation has been solved numerically by applying the finite differences method with the trapezoidal rule (FD-TR method) to estimate its integral part and the effect of changing the parameters of the models on the output of the problem has been investigated. In addition, the stability and convergence of the method are discussed and its numerical results are presented.

Results and discussion

We have discretized the integro-differential equation related to operational risk in different networks and solved it by finite differences method. We have obtained useful results for its operation in organizations at different times and with different risk reserves.

Conclusion

According to the results obtained from the numerical solution of the problem, the following results can be raised:

- At the same time, by increasing risk storage in different networks, it is observed that the probability of survival increases, the probability of survival is directly related to risk storage. This result is especially evident in the network of 8.
- By storing constant risk, the passage of time in different networks will reduce the probability of survival, the probability of survival is inversely related to the passage of time. This result is especially evident in the network of 8.
- By increasing the network segmentations sufficiently, the convergence of the FD-TR method is quite evident.
- FD-TR method is an efficient scheme to estimate the solution of the operational risk's model as a stable and convergence numerical approach.

How to cite: Mansoureh Rasouli · Mohammad Ali Fariborzi Araghi·Tayebe Damercheli (2023). Solving partial integro-differential equation related to operational risk by applying finite differences method. *Mathematical Researches*, 9 (2), 171 – 189.



حل معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی مربوط به ریسک عملیاتی با به‌کارگیری روش تفاضلات متناهی

منصوره رسولی^۱، محمدعلی فریبرزوی عراقی^۲✉، طیبه دمرچلی^۳

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم و فناوریهای همگرا، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. رایانامه: masi6014@gmail.com
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم و فناوریهای همگرا، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. رایانامه: fariborzi.araghi@gmail.com
۳. گروه ریاضی، دانشکده فنی و مهندسی، واحد شهرری، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. رایانامه: Tdamercheli@gmail.com

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	ریسک عملیاتی یکی از ریسک‌های شناسایی شده در سازمان‌ها بالاخص در بانک‌ها است و کمیته‌های نظارت بانکی توجه ویژه‌ای به آن دارند. در این مقاله مدل ریاضی بر اساس مدل پیشرفته ریسک عملیاتی برای محاسبه احتمال بقای بانک به صورت یک معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی ولترا در نظر گرفته شده است. این معادله با به‌کارگیری روش تفاضلات متناهی با قاعده دوزنقه‌ای جهت تخمین بخش انتگرالی آن به صورت عددی حل و تاثیر تغییر پارامترهای مدل بر خروجی مساله بررسی شده است. علاوه بر این، پایداری و همگرایی روش، مورد بحث قرار گرفته و نتایج عددی آن ارائه شده است.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۸/۲	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۷	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲	
واژه‌های کلیدی:	
ریسک عملیاتی، پایداری، همگرایی معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی، تفاضلات متناهی.	

استناد: منصوره رسولی، محمدعلی فریبرزوی عراقی، طیبه دمرچلی (۱۴۰۲). حل معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی مربوط به ریسک عملیاتی با به‌کارگیری روش تفاضلات متناهی. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۲)، ۱۷۱ - ۱۸۹.



۱. مقدمه

معادلات انتگرال به عنوان یکی از ابزارهای مفید ریاضی در تحلیل‌های محض و کاربردی در نظر گرفته می‌شود. غالباً نتایج معادلات کاربردی مانند معادلات دیفرانسیل جزئی، معادلات انتگرال-دیفرانسیل، معادلات تصادفی و سایر معادلات شامل بخش انتگرال-دیفرانسیل، در پدیده‌های فیزیکی کاربرد داشته و مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از کاربردهای این معادلات در ریسک عملیاتی است. در (۱۹۸۸) روش‌های مختلفی برای حل معادله‌های دیفرانسیل و معادله انتگرال-دیفرانسیل از نوع سهموی ارائه شده است [۱]. مسئله تخمین احتمال بقا مسئله مهمی در مدلسازی ریسک یک کسب و کار است. مدل مورد بررسی اغلب با معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترای جزئی بیان می‌شود.

کمیته نظارت بانکی بال متشکل از کارشناسان ارشد نظارت بانکی است که در سال ۱۹۷۵ میلادی توسط روسای کل بانک‌های مرکزی کشورهای گروه ۱۰، پایه گذاری شد. این کمیته از کارشناسان ارشد مراجع نظارت بر بانک‌ها و بانک‌های مرکزی کشورهای بلژیک، کانادا، فرانسه، آلمان، ایتالیا، ژاپن، لوکزامبورگ، هلند، اسپانیا، سوئد، سوئیس، انگلستان و آمریکا تشکیل شده است. به طور معمول، اجلاس‌های این کمیته در سوئیس در بانک تسویه حساب‌های بین‌المللی واقع در شهر بال دبیرخانه دائمی این کمیته برگزار می‌شود. این کمیته مدیریت ریسک را در موسسات مالی تنظیم می‌کند و ریسک عملیاتی را چنین تعریف می‌کند: "...ریسک عملیاتی به‌عنوان ریسک از دست دادن نتایج، ناشی از بی‌کفایتی یا ناکافی بودن فرایندها، کارکنان و سیستم‌های داخلی و یا رویدادهای خارجی تعریف شده است ...". به‌عبارتی ریسک عملیاتی، نتایج ناخواسته ای است که در اثر عدم پیروی افراد از استانداردها و رویه‌ها به وجود می‌آید. بانک‌ها به اتکای سرمایه خود در مقابل زیان‌های ناشی از ریسک‌های عملیاتی ایستادگی می‌کنند، در صورتی که در بهترین حالت نیز ممکن است بانک‌ها با موقعیت سرمایه‌ای مناسب در اثر حوادث ناگوار از پای درآیند. بررسی‌های پژوهشگران نشان می‌دهد که ابعاد فاجعه آمیز بحران‌های بانکی ناشی از ریسک عملیاتی در مورد بانک‌هایی که وضعیت سرمایه‌ای مناسب‌تری دارند، کمتر است زیرا یک بانک با سرمایه کافی زمان بیشتری را برای بررسی مشکلات و مواجهه صحیح با آن‌ها در اختیار دارد [۲].

انواع ریسک‌های موجود برای سازمان‌ها (بانک‌ها) عبارتند از ریسک اعتباری، ریسک بازار یا ریسک عملیاتی. از جمله مهمترین آنها ریسک عملیاتی است که تمامی فعالیت‌های بانک در معرض آن قرار دارند. ریسک عملیاتی احتمال بروز زیان ناشی از نامناسب بودن و عدم کفایت فرایندها و روش‌ها، افراد و سیستم‌های داخلی و یا ناشی از رویدادهای خارج از سازمان (بانک) است. تأثیرات این نوع ریسک گاه ممکن است به حدی گسترده باشد که منجر به ورشکستگی یک بانک شود. از این رو، مراجع نظارتی داخلی و بین‌المللی - به ویژه کمیته بال - و بانک‌ها تلاش‌های فراوانی را جهت شناخت دقیق و مدیریت موثر این ریسک انجام می‌دهند. گستره وسیع این ریسک علاوه بر دشواری کمی سازی آن، دستیابی به یک پایگاه داده قابل اطمینان که با مدلسازی ریاضی بتوان روند یا نظم خاص را میان داده‌ها یافت، بسیار پیچیده می‌نماید.

برای مقابله با پیامدهای ناشی از ریسک عملیاتی، بانک‌ها موظف هستند مقداری ذخایر برای مقابله با ضررهای احتمالی تخصیص دهند. این را می‌توان نوعی خود ایمنی تلقی کرد هرچند تخصیص سرمایه صریح به ریسک عملیاتی از سوی کمیته

بازل برای بانک‌ها اجباری نیست. مفهوم ریسک عملیاتی برای سازمان‌های مختلف یکسان است و مقدار آن بستگی به سرمایه کلی سازمان دارد [۳]. رابطه‌ای که برای مدیریت ریسک در یک بانک وجود دارد عبارت است از [۴-۸]:

$$\text{مجموع زیان‌ها} - \text{مجموع درآمدهای بانک} + \text{ذخیره اولیه} = \text{ذخیره ریسک}$$

در این مقاله تاثیر کاهش یا افزایش ذخیره ریسک بر احتمال بقای بانک بررسی شده و نتایج نشان می‌دهد که احتمال بقا با ذخیره ریسک رابطه مستقیم دارد. این در حالیست که نتایج نشان می‌دهد اگر ذخیره ریسک تغییر نکند احتمال بقا با گذر زمان رابطه عکس دارد.

ترتیب مطالب این مقاله به این شرح است: بعد از شرح مفاهیم مقدماتی و معرفی اجزای معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی ولترا (۱)، در بخش ۲ روش پیشنهادی معرفی شده و مدل با کمک روش تفاضلات متناهی حل شده است. حل بخش انتگرالی مدل با قاعده ذوزنقه‌ای [۱۰] در زیر بخش ۲ بحث شده است. پایداری روش تفاضلات متناهی پیشنهادی و همگرایی آن نیز در بخش ۳ بررسی شده است. نتایج عددی در بخش ۴ ارائه شده است.

۲. معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی مربوط به ریسک عملیاتی

مدل بندی احتمال بقای یک سازمان مالی از جمله بانک به کمک معادله انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی انجام شده است و نیسل و پترز در ۱۹۹۴ راه حل تحلیلی برای آن ارائه کرده‌اند [۱۰]. هرچند حل عددی برای این معادله بسیار محدود مورد مطالعه قرار گرفته است اما لادوپولوس با استفاده از یک روش ریاضی مدرن، وقتی که ذخیره اولیه ریسک موجود باشد، احتمال یک مدل ریسک عملیاتی را تخمین زده است [۸]. فرض کنید $R(z, t)$ احتمال بقا در زمان t و با ذخیره ریسک z باشد، در مدل ارائه شده توسط وی ذخیره ریسک $Z(s)$ در زمان s به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R(z, t) = P[Z(s) > 0, \quad 0 \leq s \leq t, \quad Z(0) = z],$$

که Z مقدار اولیه ذخیره ریسک است [۸]. فرض کنید میزان خسارت در زمان t که با X_t نمایش داده می‌شود که دارای تابع توزیع $D(x) = P[X_t \leq x]$ با تابع چگالی $d(x)$ است و فرض می‌شود که بر حسب فرایند پواسن N_t با پارامتر μ محاسبه شده است. بنابراین خواهیم داشت:

$$P_n(t) = P[N_t = n] = \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

مجموع خسارت‌های انباشته شده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_{t_i}$$

که X_{t_i} شدت ریسک عملیاتی در زمان t و N_t فراوانی آن است.

ضمن آنکه در این مدل فرض بر این است که حق بیمه اضافی با نرخ پیوسته $a(w)$ ذخیره شده است که به $Z(t) = w$ در زمان اخیر وابسته می‌باشد. همچنین، در زمانی که زبانی وجود ندارد، فرض شده است که ذخایر در معادله قطعی زیر صدق می‌کند [۴، ۵، ۶]:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = a(Z(t)).$$

مکروفلو [۱۱، ۱۲] نیز، رویکرد ترکیبی از راه حل عددی VIDE را با تبدیل لاپلاس از مقادیر مجهول $R(z, t)$ و معکوس لاپلاس به صورت عددی اجرا کرده است. همچنین لادوپولوس [۱۳، ۱۴]، مسئله فوق را به یک معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی ولترای خطی به صورت زیر تبدیل نموده و حل کرده است:

$$\frac{\partial R(z, t)}{\partial t} = -\mu R(z, t) + a(z) \frac{\partial R(z, t)}{\partial z} + \mu \int_0^z R(z-y, t) dD(y), \quad (1)$$

که در شروط زیر صدق می‌کند:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z, t) = 1, \quad R(z, 0) = 1, \quad z \geq 0, \quad (2)$$

$$R(z, t) = 0, \quad z < 0.$$

برای حل عددی (۱) و (۲) این معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم [۴]:

$$\frac{\partial R(z, t)}{\partial t} = -\mu R(z, t) + a(z) \frac{\partial R(z, t)}{\partial z} + \mu \int_0^z b(z-y) R(y, t) dy$$

$$R(\infty, t) = 1, \quad t \geq 0, \quad R(z, 0) = 1, \quad z \geq 0. \quad (3)$$

تابع توزیع $D(x)$ و تابع چگالی مربوطه یعنی $d(x)$ تابع توزیع نمایی با پارامتر α به صورت زیر است [۴، ۵]:

$$b(z) = \alpha e^{-\alpha z}.$$

اغلب روش‌های کاربردی برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل (۳) حالت خاصی از یک مدل را با لحاظ نمودن مقادیر اولیه ویژه‌ای برای $a(Z(t))$ و تابع توزیع $D(x)$ در نظر می‌گیرند. انتخاب‌های زیر برای تابع آغازین به شکل زیر وجود دارند [۵]:

$$a(Z(t)) = a_0,$$

$$a(Z(t)) = a_0 + \gamma Z(t),$$

که a_0 نمایانگر نرخ (یک مقدار ثابت) در مقادیر اضافی حق بیمه است و γ نرخ سود یا بهره است که تا زمان وقوع خسارت به مقدار ذخیره ریسک اضافه می‌شود. در حالت $a(Z(t)) = a_0 + \gamma Z(t)$ و با در نظر گرفتن $\mu = \gamma$ جواب دقیق معادله (۳) عبارت است از [۱۴]:

$$R(z, t) = 1 - \frac{\gamma}{\gamma + \alpha a_0} e^{-\alpha z} (1 - e^{-(\gamma + \alpha a_0)t}).$$

۱.۲ روش تفاضلات متناهی برای حل مدل

برای حل عددی معادله انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۳) به روش تفاضلات متناهی قرار می‌دهیم $L_l = \frac{\partial}{\partial t}$ و $L_h = \frac{\partial}{\partial z}$ در اینصورت:

$$L_l R := \frac{R(z_k, t_{n+1}) - R(z_k, t_{n-1})}{2l} \approx \frac{R_{n+1}^k - R_{n-1}^k}{2l},$$

$$L_h R := \frac{R(z_{k+1}, t_n) - R(z_{k-1}, t_n)}{2h} \approx \frac{R_n^{k+1} - R_n^{k-1}}{2h},$$

که

$$l = \frac{t_{max} - t_{min}}{n} = \frac{T}{n},$$

$$h = \frac{z_{max} - z_{min}}{k} = \frac{Z}{k}.$$

با توجه به تعریف عملگرهای L_l و L_h داریم:

$$L_l R_n^k = -\mu R(z_k, t_n) + a(z_k) L_h R_n^k + \mu \int_0^{z_k} b(z_k - y) R(y, t_n) d(y).$$

و در اینصورت:

$$R_{n+1}^k - R_{n-1}^k = -2\mu l R_n^k + r a(z_k) (R_n^{k+1} - R_n^{k-1}) + 2\mu l \int_0^{z_k} b(z_k - y) R(y, t_n) d(y). \quad (۴)$$

که در آن $r = \frac{l}{h}$ با جایگزینی R_n^k با $\frac{1}{2}(R_{n+1}^k + R_{n-1}^k)$ بخش انتگرالی در رابطه (۴) را به صورت $I(z_k, t_n)$ نشان می‌دهیم و آن را با قاعده دوزنقه‌ای تقریب می‌زنیم.

از رابطه (۴) داریم:

$$R_{n+1}^k - R_{n-1}^k = -\mu l (R_{n+1}^k + R_{n-1}^k) + ra(z_k)(R_n^{k+1} - R_n^{k-1}) + 2\mu l I(z_k, t_n), \quad (5)$$

با تقریب $I(z_k, t_n)$ با قاعده ذوزنقه‌ای به فرم زیر:

$$I(z_k, t_n) = \frac{h}{2} [b(z_k)R(0, t_n) + b(0)R_n^k] - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y)R(y, t_n)|_{y=\eta_k},$$

که η_k مقداری بین صفر و z_k است، خواهیم داشت:

$$R_{n+1}^k - R_{n-1}^k = -\mu l (R_{n+1}^k + R_{n-1}^k) + ra(z_k)(R_n^{k+1} - R_n^{k-1}) + \mu l h [b(z_k)R(0, t_n) + b(0)R_n^k] - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y)R(y, t_n)|_{y=\eta_k}. \quad (6)$$

با توجه به شرط اولیه $R(0, t_n) = 0$ می‌توانیم بنویسیم:

$$(1 + \mu l)R_{n+1}^k + (\mu l - 1)R_{n-1}^k = ra(z_k)(R_n^{k+1} - R_n^{k-1}) + \mu l h b(0)R_n^k \quad (7)$$

$$- \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y)R(y, t_n)|_{y=\eta_k}.$$

با توجه به مقادیر اولیه رابطه (۳) داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(z_k, t_n) = 1 \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} R_n^k = 1$$

گام‌های اجرایی این رویکرد با اغماض از جمله خطای قاعده ذوزنقه‌ای در رابطه (۷) به شرح زیر می‌باشند:

گام اول قرار دهید:

$$l = \frac{T}{n},$$

$$h = \frac{Z}{k},$$

$$r = \frac{l}{h},$$

گام دوم قرار دهید:

$$a(Z(t)) = a_0 + \gamma Z(t),$$

$$b(z) = \alpha e^{-\alpha z},$$

گام سوم) قرار دهید:

$$(1 + \mu l)R_{n+1}^k + (\mu l - 1)R_{n-1}^k = ra(z_k)(R_n^{k+1} - R_n^{k-1}) + \mu l h b(0)R_n^k.$$

گام چهارم) مقادیر احتمال بقا R_n^k را به ازای n و k مفروض چاپ کنید.

۳. بررسی پایداری و همگرایی روش تفاضلات متناهی با قاعده دوزنقه‌ای

قضیه ۱: روش تفاضلات متناهی به همراه قاعده دوزنقه‌ای برای معادله انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۳) پایدار است.

اثبات: برای اثبات پایداری از روش ون-نیومن استفاده می‌کنیم [۱۵]. برای این منظور روش تفاضلات متناهی را روی معادله

(۳) اعمال کرده و معادله (۷) به دست می‌آید. فرض کنید

$$R_n^k \approx \frac{1}{2}(R_{n+1}^k + R_{n-1}^k),$$

بنابراین رابطه (۷) را به فرم زیر می‌توان نوشت:

$$(1 + \mu l)R_{n+1}^k + (\mu l - 1)R_{n-1}^k = ra(z_k)(R_n^{k+1} - R_n^{k-1}) + \frac{1}{2}\mu l h b(0)(R_{n+1}^k + R_{n-1}^k) \quad (۸)$$

$$R_n^k = e^{\alpha t_n} e^{-i\lambda k h},$$

$$\text{که } \hat{i}^2 = -1$$

$$(1 + \mu l)e^{\alpha t_{n+1}} e^{-i\lambda k h} + (\mu l - 1)e^{\alpha t_{n-1}} e^{-i\lambda k h} = ra(z_k)(e^{\alpha t_n} e^{-i\lambda(k+1)h} - e^{\alpha t_n} e^{-i\lambda(k-1)h}) + \mu l h \alpha \left[\frac{e^{\alpha t_{n+1}} + e^{\alpha t_{n-1}}}{2} \right] e^{-i\lambda k h}. \quad (۹)$$

با ساده کردن طرفین رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$(1 + \mu l)e^{\alpha t_n} e^{\alpha l} e^{-i\lambda k h} + (\mu l - 1)e^{\alpha t_n} e^{-\alpha l} e^{-i\lambda k h} = ra(z_k)(e^{\alpha t_n} e^{-i\lambda k h} e^{-i\lambda h} - e^{\alpha t_n} e^{-i\lambda k h} e^{i\lambda h}) + \frac{\mu l h \alpha}{2} [e^{\alpha t_n} (e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}) e^{-i\lambda k h}].$$

با فرض $e^{\alpha l} = \xi$ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(1 + \mu l)\xi + (\mu l - 1)\frac{1}{\xi} = ra(z_k)2\hat{i} \sin(\lambda h) + \frac{\mu l h \alpha}{2} \left[\xi + \frac{1}{\xi} \right].$$

معادله درجه دومی بر حسب ξ به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\left(1 + \mu l - \frac{\mu l h \alpha}{2}\right) \xi^2 - 2i r a(z_k) \sin(\lambda h) \xi + \left[\mu l - 1 - \frac{\mu l h \alpha}{2}\right] = 0.$$

ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\xi = r a(z_k) \sin(\lambda h) i \pm \sqrt{-(r^2 a^2(z_k) \sin^2(\lambda h)) - \left(1 + \mu l - \frac{\mu l h \alpha}{2}\right) \left(\mu l - 1 - \frac{\mu l h \alpha}{2}\right)}.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= (r a(z_k) \sin(\lambda h))^2 + (-r^2 a^2(z_k) \sin^2(\lambda h)) - \left(1 + \mu l - \frac{\mu l h \alpha}{2}\right) \left(\mu l - 1 - \frac{\mu l h \alpha}{2}\right) \\ &= -\left(\left(\mu l - \frac{\mu l h \alpha}{2}\right)^2 - 1\right) = -\mu^2 l^2 \left(1 - \frac{h \alpha}{2}\right)^2 + 1 < 1. \end{aligned}$$

زیرا همواره $-\mu^2 l^2 \left(1 - \frac{h \alpha}{2}\right)^2 < 0$ لذا:

$$|\xi| < 1.$$

و این یعنی رابطه تفاضلی (۷) دارای پایداری نامشروط است. ■

قضیه ۲: روش تفاضلات متناهی به همراه قاعده دوزنقه‌ای برای معادله انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۳) با فرض $0 < 2ra(z_k) < 1$ همگرا است.

اثبات: برای اثبات همگرایی از بسط تیلور استفاده می‌کنیم [۱۷، ۱۵]. با توجه به رابطه (۷):

$$\begin{aligned} (1 + \mu l)R_{n+1}^k + (\mu l - 1)R_{n-1}^k \\ = r a(z_k)(R_n^{k+1} - R_n^{k-1}) + \mu l h b(0)R_n^k - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y)R(y, t_n)|_{y=\eta_k}. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $R_n^k = r_n^k - e_n^k$ که در آن e_n^k به معنای خطا در نقطه $R(z_k, t_n)$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (1 + \mu l)(r_{n+1}^k - e_{n+1}^k) + (\mu l - 1)(r_{n-1}^k - e_{n-1}^k) = r a(z_k)[(r_n^{k+1} - e_n^{k+1}) - \\ (r_n^{k-1} - e_n^{k-1})] + \mu l h b(0)(r_n^k - e_n^k) - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y)R(y, t_n)|_{y=\eta_k}. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

با کمک بسط تیلور می توان نوشت:

$$r_{n+1}^k = r_n^k + l \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{(kh, nl + \theta_1 l)}, r_{n-1}^k = r_n^k - l \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{(kh, nl - \theta_2 l)}.$$

$$r_n^{k+1} = r_n^k + h \left. \frac{\partial r}{\partial z} \right|_{(kh + \theta_3 h, nl)}, r_n^{k-1} = r_n^k - h \left. \frac{\partial r}{\partial z} \right|_{(kh - \theta_4 h, nl)}.$$

که $0 \leq \theta_i \leq 1 \quad i = 1, 2, 3, 4$ با جایگذاری در معادله (۱۱) و به کار گیری قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\begin{aligned} & -(1 + \mu l)e_{n+1}^k - (\mu l - 1)e_{n-1}^k + (1 + \mu l) \left[r_n^k + l \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{(kh, nl + \theta_1 l)} \right] \\ & + (\mu l - 1) \left[r_n^k - l \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{(kh, nl - \theta_2 l)} \right] \\ & = ra(z_k) \left[e_n^{k-1} - e_n^{k+1} + h \left(\left. \frac{\partial r}{\partial z} \right|_{(kh + \theta_3 h, nl)} + \left. \frac{\partial r}{\partial z} \right|_{(kh - \theta_4 h, nl)} \right) \right] \\ & + \mu l h b(0)(r_n^k - e_n^k) - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y) R(y, t_n) |_{y=\eta_k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = ra(z_k) [e_n^{k-1} - e_n^{k+1} + 2h \left(\left. \frac{\partial r}{\partial z} \right|_{(kh + \theta_5 h, nl)} \right)] + \mu l h(0)(r_n^k - e_n^k) \\ & - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y) R(y, t_n) |_{y=\eta_k}, \end{aligned}$$

که در آن $0 \leq \theta_5 \leq 1$ با جابجایی مولفه‌ها در طرفین تساوی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} -(1 + \mu l)e_{n+1}^k & = (\mu l - 1)e_{n-1}^k - 2\mu l r_n^k - \mu l^2 \left(\left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{(kh, nl + \theta_1 l)} - \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{(kh, nl - \theta_2 l)} \right) \\ -2l \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{(kh, nl + \theta_6 l)} & + ra(z_k) [e_n^{k-1} - e_n^{k+1}] + ra(z_k) 2h \left. \frac{\partial r}{\partial z} \right|_{(kh + \theta_5 h, nl)} + \mu l h b(0)(r_n^k - e_n^k) \\ & - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y) R(y, t_n) |_{y=\eta_k}, \end{aligned}$$

که در آن $0 \leq \theta_6 \leq 1$ با دسته بندی طرفین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow -(1 + \mu l)e_{n+1}^k$$

$$\begin{aligned}
&= (\mu l - 1)e_{n-1}^k - \left[2\mu l r_n^k + 2l \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl + \theta_6 l)} - ra(z_k) 2h \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{(kh + \theta_5 h, nl)} - \mu l h b(0) r_n^k \right] \\
&\quad - \mu l h b(0) e_n^k - \mu l^2 \left(\frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl + \theta_1 l)} - \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl - \theta_2 l)} \right) + ra(z_k) [e_n^{k-1} - e_n^{k+1}] \\
&\quad - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y) R(y, t_n) \Big|_{y=\eta_k}.
\end{aligned}$$

با قدرمطلق گیری از طرفین رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (1 + \mu l) |e_{n+1}^k| \leq |\mu l - 1| |e_{n-1}^k| \\
&+ \left[\left[2\mu l r_n^k + 2l \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl + \theta_6 l)} - ra(z_k) 2h \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{(kh + \theta_5 h, nl)} - \mu l h b(0) r_n^k \right] + \mu l h b(0) |e_n^k| \right. \\
&\quad \left. + \mu l^2 m + ra(z_k) [|e_n^{k-1}| + |e_n^{k+1}|] + \frac{h^3}{12} M, \right.
\end{aligned}$$

که در آن $M = \max_y \left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(z_k - y) R(y, t_n) \right|$

و $m = \max \left| \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl + \theta_1 l)} - \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl - \theta_2 l)} \right|$ اگر $E_n = \max_k |e_n^k|$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&(1 + \mu l) E_{n+1} \leq |\mu l - 1| E_{n-1} \\
&+ \left[\left[2\mu l r_n^k + 2l \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl + \theta_6 l)} - ra(z_k) 2h \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{(kh + \theta_5 h, nl)} - \mu l h b(0) r_n^k \right] \right. \\
&+ \mu l h b(0) E_n + \mu l^2 m + ra(z_k) 2E_n + \frac{h^3}{12} M \\
&= |\mu l - 1| E_{n-1} + (\mu l h b(0) + 2ra(z_k)) E_n + \mu l^2 m \\
&+ \left[\left[2\mu l r_n^k + 2l \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl + \theta_6 l)} - ra(z_k) 2h \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{(kh + \theta_5 h, nl)} - \mu l h b(0) r_n^k \right] + \frac{h^3}{12} M. \right.
\end{aligned}$$

فرض کنیم $A_{n,k} = \frac{\mu l h b(0) + 2ra(z_k)}{1 + \mu l}$ و نیز:

$$\begin{aligned}
&B_{n,k} = \left[2\mu l r_n^k + 2l \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl + \theta_6 l)} - ra(z_k) 2h \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{(kh + \theta_5 h, nl)} - \mu l h b(0) r_n^k \right]. \\
&\Rightarrow 0 \leq E_{n+1} \leq \frac{|\mu l - 1|}{1 + \mu l} E_{n-1} + A_{n,k} E_n + \frac{1}{1 + \mu l} [\mu l^2 m + B_{n,k}] + \frac{h^3}{12} \frac{1}{1 + \mu l} M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{|\mu-1|}{1+\mu} E_{n-1} + A_{n,k} \left[\frac{|\mu-1|}{1+\mu} E_{n-2} + A_{n,k} E_{n-1} + \frac{1}{1+\mu} [\mu l^2 m + B_{n,k}] + \frac{h^3}{12} \frac{1}{1+\mu} M \right] + \\ &\quad \frac{1}{1+\mu} [\mu l^2 m + B_{n,k}] + \frac{h^3}{12} \frac{1}{1+\mu} M \\ &= \left[\frac{|\mu-1|}{1+\mu} + A_{n,k}^2 \right] E_{n-1} + A_{n,k} \frac{|\mu-1|}{1+\mu} E_{n-2} + \frac{A_{n,k} + 1}{1+\mu} [\mu l^2 m + B_{n,k}] \\ &\quad + \frac{h^3}{12} \frac{1}{1+\mu} M (1 + A_{n,k}) \\ &\leq \dots \leq Q_0 E_0 + Q_1 E_1 + Q_2 [\mu l^2 m + B_{n,k}] + \frac{h^3}{12} M Q_3, \end{aligned}$$

که در آن Q_0, Q_1 و Q_2, Q_3 جملاتی بر حسب r و l و μ و $A_{n,k}$ هستند. چون $E_0 = 0$ و وقتی $k, n \rightarrow \infty$ با توجه به شرط $0 < 2ra(z_k) < 1$ و این موضوع که Q_1 شامل توان‌هایی از $A_{n,k}$ بوده و $\frac{|\mu-1|}{1+\mu} < 1$ لذا $Q_1 \rightarrow 0$. از طرفی با افزایش k و n واضح است که $\mu l^2 m \rightarrow 0$ و $h \rightarrow 0$ و همچنین $B_{n,k} \rightarrow 0$ زیرا با توجه به معادله (۳):

$$\begin{aligned} &\lim_{n,k \rightarrow \infty} \left(2l \left[\mu r_n^k + \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{(kh, nl + \theta_6 l)} - a(z_k) \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{(kh + \theta_5 h, nl)} \right] \right) \\ &= 2l \left[\mu R(z, t) + \frac{\partial R(z, t)}{\partial t} - a(z_k) \frac{\partial R(z, t)}{\partial z} \right] \\ &= 2l \left[\mu \int_0^z b(z-y) R(y, t) dy \right] \cong 2l \mu \frac{h(b(0)R(z, t) + b(z)R(y, 0))}{2} \cong \mu h l b(0) r_n^k \end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{n+1} = 0$ ■

۴. نتایج عددی

در این بخش معادله انتگرال-دیفرانسیل (۳) با روش شرح داده شده با پارامترهای معین به صورت عددی و بر اساس الگوریتم پیشنهادی حل شده که نتایج آن برای یک نقطه دلخواه در جداول زیر آمده است. در اجراهای ارائه شده برای k و n مقادیر مختلفی در بازه‌های $1 \leq n \leq 10, 1 \leq k \leq 10$ در نظر گرفته شده است. برای این کار از شبکه ۳ تایی شروع کرده و ادامه می‌دهیم نتایج حاصله نشان می‌دهد که با افزایش به تعداد کافی افزایش‌های شبکه جواب‌های بهتری به دست می‌آید و نمودارها نشان از همگرایی جواب با افزایش افزایش‌های شبکه دارد.

با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای Z و t در شبکه‌هایی با افراز ۳ تا ۸ تایی احتمال بقا در جداول ۱ تا ۶ مشخص شده‌اند:

جدول ۱: $a_0 = 2, \gamma = 1, \mu = 1, \alpha = 1$

شبکه 3×3	$z = 2, t = 3$			$z = 2, t = 1$			$z = 1, t = 1$		
	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا
$R(z, t)$	0.8606	0.9121	0.0515	0.6915	0.9165	0.2251	0.7590	0.8374	0.0784
	0.8377	0.9124	0.0747	0.9294	0.9240	0.0054	0.8985	0.8520	0.0465
	0.8404	0.9165	0.0762	0.8367	0.9445	0.1078	0.8772	0.8918	0.0146

جدول ۲: $a_0 = 2, \gamma = 1, \mu = 1, \alpha = 1$

شبکه 4×4	$z = 2, t = 3$			$z = 2, t = 1$			$z = 1, t = 1$		
	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا
$R(z, t)$	0.7526	0.8774	0.1248	0.8107	0.8835	0.0728	0.7784	0.8079	0.0295
	0.6549	0.8775	0.2226	0.8616	0.8903	0.0287	0.8003	0.8191	0.0188
	0.6229	0.8787	0.2559	0.7919	0.9047	0.1128	0.7671	0.8429	0.0758
	0.5628	0.8903	0.3274	0.7105	0.9353	0.2248	0.7486	0.8933	0.1447

جدول ۳: $a_0 = 2, \gamma = 1, \mu = 1, \alpha = 1$

شبکه 5×5	$z = 2, t = 3$			$z = 2, t = 1$			$z = 1, t = 1$		
	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا
$R(z, t)$	0.7502	0.8502	0.1000	0.7732	0.8577	0.0845	0.7853	0.7877	0.0024
	0.8428	0.8503	0.0075	0.8812	0.8638	0.0174	0.8478	0.7968	0.0509
	0.7714	0.8509	0.0795	0.7323	0.8750	0.1427	0.7803	0.8135	0.0332
	0.8516	0.8543	0.0027	0.8976	0.8953	0.0022	0.8680	0.8439	0.0242
	0.8874	0.8750	0.0125	0.8922	0.9324	0.0402	0.9110	0.8992	0.0118

جدول ۴: $a_0 = 2, \gamma = 1, \mu = 1, \alpha = 1$

	$z = 2, t = 3$			$z = 2, t = 1$			$z = 1, t = 1$		
	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا
شبکه 6×6 $R(z, t)$	0.7991	0.8289	0.0298	0.9182	0.8374	0.0808	0.8131	0.7730	0.0401
	0.7043	0.8290	0.1246	0.8491	0.8429	0.0062	0.8150	0.7808	0.0342
	0.6159	0.8293	0.2134	0.8237	0.8520	0.0283	0.7691	0.7935	0.0244
	0.5294	0.8308	0.3014	0.8557	0.8670	0.0113	0.7555	0.8144	0.0589
	0.5110	0.8374	0.3264	0.7949	0.8918	0.0969	0.7507	0.8490	0.0983
	0.6359	0.8670	0.2311	0.9031	0.9327	0.0296	0.7993	0.9060	0.1068

جدول ۵: $a_0 = 2, \gamma = 1, \mu = 1, \alpha = 1$

	$z = 2, t = 3$			$z = 2, t = 1$			$z = 1, t = 1$		
	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا
شبکه 7×7 $R(z, t)$	0.7641	0.8118	0.0477	0.7896	0.8211	0.0315	0.7791	0.7620	0.0171
	0.8090	0.8118	0.0029	0.8428	0.8261	0.0167	0.8140	0.7687	0.0453
	0.7266	0.8121	0.0855	0.6966	0.8338	0.1373	0.7361	0.7789	0.0428
	0.8060	0.8129	0.0068	0.8522	0.8457	0.0066	0.8176	0.7946	0.0230
	0.8108	0.8157	0.0050	0.7527	0.8638	0.1111	0.8150	0.8188	0.0038
	0.8219	0.8261	0.0042	0.8813	0.8916	0.0103	0.8682	0.8558	0.0124
	0.8827	0.8638	0.0189	0.9204	0.9344	0.0139	0.9323	0.9127	0.0196

جدول ۶: $a_0 = 2, \gamma = 1, \mu = 1, \alpha = 1$

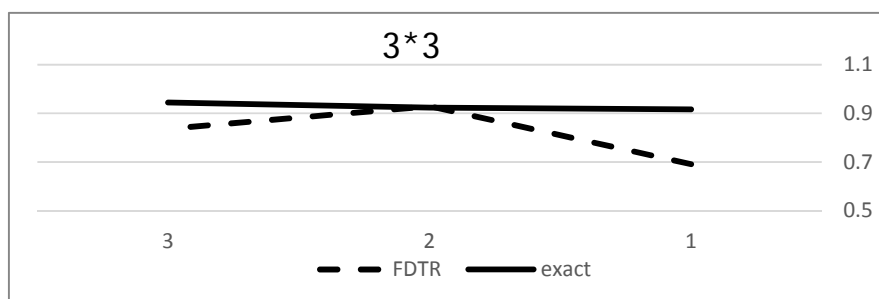
	$z = 2, t = 3$			$z = 2, t = 1$			$z = 1, t = 1$		
	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا	روش FD-TR	جواب دقیق	خطا
شبکه 8×8 $R(z, t)$	0.7636	0.7978	0.0343	0.9788	0.8079	0.1710	0.8440	0.7533	0.0907
	0.6856	0.7979	0.1123	0.7788	0.8125	0.0336	0.7784	0.7592	0.0192
	0.5566	0.7981	0.2415	0.8591	0.8191	0.0400	0.8175	0.7678	0.0497
	0.3545	0.7986	0.4440	0.8131	0.8288	0.0157	0.7914	0.7802	0.0112
	0.2459	0.8001	0.5542	0.8330	0.8429	0.0099	0.7467	0.7983	0.0517
	0.3031	0.8047	0.5017	0.9098	0.8635	0.0463	0.7994	0.8247	0.0253
	0.3359	0.8191	0.4833	0.8070	0.8933	0.0864	0.7106	0.8630	0.1524
	0.5821	0.8635	0.2814	1.0868	0.9368	0.1500	0.8754	0.9188	0.0434

احتمال بقا در جداول مربوط به $t = 1$ و $z = 2$ اغلب از مقادیر مشابه در جداول مربوط به $t = 1$ و $z = 1$ بیشتر است چون در زمان یکسان با کاهش ذخیره ریسک احتمال بقا کم می‌شود، این موضوع به خصوص در شبکه ۶ و ۸ تایی به وضوح دیده می‌شود. در جداول ۱ تا ۶ نسبت شبکه نیز بین صفر و یک است.

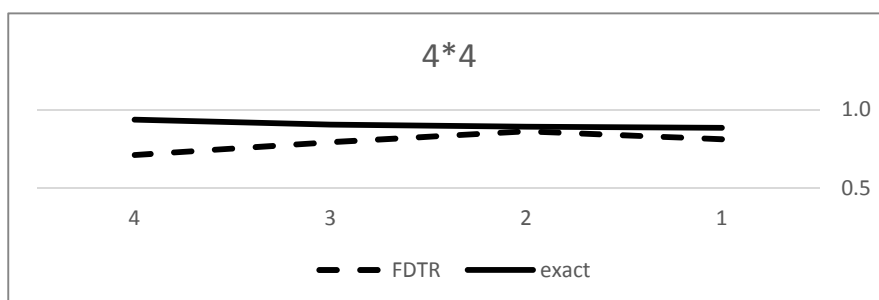
احتمال بقا در جداول مربوط به $t = 1$ و $z = 2$ اغلب از مقادیر مشابه در جداول مربوط به $t = 3$ و $z = 2$ کمتر است چون در ذخیره ریسک ثابت با افزایش زمان احتمال بقا کم می‌شود، این موضوع به خصوص در شبکه ۶ و ۸ تایی به وضوح دیده می‌شود.

همچنین وقتی نسبت شبکه بین صفر و یک نباشد خروجی‌های مساله کمتر با فرض‌های حاکم بر ریسک عملیاتی مطابقت داشته و دلیل بهم ریختگی خروجی‌ها بالاخص با افزایش شبکه که زیاد شدن محاسبات را به همراه دارد، همین نسبت شبکه است.

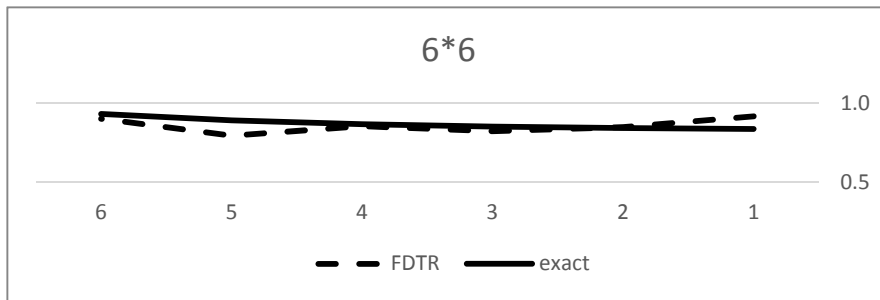
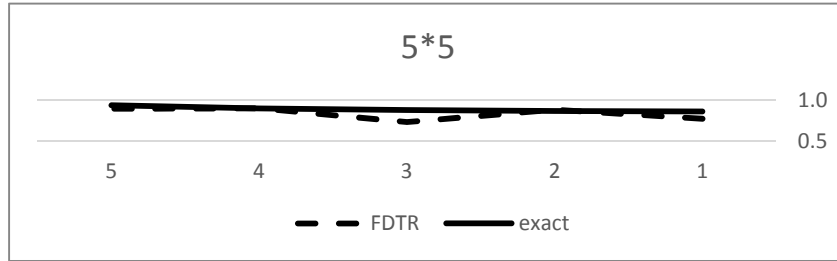
همچنین با بررسی اطلاعات مندرج در جداول ۱ تا ۶ مشاهده می‌شود که با افزایش افرازها از ۳ به ۶ تقریباً روند همگرایی افزایش می‌یابد و از روی ستون خطا می‌توان آن را ملاحظه کرد. در تصاویر ۱ تا ۶ احتمال بقا در نقاط حاصل از اجرای روش FD-TR برای $t = 1$ و $z = 2$ در شبکه‌های ۳ تا ۸ تایی در مقایسه با جواب دقیق رسم شده و روند همگرایی مشخص است.



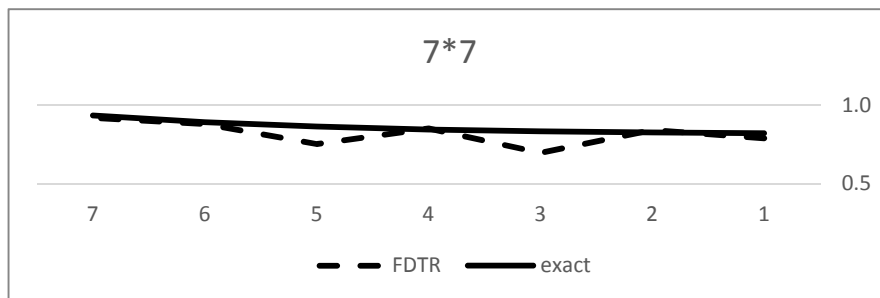
تصویر ۱: نمودار همگرایی روش FD-TR در شبکه ۳ تایی



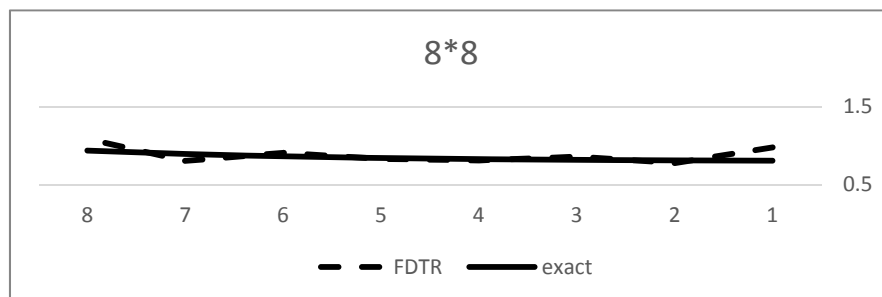
تصویر ۲: نمودار همگرایی روش FDTR در شبکه ۴ تایی



تصویر ۴: نمودار همگرایی روش FDTR در شبکه ۶ تایی



تصویر ۵: نمودار همگرایی روش FD-TR در شبکه ۷ تایی



تصویر ۶: نمودار همگرایی روش FD-TR در شبکه ۸ تایی

نتیجه گیری:

با توجه به نتایج به دست آمده از حل عددی مساله موارد زیر را می‌توان مطرح نمود:

۱. در زمان یکسان، با افزایش ذخیره ریسک در شبکه‌های مختلف مشاهده می‌شود که احتمال بقا افزایش می‌یابد یعنی احتمال بقا با ذخیره ریسک رابطه مستقیم دارد. این نتیجه بخصوص در شبکه ۸ تایی مشهود است.
۲. با ذخیره ریسک ثابت، گذر زمان در شبکه‌های مختلف موجب کاهش احتمال بقا خواهد شد یعنی احتمال بقا با گذر زمان رابطه عکس دارد. این نتیجه بخصوص در شبکه ۸ تایی مشهود است.
۳. با افزایش تقسیم بندی‌های شبکه به قدر کافی، همگرایی روش FD-TR کاملاً مشهود است.

References

1. E. G. Yanik, G. Fairweather, "Finite element methods for parabolic and hyperbolic integro partial differential equations", *Nonlinear Anal.*, **12** (1988) 785-809.
2. Basel Committee on Banking Supervision (2001b). Bank for International Settlements (September 2001). URL www.bis.org.
3. P. Shevchenko, "Modelling Operational Risk Using Bayesian Inference", doi 10.1007/978-3-642-15923-7-1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2011) 3-26.
4. M. Rasouli, M. A. Fariborzi Araghi, T. Damercheli, Approximate techniques to solve the partial integro-differential equation arising in operational risk: Adomian decomposition method, *Math Sci.* (2021), <https://doi.org/10.1007/s40096-021-00438-w>.
5. A. Makroglu, Integral equations and actuarial risk management: Some models and numeric, *Mathematical Modelling and Analysis*, **8**(2) (2003) 143-154.
6. E. G. Ladopoulos, Non-linear Integro-differential Equations for Risk Management analysis: Further Developments Spaces, *Universal Journal of Integral Equations*, **4** (2016) 13-20.
7. E. G. Ladopoulos, (1995), Non-linear singular integral representation for unsteady inviscid flow fields of 2-D foils, *Mech. Res. Commune*, **22**, 25 – 34.
8. E. G. Ladopoulos, An Overview of Risk Management Analysis by Non-linear Integro-differential Equations, *Universal Journal of Integral Equations*, **9** (2021) 9-16.
9. R. L. Burden, J. D. Fairs, Numerical analysis, third ed., PWS, (1985), Boston.
10. C. Knessl, C. S. Peters, Exact and asymptotic solutions for the time dependent problem of collective ruin II, *Siam. J. Appl. Math.*, **54** (1994) 1745-1767.
11. A. Makroglu, Computer treatment of the integro- differential equations of collective non-ruin; the finite time case, *Mathematic and Computers in Simulation*, **54** (2000) 99-112.

12. A. Makroglou, (2000), Computer treatment of the problem of collective non-ruin; the finite time case, contributed talk, presented at the 18th International Congress on Computational and Applied Mathematics (ICCAM'98), 27 July–1 August 1998, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, and at the Conference HERCMA'98, 24–26 September 1998, AUEB, Athens, Greece.
13. E. G. Ladopoulos, Unsteady inviscid flow fields of 2-D airfoils by non-linear singular integral computational analysis, *Int. J. Nolin. Mach*, **46** (2011) 1022-1026.
14. C. Knessl, C. S. Peters, Exact and asymptotic solutions for the time dependent problem of collective ruin. II. *Siam. J. Appl. Math.*, **56** (1996) 1471-1521.
15. G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods* Clarendon Press, Third Edition, (1985), Oxford.
16. E. G. Ladopoulos, Are the Non-linear Integro-differential Equations the best Device for Economics Risk Management Analysis? What will be Next?, *Universal Journal of Applied Mathematics & Computation*, **8** (2020) 27-34.
17. P. Deuflhard, M. Weiser, *Adaptive numerical solution of PDEs*, De Gruyter Textbook, Walterde Gruyter & Co., Berlin, (2012), <https://doi.org/10.1515/9783110283112>