



Kharazmi University

# Numerical solution of competitive advertising problem based on stochastic differential game approach using a combined Chelyshkov collocation method with policy iteration

M. Heydari<sup>1</sup> , Z. Nikooeinejad<sup>2</sup> , G.B. Loghmani<sup>3</sup>

- 1. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Yazd University, Yazd, Iran. E-mail: M.Heydari@yazd.ac.ir
- 2. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Yazd University, Yazd, Iran.  
✉ E-mail: z.nikooeinejad@yazd.ac.ir
- 3. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Yazd University, Yazd, Iran. E-mail: loghmani@yazd.ac.ir

## Article Info

**Article type:**  
Research Article

### Article history:

Received:  
20 November 2020  
Accepted: 22 April 2022  
Published online:  
6 February 2024

### Keywords:

Hamilton-Jacobi-Bellman equation system,  
Stochastic differential game,  
Competitive advertising,  
Chelyshkov polynomials,  
Operational matrix of derivative,  
Policy iteration method.

## ABSTRACT

### Introduction

In the field of advertising, there are always situations in which individuals or companies advertise their products in order to find marketing opportunities and attract customers in a competitive environment. Consider a duopoly market in a mature product category where total sales are distributed between the two firms, denoted as firm 1 and firm 2, which compete for the market share through advertising spending. There are two firms in a market and the profit of firm 1 and that of 2 are respectively:

$$\max_{u_1} \left\{ E_0 \left[ \int_0^T \left( q_1 x(t) - \frac{c_1}{2} u_1^2(t) \right) e^{-\rho t} dt + q_{1T} e^{-\rho T} x(T) \right] \right\}, \quad (1)$$

$$\max_{u_2} \left\{ E_0 \left[ \int_0^T \left( q_2 (1-x(t)) - \frac{c_2}{2} u_2^2(t) \right) e^{-\rho t} dt + q_{2T} e^{-\rho T} (1-x(T)) \right] \right\}. \quad (2)$$

Market shares of firms 1 and 2 at time  $t$  as  $x(t)$  and  $1-x(t)$ , respectively. The dynamics of firm 1's market share is governed by

$$dx(t) = (u_1(t)\sqrt{1-x(t)} - u_2(t)\sqrt{x(t)})dt + \sigma x(t)dB(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3)$$

Thus, each firm seeks to maximize its expected, discounted profit stream subject to the market share dynamics.

### Material and Methods

A feedback solution which allows the firm to choose their advertising rates contingent upon the state of the game is a realistic approach to the problem. A feedback Nash equilibrium solution to the game (1)–(3) has to satisfy the following conditions:

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}V_1(t,x) + \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}V_1(t,x) + \max_{u_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}V_1(t,x)(u_1(t)\sqrt{1-x(t)} - u_2(t)\sqrt{x(t)}) \right. \\
\left. + (q_1x(t) - \frac{c_1}{2}u_1^2(t))e^{-r t} \right\} = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}V_2(t,x) + \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}V_2(t,x) + \max_{u_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}V_2(t,x)(u_1(t)\sqrt{1-x(t)} - u_2(t)\sqrt{x(t)}) \right. \\
\left. + (q_2(1-x(t)) - \frac{c_2}{2}u_2^2(t))e^{-r t} \right\} = 0, \\
V_1(T,x) = q_1 e^{-r T} x, V_2(T,x) = q_2 e^{-r T} (1-x).
\end{cases} \quad (4)$$

Determining the equilibrium strategy for this problem requires solving a set of nonlinear partial differential equations called the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. Another purpose of this paper is to propose an efficient and suitable computational method for solving the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. The proposed method for solving the problem is a combination of the collocation method based on the Chelyshkov polynomials differential operator matrix and the policy iteration method. The collocation method has the disadvantage that it requires solving a system of nonlinear algebraic equations resulting from the implementation of the method. The advantage of using the policy iteration algorithm is that instead of finding the solution to a nonlinear partial differential equation, it is enough to solve a sequence of linear partial differential equations.

### Results and discussion

Since for firms having different parameter values, the solutions are more complicated. First we will consider the case of two symmetric firms. The case of asymmetric firms will be dealt after that. We will summarize the analytical results of comparative statistics with symmetric and asymmetric firms in the Tables 1 and 2. When there is a marginal increase in the value of advertising ( $r$  increases) or a reduction in its cost ( $c$  decreases), then, the amount of advertising increases. However, contrary to what one would expect to see in a monopoly model of advertising, the value function decreases. Advertising does not increase the size of the marketing pie but only affects its allocation. Thus, the increase in advertising causes a decrease in the value function.

### Conclusion

In this study, we have applied a combined Chelyshkov collocation method with policy iteration to solve HJB PDE arising in finite-horizon stochastic competitive advertising differential games numerically. The method is based on the exponential Chelyshkov functions and policy iteration method. The method was utilized to convert the nonlinear HJB PDE into a sequence of linear algebraic equations systems which can be solved easily. This is one of the strengths of the proposed method compared to the collocation method. It should be noted that this method can be expanded to solve HJB PDEs in the other applications of stochastic differential games with feedback information.

---

**How to cite:** Heydari, M., Nikoonejad, Z., & Loghmani, G. (2023). Numerical solution of competitive advertising problem based on stochastic differential game approach using a combined Chelyshkov collocation method with policy iteration. *Mathematical Researches*, 9 (3), 147 – 177.





## حل عددی مسئله تبلیغات رقابتی با رویکرد یک بازی دیفرانسیلی تصادفی با استفاده از روش ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف و تکرار در سیاست

محمد حیدری<sup>۱</sup>، زهرا نیکویی نژاد یزدی<sup>۲</sup>، قاسم برید لقمانی<sup>۳</sup>

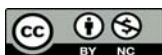
۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: [m.heydari@yazd.ac.ir](mailto:m.heydari@yazd.ac.ir)

۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: [z.nikooeinejad@yazd.ac.ir](mailto:z.nikooeinejad@yazd.ac.ir)

۳. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: [loghmani@yazd.ac.ir](mailto:loghmani@yazd.ac.ir)

| اطلاعات مقاله  | چکیده   |
|--|---|
| نوع مقاله: مقاله پژوهشی  | در عرصه تبلیغات همواره موقعیت‌هایی وجود دارند که در آن افراد یا شرکت‌ها به‌منظور یافتن فرصت‌های بازاریابی و جلب‌نظر مشتریان در یک فضای رقابتی به تبلیغ محصولات خود می‌پردازند. در این مقاله چندین هدف دنبال می‌شود. در ابتدا تاریخچه‌ای از توسعه‌ی کاربردهای بازی‌های دیفرانسیلی در مدل‌سازی موقعیت‌های استراتژیک در تبلیغات رقابتی بیان می‌شود. سپس مسئله را در یک بازار دوجانبه و تحت تاثیر عدم قطعیت در چارچوب یک بازی دیفرانسیلی تصادفی معرفی می‌کنیم. تعیین استراتژی تعادلی برای این مسئله، مستلزم حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی موسوم به دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن است. هدف دیگر این مقاله پیشنهاد یک روش محاسباتی کارا و مناسب برای حل دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن مذکور است. روش پیشنهادی برای حل مسئله، ترکیبی از روش هم‌محلی مبتنی بر ماتریس عملگر مشتق چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و روش تکرار در سیاست است. یکی از معایب روش‌های هم‌محلی برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی، لزوم حل دستگاه جبری غیرخطی حاصل از پیاده‌سازی روش است. مزیت استفاده از الگوریتم تکرار در سیاست این است که به‌جای یافتن جواب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی، کافی است دنباله‌ای از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی خطی را حل کنیم. در ادامه به بررسی همگرایی روش پیشنهادی می‌پردازیم. در پایان نیز نتایج حاصل از حل دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن با استفاده از الگوریتم تکراری پیشنهادی را بیان می‌کنیم. |
| تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۸/۳۰  |   |
| تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۲  |   |
| تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷   |   |
| <b>واژه‌های کلیدی:</b><br>دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن، بازی دیفرانسیلی تصادفی، تبلیغات رقابتی، چندجمله‌ای‌های چلیشکوف، ماتریس عملگر مشتق، روش تکرار در سیاست. |   |

استناد: حیدری، محمد؛ نیکویی نژاد یزدی، زهرا؛ و برید لقمانی، قاسم (۱۴۰۲). حل عددی مسئله تبلیغات رقابتی با رویکرد یک بازی دیفرانسیلی تصادفی با استفاده از روش ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف و تکرار در سیاست. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۳)، ۱۴۷ - ۱۷۷.



### مقدمه

تبلیغات از دیرباز ریشه در زندگی اجتماعی انسان‌ها دارد. تبلیغ عبارت است از عملی که در آن فروشنده یا تولیدکننده با انجام روش‌های گوناگون سعی دارد خریدار بالقوه را از تولید محصول خود آگاه کند، امری که ریشه در اواخر سده نوزدهم و اوایل سده بیستم در کشور ایالات متحده دارد. تبلیغات مدت‌هاست که یک موضوع محبوب نه تنها در حوزه‌ی بازاریابی، بلکه در تحقیقات دانشگاهی و علوم مدیریتی است. مطالعات تجربی لیتل<sup>۱</sup> در سال 1979 نشان داد که تبلیغات رقابتی می‌توانند تأثیر مستقیم و منفی بر سهم بازار شرکت‌ها داشته باشند [1]. نتایج نظرسنجی‌ها در سال 1983 از تبلیغ‌کنندگان برجسته ایالات متحده، لنکستر<sup>۲</sup> و استم<sup>۳</sup> نشان می‌دهند که در میان ویژگی‌های کلی و متنوعی که برای توصیف فرایند بودجه‌بندی تبلیغات وجود دارد، اثرات رقابتی از اهمیت بسزایی برخوردار هستند [2]. برای مطالعه بیشتر در مورد رفتار تولیدکننده و مصرف‌کننده نسبت به تبلیغات در بازار و همچنین سایر متغیرهای تصمیم‌گیری در بازاریابی به هانسسن<sup>۴</sup> و همکاران 2001 مراجعه کنید [3]. به‌عنوان مثال، موردی را در نظر بگیرید که دو برند کوکاکولا و پپسی 75 درصد از بازار ایالات متحده در صنعت نوشابه را تشکیل می‌دهند. این دو برند به‌منظور جلب نظر تعداد بیشتری از مصرف‌کنندگان و افزایش سهم خود در بازار به‌طور پیوسته و با استفاده از سلاح تبلیغات در حال رقابت با یکدیگر هستند. پس از اوایل دهه 1990، در حالی که سهم بازار پپسی به‌طور پیوسته از 33 درصد به 31 درصد کاهش می‌یافت، سهم بازار کوکاکولا از سال 1990 تا 1996 از 41 درصد به 44 درصد افزایش یافت. در سال 1996، دو برابر شدن هزینه تبلیغات پپسی با به‌روی کارآمدن مدیریت جدید، منجر به احیای کمپین "چالش پپسی" در دهه 1970 شد. در مقابل کوکاکولا برای محافظت از سود سهم خود در بازار با افزایش هزینه‌های تبلیغاتی که این امر تا حدودی باعث کاهش سود عملیاتی شرکت شد، واکنش نشان داد. عواملی از قبیل به‌دست آوردن سهم بیشتری از بازار کالا با اجتناب از هزینه‌های بالای تبلیغاتی، شرکت‌ها را به یافتن فرایند بودجه‌بندی تبلیغات بهینه ترغیب می‌کند. دستیابی شرکت‌ها به یک بینش صحیح در خصوص میزان تبلیغات بهینه در مورد یک کالا، هزینه‌های مربوط به آن و اثرات آن بر فروش کالا در بازار، آن‌ها را قادر می‌سازد تا با اتخاذ موثرترین استراتژی‌های تبلیغاتی در سطح اول رقابت و یا حداقل در مسیر آن باقی بمانند.

بازارها همواره در محیط‌های پرتلاطم، متناقض و دگرگون بسر می‌برند؛ با گذر زمان نه تنها ابعاد مسائل و مشکلات وسعت یافته، بلکه درجه‌ی وابستگی در تصمیم‌گیری‌های متقابل در چنین موقعیت‌هایی نیز شدت پیدا می‌کند. به نظر می‌رسد که نظریه بازی‌ها و بازی‌های دیفرانسیلی نسبت به سایر روش‌های بهینه‌سازی به شرایط دنیای واقعی نزدیکتر باشند. کاربرد های اولیه از نظریه بازی‌ها در مدل‌سازی رقابت‌های تبلیغاتی در قالب یک بازی ایستا، نخستین بار توسط فریدمن<sup>۵</sup> 1958 مطرح گردید [4]. در واقع، بازارهای رقابتی ذاتاً پویا هستند و مدل‌هایی که این واقعیت اساسی را به رسمیت می‌شناسند، قابلیت‌های بیشتری را برای مطالعه و تحلیل استراتژی‌های تبلیغاتی ارائه می‌دهند. با توجه به این‌که در تبلیغات، تصمیمات گرفته شده

<sup>1</sup> Little

<sup>2</sup> Lancaster

<sup>3</sup> Stem

<sup>4</sup> Hanssens

<sup>5</sup> Friedman

توسط رقبا می‌تواند در طول زمان تغییر کند چنین رقابتی را می‌توان به‌عنوان یک بازی پویا تلقی کرد، زیرا بعد مهم زمان را در مسئله تصمیم‌گیری در نظر می‌گیرد و از طرفی نشان می‌دهد که تصمیمات رقابتی لزوماً در طول زمان ثابت نیستند. یک بازی پویا رقابتی را می‌توان از دیدگاه گسسته یا پیوسته زمان مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. بازی‌های پویای زمان پیوسته یا دیفرانسیلی رقابت تبلیغاتی در داکتر<sup>۱</sup> و همکاران [5]، تغییرات محیطی و زمانی در مسئله را به‌صورت قیدهای زمان پیوسته و به‌شکل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل توصیف می‌کند و ارتباطات بین مجموعه عوامل تصمیم‌گیرنده (بازیکنان) را به‌عنوان تابع هدف از وضعیت سیستم و استراتژی‌های بازیکنان در نظر می‌گیرد. به‌عنوان مثال میزان فروش و یا سهم شرکت‌ها در بازار با توجه به معادلات دیفرانسیل (قطعی یا تصادفی) با زمان تغییر می‌کنند. برای یافتن استراتژی‌های تبلیغاتی بهینه برای رقبا می‌توان از مفهوم تعادل نش استفاده کرد. دو نوع تعادل نش وجود دارد که یکی استراتژی حلقه‌باز و دیگری استراتژی حلقه بسته یا بازخورد نامیده می‌شود. در استراتژی تعادل نش حلقه‌باز، نرخ تبلیغات به‌عنوان متغیر کنترل فقط تابعی از زمان است، در حالی که در استراتژی تعادل نش بازخورد، نرخ تبلیغات (متغیر کنترل) به‌عنوان تابعی از زمان و وضعیت فعلی سیستم (متغیر وضعیت) یعنی سهم شرکت‌ها در تولید کالای بازار تعریف می‌شود.

یکی از مباحث مهمی که در طی سالیان اخیر در ارتباط با تقابل استراتژیک بین عاملین اقتصادی مورد بررسی قرار گرفته است، وارد کردن نقش نااطمینانی در مدل و چگونگی مقابله با این نااطمینانی توسط سیاست‌گذاران است. باید توجه داشت که به‌دلیل تصادف‌های ذاتی که در بازار و رفتار احتمالی انتخاب مشتریان وجود دارد، نمی‌توان بازاریابی و فعالیت‌های رقابتی برای کسب سهم بیشتری از بازار را به‌تنهایی در یک بازی دیفرانسیلی قطعی مدل کرد. در مرجع [6]، رقابت تبلیغاتی بین دو شرکت با فرض عدم قطعیت در بازار، با استفاده از یک بازی دیفرانسیلی تصادفی مدل‌بندی شده است. تعیین استراتژی تعادلی برای این مسئله، مستلزم حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی به‌نام دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن است. هدف این مقاله پیشنهاد یک روش محاسباتی مناسب برای حل دستگاه مذکور است.

روش‌های عددی نظیر روش‌های تفاضل متناهی استاندارد، غیر استاندارد، حجم متناهی، اجزاء محدود برای حل معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن در حل مسائل کنترل بهینه به‌کار گرفته شده‌اند. به‌عنوان مثال، در مرجع [7] همگرایی روش اجزای متناهی با شبکه‌بندی‌های غیر یکنواخت برای حل معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن غیرخطی که از حل مسائل کنترل بهینه تصادفی نتیجه می‌شوند، مطالعه شده است. روش اجزاء محدود برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی در حل مسائل کنترل بهینه با فرآیندهای جهش، نیز در مرجع [8] مورد بررسی قرار گرفته است. در مورد انواع دیگر روش‌های عددی برای یافتن تقریب جواب معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن از قبیل روش تفاضل متناهی یا روش اجزاء محدود می‌توان به مراجع [9]-[13] اشاره کرد.

یکی دیگر از روش‌های حل معادلات تابعی روش هم‌محل<sup>۲</sup> است [14]-[20]. در این دسته از روش‌ها ابتدا یک مجموعه‌ی متناهی از توابع پایه‌ای انتخاب و جواب تقریبی به‌صورت یک ترکیب خطی از این توابع با ضرایب مجهول در نظر گرفته می‌شود. سپس برای تعیین ضرایب مجهول تقریب، مقدار تابع مانده در تعداد کافی نقطه از دامنه‌ی حل مسئله محاسبه

<sup>1</sup> Dockner

<sup>2</sup> Collocation method

می‌شود. بدین ترتیب یک دستگاه شامل معادلات خطی یا غیرخطی ایجاد می‌شود که حل آن منجر به تعیین ضرایب مجهول می‌گردد.

روش‌های هم‌محلی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های متعامد چلیشکوف<sup>۱</sup> در حل معادلات تابعی مختلف از قبیل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات انتگرال به‌کار گرفته شده‌اند [21]-[27]. چندجمله‌ای‌های متعامد چلیشکوف در مرجع [21] معرفی شده‌اند. هدف این مقاله به‌کارگیری چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و ماتریس عملگر مشتق آن برای حل دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن است. یکی از معضلاتی که در پیاده‌سازی روش هم‌محلی با آن روبرو هستیم این است که افزایش تعداد توابع پایه‌ای در بسط تقریبی تابع جواب برای رسیدن به دقت مطلوب‌تر، منجر به افزایش تعداد مجهولات دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاصل از پیاده‌سازی روش و بزرگ شدن بعد دستگاه متناظر می‌شود.

الگوریتم تکرار در سیاست<sup>۲</sup> یک طرح محاسباتی دو مرحله‌ای است: ارزیابی سیاست و بهبود سیاست [35]-[28]. در ابتدا، الگوریتم با یک سیاست کنترل مجاز اولیه شروع می‌شود. در مرحله اول، متغیرهای تصمیم‌گیری را به‌صورت تکراری در فضای کنترلی جستجو می‌کند. سپس با یافتن متغیر کنترل بهبود یافته و جایگذاری آن در دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن، در مرحله دوم سعی دارد به‌جای حل مستقیم دستگاه معادلات غیرخطی، یک دستگاه معادلات خطی حاصل از جایگذاری کنترل را حل کند. این دو مرحله تا زمانی که مرحله‌ی بهبود سیاست، سایر سیاست‌های به‌دست آمده را تغییر ندهد، تکرار و الگوریتم به کنترل بهینه مورد نظر همگرا می‌شود.

در این پژوهش قصد داریم یک روش تکراری مبتنی بر روش هم‌محلی بر اساس ماتریس عملگر مشتق چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و روش تکرار در سیاست برای حل دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن متناظر با مدل تبلیغات رقابتی در قالب یک مسئله بازی دیفرانسیلی تصادفی ارائه دهیم. ساختار مقاله به‌طور خلاصه بدین شرح است: در بخش دوم، به فرمول‌بندی دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن متناظر با مدل تبلیغات رقابتی در قالب یک مسئله بازی دیفرانسیلی تصادفی می‌پردازیم. چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و ماتریس عملگر مشتق آن به‌عنوان ابزار تقریب در بخش سوم معرفی می‌شوند. حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همیلتون-ژاکوبی-بلمن با روش هم‌محلی چلیشکوف و روش ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف و تکرار در سیاست را در بخش چهارم شرح می‌دهیم. در بخش پنجم، آنالیز همگرایی و در بخش ششم، پیاده‌سازی عددی روش پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتیجه‌گیری مقاله نیز در بخش هفتم ارائه شده است.

### ۱. فرمول‌بندی مدل تبلیغات رقابتی

در این بخش به معرفی مدل تبلیغات رقابتی بین دو شرکت یک و دو در چارچوب یک بازی دیفرانسیلی تصادفی می‌پردازیم. فرض کنید دو شرکت در یک بازار هستند، اگر  $x(t) \in [0, 1]$  را سهم شرکت یک از بازار در زمان  $t$ ،  $(1-x(t))$  سهم

<sup>1</sup> Chelyshkov

<sup>2</sup> Policy iteration algorithm

شرکت دو از بازار و  $u_i(t)$  نرخ آگهی تبلیغاتی است که توسط شرکت  $i$ ام برای  $i = 1, 2$  به کار گرفته می شود، آن گاه تغییرات سهم شرکت یک در بازار با معادله دیفرانسیل تصادفی زیر توصیف می گردد [5]:

$$dx(t) = (u_1(t)\sqrt{1-x(t)} - u_2(t)\sqrt{x(t)})dt + \sigma x(t)dB(t), x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

که در آن  $\sigma$  ثابت مثبت و  $B(t)$  بیانگر یک فرآیند وینر (حرکت براونی استاندارد) است. سود شرکت یک و دو به ترتیب عبارتند از:

$$\max_{u_1} \left\{ E_0 \left[ \int_0^T \left( q_1 x(t) - \frac{c_1}{2} u_1^2(t) \right) e^{-\rho t} dt + q_{1T} e^{-\rho T} x(T) \right] \right\}, \quad (2)$$

و

$$\max_{u_2} \left\{ E_0 \left[ \int_0^T \left( q_2 (1-x(t)) - \frac{c_2}{2} u_2^2(t) \right) e^{-\rho t} dt + q_{2T} e^{-\rho T} (1-x(T)) \right] \right\}, \quad (3)$$

که در آن  $\rho, q_i, c_i$  و  $q_{iT}$  برای  $i = 1, 2$  مقادیر ثابت و مثبت هستند.

قضیه وجود و یکتایی جواب برای معادله دیفرانسیل تصادفی (۱) تحت شرایط (۲) و (۳) در حالت کلی در مرجع [۶] مطرح و اثبات شده است. علاقمندان برای بررسی جزئیات بیشتر می توانند به فصل ششم در مرجع [۶] مراجعه و نتایج مورد نظر در این خصوص را ملاحظه بفرمایند.

در اینجا هدف تعیین متغیر کنترل بهینه  $u_i$  به عنوان نرخ تبلیغات بهینه توسط شرکت  $i$  است به گونه ای که امید ریاضی سود او حداکثر شود. با توجه به اینکه شرکت ها در رفتار خود استراتژیک هستند، منطقی ترین جواب برای یک بازی رقابت تبلیغاتی، جواب تعادل نش است. به عبارت دقیق تر، هر بازیکن بهترین استراتژی خود را با توجه به این که بازیکن دیگر استراتژی بهینه اش را اختیار کرده است، انتخاب می کند. در بازی های دیفرانسیلی تصادفی ساختار اطلاعاتی از نوع بازخورد است. با استفاده از حسابان ایتو<sup>۱</sup> و تکنیک برنامه ریزی پویا<sup>۲</sup> که بر اصل بهینگی بلمن استوار است، مجموعه استراتژی های  $u_i^* = u_i^*(t, x)$  برای  $i = 1, 2$  یک جواب تعادل نش بازخورد برای بازی دیفرانسیلی (۱)-(۳) است، هرگاه توابع ارزش به طور پیوسته مشتق پذیر  $\mathbb{R} \rightarrow [0, T] \times \mathbb{R}^n : V_i(t, x)$  برای  $i = 1, 2$  وجود داشته باشند به طوری که در دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر صدق کنند:

<sup>1</sup> Itô calculus

<sup>2</sup> Dynamic programming

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} V_1(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_1(t, x) + \max_{u_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x) (u_1(t) \sqrt{1-x(t)} - u_2(t) \sqrt{x(t)}) \right. \\ & \left. + (q_1 x(t) - \frac{c_1}{2} u_1^2(t)) e^{-\rho t} \right\} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial t} V_2(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_2(t, x) + \max_{u_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x) (u_1(t) \sqrt{1-x(t)} - u_2(t) \sqrt{x(t)}) \right. \\ & \left. + (q_2(1-x(t)) - \frac{c_2}{2} u_2^2(t)) e^{-\rho t} \right\} = 0, \\ & V_1(T, x) = q_{1T} e^{-\rho T} x, V_2(T, x) = q_{2T} e^{-\rho T} (1-x). \end{aligned} \right. \quad (۴)$$

با تعریف توابع همیلتونی

$$\begin{aligned} H_1(t, x, u_1, u_2, \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x)) &= \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x) (u_1(t) \sqrt{1-x(t)} - u_2(t) \sqrt{x(t)}) \\ &+ (q_1 x(t) - \frac{c_1}{2} u_1^2(t)) e^{-\rho t}, \\ H_2(t, x, u_1, u_2, \frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x)) &= \frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x) (u_1(t) \sqrt{1-x(t)} - u_2(t) \sqrt{x(t)}) \\ &+ (q_2(1-x(t)) - \frac{c_2}{2} u_2^2(t)) e^{-\rho t}, \end{aligned}$$

و ماکزیمم کردن هر یک از توابع همیلتونی  $H_i(t, x, u_1, u_2, \frac{\partial}{\partial x} V_i(t, x))$  برای  $i = 1, 2$  نسبت به کنترل  $u_i$ ، قوانین

کنترلی بازخورد زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow u_1^*(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x) \frac{\sqrt{1-x}}{e^{-\rho t} c_1}, \quad (۵)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow u_2^*(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x) \frac{\sqrt{x}}{e^{-\rho t} c_2}. \quad (۶)$$

با جایگذاری کنترل‌های تعادلی بازخورد (۵) و (۶) در دستگاه معادلات (۴)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} V_1(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_1(t, x) + q_1 e^{-\rho t} x + \frac{1}{2c_1} e^{\rho t} (1-x) \left( \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x) \right)^2 \\ & \quad + \frac{x}{c_2} e^{\rho t} \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x) \frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial t} V_2(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_2(t, x) + q_2 e^{-\rho t} (1-x) + \frac{1}{2c_2} e^{\rho t} (x) \left( \frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x) \right)^2 \\ & \quad + \frac{(1-x)}{c_1} e^{\rho t} \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x) \frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x) = 0, \\ & V_1(T, x) = q_{1T} e^{-\rho T} x(T), V_2(T, x) = q_{2T} e^{-\rho T} (1-x(T)). \end{aligned} \right. \quad (V)$$

## ۲. چندجمله‌ای‌های چلیشکوف تعمیم یافته

چندجمله‌ای‌های چلیشکوف  $C_n(t)$  برای هر  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  روی بازه  $[0, 1]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند [21]:

$$C_n(t) = \sum_{j=0}^{N-n} (-1)^j \binom{N-n}{j} \binom{N+n+j+1}{N-n} t^{n+j}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

این چندجمله‌ای‌های نسبت به تابع وزن  $w(t) = 1$  روی بازه  $[0, 1]$  متعامد هستند. به عبارت دیگر

$$\int_0^1 C_n(t) C_m(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{n+m+1}, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (A)$$

فرمول رودریگز برای چندجمله‌ای چلیشکوف  $C_n(t)$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C_n(t) = \frac{1}{(N-n)!} \frac{1}{t^{n+1}} \frac{d^{N-n}}{dt^{N-n}} (t^{N+n+1} (1-t)^{N-n}), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

با استفاده از فرمول رودریگز و فرمول انتگرال کشی برای مشتقات یک تابع تحلیلی، می‌توان رابطه انتگرالی زیر برای چندجمله‌ای‌های چلیشکوف را به دست آورد:

$$C_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t^{n+2}} \int_{\Omega_1} \frac{\bar{z}^{(N+2+n)} (1-z)^{N-n}}{(z-t^{-1})^{N-n+1}} dz,$$

که در آن  $\Omega_1$  یک منحنی بسته است که درون آن شامل نقطه‌ی  $z = t^{-1}$  است.

چندجمله‌ای‌های چلیشکوف  $C_n(t)$  دارای ویژگی‌هایی مشابه با چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک هستند. چندجمله‌ای‌های متعامد چلیشکوف نمونه‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که با ترتیب معکوس از فرآیند متعامد سازی روی بازه  $[0,1]$  با تابع وزن  $w(t) = 1$  محاسبه می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها تحت عنوان چندجمله‌ای‌های جایگزین لژاندر نیز شناخته می‌شوند. نکته جالب این است که بر خلاف چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، چندجمله‌ای‌های چلیشکوف جواب‌های معادله دیفرانسیل از نوع فوق هندسی نیستند، اما می‌توان آن‌ها را بر حسب چندجمله‌ای‌های ژاکوبی بیان کرد. بنابراین چندجمله‌ای‌های چلیشکوف بسیاری از ویژگی‌های متمایز چندجمله‌ای‌های ژاکوبی را حفظ می‌کنند. ارتباط بین چندجمله‌ای‌های چلیشکوف با چندجمله‌ای‌های ژاکوبی  $J_k^{(\alpha,\beta)}(t)$  به صورت زیر است:

$$C_n(t) = t^n J_{N-n}^{(2n,1)}(1-2t), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

چندجمله‌ای  $tC_n(t)$  یک جواب معادله دیفرانسیل زیر است:

$$t^2(1-t)\zeta'' - t^2\zeta' + ((N+1)^2t - n(n+1))\zeta = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

که با جایگذاری عبارت  $\zeta(t) = t^n u(t)$  می‌توان یک جواب چندجمله‌ای معادله دیفرانسیل فوق را با استفاده از تابع فوق هندسی  $F$  به شکل زیر به دست آورد:

$$C_n(t) = (-1)^{N-n} t^n F(N-n, N+n+2; 1; 1-t) = (-1)^{N-n} t^n P_{N-n}^{(0,2n+1)}(2t-1), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

برای مقدار ثابت  $N$ ، چندجمله‌ای‌های چلیشکوف  $C_n(t)$  برای هر  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  همگی چندجمله‌ای‌هایی دقیقاً از درجه  $N$  هستند و این یکی از تفاوت‌های عمده بین این چندجمله‌ای‌ها با چندجمله‌ای‌هایی مانند چبیشف و لژاندر است که  $n$  امین چندجمله‌ای دقیقاً از درجه  $n$  است. توجه داریم که این خاصیت نتیجه مستقیم استفاده از روند معکوس در فرآیند متعامد سازی است.

از دیگر ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های چلیشکوف این است که  $C_n(t)$  دارای ریشه  $x = 0$  با مرتبه تکراری  $n$  و  $N-n$  ریشه حقیقی ساده در بازه  $(0,1)$  است. بنابراین برای مقدار ثابت  $N$ ، چندجمله‌ای  $C_0(t)$  دقیقاً دارای  $N$  ریشه حقیقی ساده در بازه  $(0,1)$  است. بنابراین می‌توان با استفاده از این ریشه‌ها، روش انتگرال‌گیری عددی با درجه دقت  $2N$  به دست آورد. اهمیت این روش انتگرال‌گیری مشابه روش انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر است و دلیل این امر وجود تابع وزن  $w(t) = 1$  است که باعث می‌شود تا به توان از این روش انتگرال‌گیری عددی به سادگی استفاده کرد. به منظور استفاده از این چندجمله‌ای‌ها در بازه  $[a,b]$ ، ابتدا نگاشت  $\lambda: [a,b] \rightarrow [0,1]$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

حال چندجمله‌ای‌های چلیشکوف تعمیم‌یافته روی بازه  $[a,b]$  را با نماد  $GC_n(x)$  نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$GC_n(x) = C_n(\lambda(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

با استفاده از رابطه‌ی (8) می‌توان خاصیت تعامد زیر را برای چندجمله‌ای‌های چلیشکوف تعمیم‌یافته نیز به دست آورد:

$$\int_a^b GC_n(x)GC_m(x)dx = \begin{cases} \frac{b-a}{n+m+1}, & m=n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

تابع دلخواه  $f \in L^2[a, b]$  را می‌توان روی بازه  $[a, b]$  برحسب چندجمله‌ای‌های چلیشکوف (9) به صورت زیر تقریب زد:

$$f(x) \simeq \sum_{j=0}^N f_j GC_j(x) = FA_N(x), \quad (10)$$

که در آن

$$F = [f_0, f_1, \dots, f_N], \quad A_N(x) = [GC_0(x), GC_1(x), \dots, GC_N(x)]^T, \quad (11)$$

$$f_j = \frac{2j+1}{b-a} \int_a^b f(x)GC_j(x)dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

**قضیه ۲.۱.** فرض کنید  $f \in C^{(N+1)}[a, b]$  و  $f_N$  تقریبی از تابع  $f$  با استفاده از چندجمله‌ای‌های چلیشکوف تعمیم‌یافته به صورت زیر است:

$$f(x) \simeq f_N(x) = \sum_{j=0}^N f_j GC_j(x),$$

در این صورت

$$\|f(x) - f_N(x)\|_2^2 \leq \frac{(b-a)^{N+1} L_{N+1}}{2^{(2N+1)}(N+1)!},$$

$$L_{N+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(N+1)}(x)|$$

که در آن

**اثبات:** فرض کنید  $f_N$  بهترین تقریب برای  $f$  با استفاده از چندجمله‌ای‌های چلیشکوف تعمیم‌یافته با درجه حداکثر  $N$  است. بنابراین اگر فرض کنیم  $Q_N$  چندجمله‌ای است که  $f$  را در صفرهای انتقال‌یافته چندجمله‌ای‌های چلیشکوف  $T_{N+1}$  درونیابی می‌کند، داریم:

$$\|f - f_N\|_2^2 \leq \|f - Q_N\|_2^2 = \int_a^b |f(x) - Q_N(x)|^2 dx.$$

حال با بکارگیری کران خطا برای چندجمله‌ای درونیاب  $Q_N$  (قضیه 8 در مرجع [32]) در رابطه فوق داریم:

$$\|f - f_N\|_2^2 \leq \int_a^b |f(x) - Q_N(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^{N+1} L_{N+1}}{2^{(2N+1)}(N+1)!},$$

که برهان را کامل می‌کند. ■

**قضیه ۲.۲.** فرض کنید  $A_N(x)$  بردار چندجمله‌ای‌های چلیشکوف تعمیم‌یافته در (11) است. در این صورت اگر

$A'_N(x) = DA_N(x)$  آن‌گاه  $D = (d_{nm})$  و درایه‌های آن از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

$$d_{nm} = \begin{cases} \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=0}^N \alpha_{0,0}^{(j_1,j_2)}, & n=m=0, \\ \sum_{j_1=0}^N \sum_{j_2=0}^N \alpha_{n,m}^{(j_1,j_2)}, & \text{ow.}, \end{cases} \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

که در آن

$$\alpha_{n,m}^{(j_1,j_2)} = \frac{2m+1}{b-a} \frac{(n+j_1)(-1)^{j_1+j_2}}{n+m+j_1+j_2} \binom{N-n}{j_1} \binom{N-m}{j_2} \binom{N+n+j_1+1}{N-n} \binom{N+m+j_2+1}{N-m}.$$

**اثبات:** با استفاده از روابط (10) و (12) می‌توان نتیجه گرفت:

$$GC'_n(x) = \sum_{m=0}^N d_{nm} GC_m(x), \quad n=0, 1, \dots, N. \quad (14)$$

هم‌چنین با استفاده از روابط (10) و (11) و در نظر گرفتن

$$D = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0N} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N0} & d_{N1} & \dots & d_{NN} \end{bmatrix},$$

از رابطه (14) می‌توان نتیجه گرفت که

$$A'_N(x) = \begin{bmatrix} GC'_0(x) \\ GC'_1(x) \\ \vdots \\ GC'_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^N d_{0m} GC'_m(x) \\ \sum_{m=0}^N d_{1m} GC'_m(x) \\ \vdots \\ \sum_{m=0}^N d_{Nm} GC'_m(x) \end{bmatrix} = DA'_N(x).$$

برای محاسبه  $d_{nm}$  ها با استفاده از رابطه (12)، تغییرمتغیر  $t = \lambda(x)$  و رابطه  $dt = \frac{dx}{b-a}$  داریم:

$$\begin{aligned} d_{nm} &= \frac{2m+1}{b-a} \int_a^b GC'_n(x) GC_m(x) dx \\ &= \frac{2m+1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{b-a} C'_n(\lambda(x)) C_m(\lambda(x)) dx \\ &= \frac{2m+1}{b-a} \int_0^1 C'_n(t) C_m(t) dt. \end{aligned} \tag{15}$$

ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که  $m = n = 0$  داریم:

$$C'_0(t) = \sum_{j_1=1}^N (-1)^{j_1} \binom{N}{j_1} \binom{N+j_1+1}{N} j_1 t^{j_1-1}, \tag{16}$$

$$C_0(t) = \sum_{j_2=0}^N (-1)^{j_2} \binom{N}{j_2} \binom{N+j_2+1}{N} t^{j_2}. \tag{17}$$

با قرار دادن  $m = n = 0$  در رابطه (15) و استفاده از روابط (16) و (17) می توان نتیجه گرفت که

$$\alpha_{0,0}^{(j_1,j_2)} = \frac{(-1)^{j_1+j_2}}{b-a} \binom{N}{j_1} \binom{N}{j_2} \binom{N+j_1+1}{N} \binom{N+j_2+1}{N} \frac{j_1}{j_1+j_2}.$$

برای سایر مقادیر مختلف  $n$  و  $m$  به طریق مشابه داریم:

$$C'_n(t) = \sum_{j_1=0}^{N-n} (-1)^{j_1} \binom{N-n}{j_1} \binom{N+n+j_1+1}{N-n} j_1 (n+j_1) t^{n+j_1-1},$$

$$C_m(t) = \sum_{j_2=0}^{N-n} (-1)^{j_2} \binom{N-m}{j_2} \binom{N+m+j_2+1}{N-m} t^{m+j_2},$$

و در نتیجه با استفاده از (15) خواهیم داشت:

$$d_{nm} = \frac{2m+1}{b-a} \sum_{j_1=0}^{N-n} \sum_{j_2=0}^{N-m} (-1)^{j_1+j_2} \binom{N-n}{j_1} \binom{N-m}{j_2} \binom{N+n+j_1+1}{N-n} \binom{N+m+j_2+1}{N-m} (n+j_1) \int_0^1 t^{n+m+j_1+j_2-1} dt$$

$$= \sum_{j_1=0}^N \sum_{j_2=0}^N \alpha_{n,m}^{(j_1,j_2)},$$

که در آن

$$\alpha_{n,m}^{(j_1,j_2)} = \frac{2m+1}{b-a} (-1)^{j_1+j_2} \binom{N-n}{j_1} \binom{N-m}{j_2} \binom{N+n+j_1+1}{N-n} \binom{N+m+j_2+1}{N-m} \frac{n+j_1}{n+m+j_1+j_2},$$

و برهان را کامل می‌کند. ■

هر تابع دو متغیره دلخواه  $f \in L^2([a,b] \times [c,d])$  را می‌توان با استفاده از چند جمله‌ای‌های چلیشکوف تعمیم‌یافته به صورت زیر تقریب زد:

$$f(x, y) \simeq f_{M,N}(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N f_{ij} GC_i(x) GC_j(y) = F A_{M,N}(x, y),$$

که در آن توابع  $GC_i(x)$  و  $GC_j(y)$  به ترتیب چند جمله‌ای‌های چلیشکوف تعمیم‌یافته روی بازه‌های  $[a,b]$  و  $[c,d]$  می‌باشند و

$$F = [f_{00} \dots f_{0N} \dots f_{M0} \dots f_{MN}],$$

$$A_{M,N}(x, y) = A_M(x) \otimes A_N(y).$$

مشابه حل یک متغیره با استفاده از رابطه‌ی تعامد (12) می‌توان ضرایب  $f_{ij}$  را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$f_{ij} = \left( \frac{2i+1}{b-a} \right) \left( \frac{2j+1}{d-c} \right) \int_a^b \int_c^d f(x, y) GC_i(x) GC_j(y) dy dx.$$

همچنین با استفاده از قضیه 2-3، رابطه‌ی زیر برای مشتقات جزئی تابع  $f(x, y)$  به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, y) \simeq F \left( \frac{\partial^k}{\partial x^k} A_M(x) \otimes A_N(y) \right) = F (D_{M+1}^k \otimes I_{N+1}) (A_M(x) \otimes A_N(y)), \quad (18)$$

که در آن  $I_{N+1}$  ماتریس همبندی  $(N+1) \times (N+1)$  بعدی و  $D_{M+1}$  ماتریس عملگر مشتق چلیشکوف  $(M+1) \times (M+1)$

بعدی متناظر با بازه‌ی  $[a, b]$  هستند. به طریق مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x, y) \simeq F(I_{M+1} \otimes D_{N+1}^k)(A_M(x) \otimes A_N(y)) \quad (19)$$

که در آن  $I_{N+1}$  ماتریس همانی  $(N+1) \times (N+1)$  بعدی و  $D_{M+1}$  ماتریس عملگر مشتق چلیشکوف  $(M+1) \times (M+1)$  بعدی متناظر با بازه  $[c, d]$  هستند.

#### ۴. روش ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف و تکرار در سیاست برای حل دستگاه (۷)

در این بخش، قصد داریم روش‌های هم‌محلی چلیشکوف و روش ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف و تکرار در سیاست را برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همیلتون-ژاکوبی-بلمن (7) پیاده‌سازی نماییم. در ابتدا با استفاده از چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و ماتریس عملگر مشتق معرفی شده در بخش 3، روش هم‌محلی چلیشکوف را برای حل دستگاه معادلات (7) پیاده‌سازی می‌کنیم. سپس با اشاره به موانعی که در استفاده از روش‌های هم‌محلی برای حل دستگاه معادلات متناظر وجود دارد به توضیح متخصری در مورد کارایی الگوریتم تکرار در سیاست برای حل مسئله می‌پردازیم. در ادامه روند پیاده‌سازی روش ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف و تکرار در سیاست را برای حل دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن شرح می‌دهیم.

دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن (7) متناظر با بازی دیفرانسیلی تصادفی رقابت تبلیغاتی (1)-(3) را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم  $V_i(t, x)$  تابع ارزش به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر برای شرکت  $i$  است که روی یک مجموعه  $\Sigma \times [0, T]$  با دامنه وضعیت  $\Sigma = [x_{min}, x_{max}]$  برحسب چندجمله‌ای‌های چلیشکوف به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$V_i(t, x) \simeq \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N v_{mn}^i G C_m(t) G C_n(x) = W_i A_{M,N}(t, x), \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

که در آن

$$W_i = [v_{00}^i \dots v_{0N}^i \dots v_{M0}^i \dots v_{MN}^i], \quad i = 1, 2,$$

بردار ضرایب مجهول است که باید آن را به‌دست آوریم. با استفاده از روابط (18) و (19) می‌توان مشتقات جزئی

$$i = k = 1, 2 \quad \text{برای} \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} V_i(t, x) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial t} V_i(t, x)$$

را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i(t, x) \simeq W_i \hat{D} A_{M,N}(t, x),$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} V_i(t, x) \simeq W_i \tilde{D}^k A_{M,N}(t, x),$$

که در آن

$$\hat{D} = D_{M+1} \otimes I_{N+1},$$

$$\tilde{D}^k = I_{M+1} \otimes D_{N+1}^k, \quad k = 1, 2.$$

با توجه به این که هدف یافتن تقریب تابع ارزش  $V_i(t, x)$  روی افق زمانی  $[0, T]$  و دامنه‌ی وضعیت  $\Sigma = [x_{\min}, x_{\max}]$  است، نقاط گره‌ای چبیشف-گوس-لوباتو متناظر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$t_r = l_1 \left( 1 + \cos \left( \frac{(M-r)\pi}{M} \right) \right), \quad r = 0, 1, \dots, M,$$

$$\tau_s = x_{\min} + l_2 \left( 1 + \cos \left( \frac{(N-s)\pi}{N} \right) \right), \quad s = 0, 1, \dots, N,$$

که در آن  $l_1 = \frac{T}{2}$  و  $l_2 = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$ . با جایگذاری مشتقات جزئی تقریبی و هم‌چنین نقاط گره‌ای چبیشف-گوس-لوباتو  $\{t_r\}_{r=0}^M$  و  $\{\tau_s\}_{s=0}^N$  در دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن (7) به دستگاه معادلات جبری زیر می‌رسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 \hat{D} A_{M,N}(t_r, \tau_s) + \frac{\tau_s^2}{2} W_1 \tilde{D}^2 A_{M,N}(t_r, \tau_s) + q_1 e^{-\rho t_r} \tau_s + \frac{1}{2c_1} e^{\rho t_r} \tau_s (1 - \tau_s) (W_1 \tilde{D} A_{M,N}(t_r, \tau_s))^2 \\ \quad + \frac{\tau_s}{c_2} e^{\rho t_r} (W_1 \tilde{D} A_{M,N}(t_r, \tau_s))(W_2 \tilde{D} A_{M,N}(t_r, \tau_s)) = 0, \\ W_2 \hat{D} A_{M,N}(t_r, \tau_s) + \frac{\tau_s^2}{2} W_2 \tilde{D}^2 A_{M,N}(t_r, \tau_s) + q_2 e^{-\rho t_r} (1 - \tau_s) + \frac{1}{2c_2} e^{\rho t_r} (\tau_s) (W_2 \tilde{D} A_{M,N}(t_r, \tau_s))^2 \\ \quad + \frac{(1 - \tau_s)}{c_1} e^{\rho t_r} (W_1 \tilde{D} A_{M,N}(t_r, \tau_s))(W_2 \tilde{D} A_{M,N}(t_r, \tau_s)) = 0, \\ W_1 A_{M,N}(t_M, \tau_s) = q_{1T} e^{-\rho t_M} \tau_s, \\ W_2 A_{M,N}(t_M, \tau_s) = q_{2T} e^{-\rho t_M} (1 - \tau_s), \\ r = 0, 1, \dots, M-1, s = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (21)$$

با حل این دستگاه غیرخطی بردار  $W_i$ ها به‌عنوان بردار ضرایب مجهول محاسبه می‌شوند. با جایگذاری ضرایب مجهول به‌دست آمده در رابطه (20)، جواب‌های تقریبی برای توابع ارزش  $V_1(t, x)$  و  $V_2(t, x)$  تعیین می‌شوند. سپس با استفاده از روابط (5) و (6)، استراتژی‌های تعادلی نش بازخورد تقریبی به‌طریق زیر محاسبه می‌گردند:

$$u_1^*(t, x) \simeq \left( W_1 \tilde{D} A_{M,N}(t, x) \right) \frac{\sqrt{1-x}}{e^{-\rho t} c_1},$$



$$u_2^*(t, x) \simeq - \left( W_2 \tilde{D} A_{M,N}(t, x) \right) \frac{\sqrt{x}}{e^{-\rho t} c_2}.$$

اگرچه با استفاده از روش هم‌محلی چلیشکوف، دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم غیرخطی همیلتون-ژاکوبی (7) به دستگاه معادلات جبری غیرخطی (21) تبدیل می‌شود و این امر باعث ساده‌سازی حل مسئله می‌گردد ولی در عمل هنوز مشکلاتی در رابطه با حل مسائل غیرخطی با روش هم‌محلی وجود دارد. در واقع مسئله مورد نظر شامل جملات غیرخطی  $\left( \frac{\partial}{\partial x} V_i(t, x) \right)^2$  از توابع جواب هستند و برای افزایش دقت جواب مجبور هستیم تعداد توابع پایه‌ای موجود در بسط‌های تقریبی توابع ارزش و تعداد نقاط هم‌محلی را افزایش دهیم. در این صورت تعداد مجهولات دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاصل از پیاده‌سازی روش افزایش و حل آن دشوار می‌گردد. برای رفع این مشکل، استفاده از روش تکرار در سیاست پیشنهاد می‌شود [21]. در این الگوریتم فرض می‌شود که یک کنترل بهینه تجربی دلخواه و مجاز  $u_i^0$  و تابع ارزش متناظر با آن داده شده است. سپس با جایگذاری کنترل در دستگاه معادلات دیفرانسیل همیلتون-ژاکوبی-بلمن (4)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی به دست می‌آید که با حل آن می‌توان توابع ارزش متناظر را محاسبه نمود. با تکرار این روند، یک دنباله از توابع ارزش  $V_i^k$  و سیاست‌های کنترل  $u_i^k$  برای هر بازیکن  $i$  محاسبه می‌شود، به گونه‌ای که کنترل  $u_i^{(k+1)}$  از یک تقریب جواب برای تابع ارزش  $V_i^{k+1}$  با کنترل  $u_i^k$  به دست می‌آید. با استفاده از روش تکرار در سیاست و میل دادن  $k \rightarrow \infty$  تقریبی از توابع ارزش بهینه و استراتژی‌های تعادلی نش متناظر با آن‌ها به دست می‌آیند. شرح روند پیاده‌سازی روش تکرار در سیاست به اختصار در الگوریتم زیر آمده است:

### ۳.۱. الگوریتم تکرار در سیاست

**ورودی:** یک  $\varepsilon > 0$  و یک مجموعه استراتژی دلخواه مجاز  $\{u_1^0(t, x), u_2^0(t, x)\}$ .

**گام اول:** برای  $k = 1$  و یک جفت استراتژی  $\{u_1^{k-1}(t, x), u_2^{k-1}(t, x)\}$ ، دستگاه معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه اول زیر را حل و توابع ارزش  $V_i^k(t, x)$  برای  $i = 1, 2$  را محاسبه کن:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V_1^k(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_1^k(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} V_1^k(t, x) (u_1^{k-1}(t) \sqrt{1-x(t)} - u_2^{k-1}(t) \sqrt{x(t)}) \\ + (q_1 x(t) - \frac{c_1}{2} (u_1^{k-1}(t))^2) e^{-\rho t} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} V_2^k(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_2^k(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} V_2^k(t, x) (u_1^{k-1}(t) \sqrt{1-x(t)} - u_2^{k-1}(t) \sqrt{x(t)}) \\ + (q_2 (1-x(t)) - \frac{c_2}{2} (u_2^{k-1}(t))^2) e^{-\rho t} = 0, \\ V_1^k(T, x) = q_{1T} e^{-\rho T} x(T), V_2^k(T, x) = q_{2T} e^{-\rho T} (1-x(T)). \end{cases} \quad (22)$$

گام دوم: قرار دهید  $k-1 \rightarrow k$  و  $u_i^k(t, x)$  برای  $i = 1, 2$  را از رابطه‌ی زیر حساب کن:

$$u_1^k(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} V_1^k(t, x) \frac{\sqrt{1-x}}{e^{-\rho t} c_1},$$

$$u_2^k(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} V_2^k(t, x) \frac{\sqrt{x}}{e^{-\rho t} c_2}.$$

گام سوم: اگر

$$\max \left\{ \|V_1^k(t_0, x_0) - V_1^{k-1}(t_0, x_0)\|, \|V_2^k(t_0, x_0) - V_2^{k-1}(t_0, x_0)\| \right\} \leq \varepsilon,$$

توقف نموده، توابع  $V_i^k(t, x)$  برای  $i = 1, 2$  را توابع ارزش تقریبی و  $\{u_1^k, u_2^k\}$  را استراتژی تعادلی نش تقریبی در نظر بگیرید. در غیر این صورت به گام 2 باز گردید.

اگرچه با استفاده از الگوریتم تکرار در سیاست در هر گام یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی به دست می‌آید ولی در حالت کلی یافتن جواب دقیق برای این دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه دوم همچنان کار ساده‌ای نیست. بدین منظور در ادامه ترکیب روش هم‌محلی چلیشکوف و الگوریتم تکرار در سیاست برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل همیلتون-ژاکوبی-بلمن (4) را به شرح زیر پیشنهاد می‌شود:

### ۳.۲. الگوریتم ترکیبی روش هم‌محلی چلیشکوف با تکرار در سیاست

ورودی: یک  $\varepsilon > 0$  و یک مجموعه استراتژی دلخواه مجاز  $\{u_1^0(t, x), u_2^0(t, x)\}$ .

گام اول: برای یک جفت استراتژی مجاز  $\{u_1^{(k-1)}(t, x), u_2^{(k-1)}(t, x)\}$  دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1^k \hat{D}A_{M,N}(t_r, \tau_s) + \frac{\tau_s^2}{2} W_1^k \tilde{D}^2 A_{M,N}(t_r, \tau_s) + W_1^k \tilde{D}A_{M,N}(t_r, \tau_s) (u_1^{(k-1)}(t) \sqrt{1-\tau_s} - u_2^{(k-1)}(t) \sqrt{\tau_s}) \\ + (q_1 \tau_s - \frac{c_1}{2} (u_1^{(k-1)}(t))^2) e^{-\rho t} = 0, \\ W_2^k \hat{D}A_{M,N}(t_r, \tau_s) + \frac{\tau_s^2}{2} W_2^k \tilde{D}^2 A_{M,N}(t_r, \tau_s) + W_2^k \tilde{D}A_{M,N}(t_r, \tau_s) (u_1^{(k-1)}(t) \sqrt{1-\tau_s} - u_2^{(k-1)}(t) \sqrt{\tau_s}) \\ + (q_2 (1-\tau_s) - \frac{c_2}{2} (u_2^{(k-1)}(t))^2) e^{-\rho t} = 0, \\ W_1^k A_{M,N}(t_M, \tau_s) = q_{1T} e^{-\rho t_M} \tau_s, \\ W_2^k A_{M,N}(t_M, \tau_s) = q_{2T} e^{-\rho t_M} (1-\tau_s), \\ i = 1, 2, r = 0, 1, \dots, M-1, s = 0, 1, \dots, N, \end{array} \right.$$

را با روش هم‌محلی چلیشکوف حل و سپس توابع ارزش

$$V_i^k(t, x) \simeq W_i^k A_{M,N}(t, x), \quad i = 1, 2,$$

را به دست آورید.

**گام دوم:** استراتژی‌های  $u_i^k$  برای  $i = 1, 2$  را از رابطه‌ی زیر حساب کن:

$$u_1^k(t, x) = W_1^k \tilde{D}A_{M,N}(t, x) \frac{\sqrt{1-x}}{e^{-\rho t} c_1},$$

$$u_2^k(t, x) = -W_2^k \tilde{D}A_{M,N}(t, x) \frac{\sqrt{x}}{e^{-\rho t} c_2}.$$

**گام سوم:** اگر

$$\max \left\{ \|V_1^k(t_0, x_0) - V_1^{k-1}(t_0, x_0)\|, \|V_2^k(t_0, x_0) - V_2^{k-1}(t_0, x_0)\| \right\} \leq \varepsilon,$$

توقف نموده، توابع  $V_i^k(t, x)$  برای  $i = 1, 2$  را توابع ارزش تقریبی و  $\{u_1^k, u_2^k\}$  را استراتژی تعادلی نش تقریبی در نظر بگیرید. در غیر این صورت به گام 2 برگردید.

یکی از راه‌هایی که با استفاده از آن می‌توان یک مجموعه استراتژی دلخواه مجاز را به‌عنوان ورودی برای دو الگوریتم تکرار در سیاست در زیربخش ۴,۱ و الگوریتم ترکیبی روش هم‌محلی چلیشکوف با تکرار در سیاست در زیربخش ۴,۲ در نظر گرفت، استفاده از شرایط پایانی برای توابع ارزش در رابطه‌ی (4) و جایگذاری آن‌ها در قوانین کنترلی بازخورد (۵) و (۶) است. لازم به ذکر است که در بخش پیاده‌سازی عددی، نتایج گزارش شده مبتنی بر استفاده از مجموعه استراتژی‌های مجاز اولیه زیر می‌باشند:

$$u_1^0(t, x) = q_{1T} e^{-\rho(T-t)} \frac{\sqrt{1-x}}{c_1}, \quad u_2^0(t, x) = q_{2T} e^{-\rho(T-t)} \frac{\sqrt{x}}{c_2}.$$

#### ۴. آنالیز همگرایی

آنالیز پایداری لیاپانوف و همگرایی الگوریتم تکرار در سیاست قابل بررسی و اثبات است و خوانندگان برای بررسی جزئیات بیشتر روند اثبات می‌توانند مرجع [۲۸] را مشاهده کنند. حال در این بخش به بررسی همگرایی روش پیشنهادی می‌پردازیم. ابتدا نشان می‌دهیم که تقریب  $V_{M,N}(t, x)$  با استفاده از چندجمله‌ای‌های چلیشکوف تعمیم‌یافته به  $V(t, x)$  همگراست. در ادامه همگرایی الگوریتم تکرار در سیاست را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در گام اول قصد داریم تخمینی از نرم خطای بهترین تقریب برای یک تابع هموار دومتغیره روی دامنه  $\Omega = [0, T] \times \Sigma$  را با استفاده از چندجمله‌ای‌های چلیشکوف دومتغیره بیابیم. به همین منظور اگر فرض کنیم  $V(t, x)$  تابع به اندازه کافی هموار روی  $\Omega$  و  $P_{M,N}(t, x)$

چندجمله‌ای درونیاب تابع  $V(t, x)$  در نقاط  $(t_r, x_s)$  است، که در آن  $t_r$ ها برای  $r = 0, 1, \dots, M$  ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف انتقال‌یافته از درجه  $M + 1$  در بازه  $[0, T]$  و  $x_s$ ها برای  $s = 0, 1, \dots, N$  ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف انتقال‌یافته از درجه  $N + 1$  در بازه  $\Sigma$  هستند، آن‌گاه داریم [26]:

$$V(t, x) - P_{M,N}(t, x) = \frac{\partial^{M+1}V(\eta, x)}{\partial t^{M+1}(M+1)!} \prod_{r=0}^M (t - t_r) + \frac{\partial^{N+1}V(t, \xi)}{\partial x^{N+1}(N+1)!} \prod_{s=0}^N (x - x_s) - \frac{\partial^{M+N+2}V(\eta', \xi')}{\partial t^{M+1}\partial x^{N+1}(M+1)!(N+1)!} \prod_{r=0}^M (t - t_r) \prod_{s=0}^N (x - x_s),$$

که در آن  $\eta, \eta' \in [0, T]$  و  $\xi, \xi' \in \Sigma$ . بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |V(t, x) - P_{M,N}(t, x)| &\leq \max_{(t,x) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{M+1}V(\eta, x)}{\partial t^{M+1}} \right| \prod_{r=0}^M \frac{|t - t_r|}{(M+1)!} + \max_{(t,x) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{N+1}V(t, \xi)}{\partial x^{N+1}} \right| \prod_{s=0}^N \frac{|x - x_s|}{(N+1)!} \\ &+ \max_{(t,x) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{M+N+2}V(\eta', \xi')}{\partial t^{M+1}\partial x^{N+1}} \right| \frac{\prod_{r=0}^M |t - t_r| \prod_{s=0}^N |x - x_s|}{(M+1)!(N+1)!}. \end{aligned} \quad (23)$$

فرض کنید ثابت‌های  $C_1, C_2$  و  $C_3$  به‌گونه‌ای باشند که:

$$\max_{(t,x) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{M+1}V(t, x)}{\partial t^{M+1}} \right| \leq C_1, \quad (24)$$

$$\max_{(t,x) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{N+1}V(t, x)}{\partial x^{N+1}} \right| \leq C_2, \quad (25)$$

$$\max_{(t,x) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{M+N+2}V(t, x)}{\partial t^{M+1}\partial x^{N+1}} \right| \leq C_3. \quad (26)$$

با جایگذاری (24)-(26) در (23) و استفاده از تخمین به‌دست آمده برای گره‌های درونیاب چبیشف در [10] داریم:

$$|V(t, x) - P_{M,N}(t, x)| \leq \frac{C_1(l_1)^{M+1}}{(M+1)!2^M} + \frac{C_2(l_2)^{N+1}}{(N+1)!2^N} + \frac{C_3(l_1)^{M+1}(l_2)^{N+1}}{(M+1)!(N+1)!2^{M+N}}. \quad (27)$$

حال با کمک نامساوی (27) نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۴.۱. فرض کنید  $V_{M,N}(t, x) = WA_{M,N}(t, x)$  بسط توابع چلیشکوف انتقال یافته دوبردی تابع به اندازه کافی هموار  $V(t, x)$  در  $\Omega$  است، که در آن

$$W = [v_{00} \dots v_{0N} \dots v_{M0} \dots v_{MN}],$$

آن گاه وجود دارد اعداد حقیقی  $C_1'$ ،  $C_2'$  و  $C_3'$  به طوری که

$$\|V(t, x) - V_{M,N}(t, x)\|_2 \leq \frac{C_1'(l_1)^{M+1}}{(M+1)!2^M} + \frac{C_2'(l_2)^{N+1}}{(N+1)!2^N} + \frac{C_3'(l_1)^{M+1}(l_2)^{N+1}}{(M+1)!(N+1)!2^{M+N}}. \quad (28)$$

اثبات: فرض می‌کنیم  $X_{M,N}$  فضای چندجمله‌ای‌های دو متغیره با درجه کمتر مساوی  $M$  روی  $t$  و  $N$  روی  $x$  است. بنا به قضیه بهترین تقریب، اگر  $V_{M,N}(t, x)$  بهترین تقریب تابع  $V(t, x)$  در  $X_{M,N}$  است، می‌توان نوشت:

$$\|V(t, x) - V_{M,N}(t, x)\|_2 \leq \|V(t, x) - g(t, x)\|_2,$$

که در آن  $g(t, x)$  هر چندجمله‌ای دلخواه در  $X_{M,N}$  است. بویژه، اگر  $g(t, x)$  همان چندجمله‌ای درونیاب تابع  $V(t, x)$  است، داریم:

$$\begin{aligned} \|V(t, x) - V_{M,N}(t, x)\|_2^2 &= \int_0^T \int_{x_{min}}^{x_{max}} |V(t, x) - V_{M,N}(t, x)|^2 dx dt \\ &\leq \int_0^T \int_{x_{min}}^{x_{max}} |V(t, x) - P_{M,N}(t, x)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

(29) از (27) و (29) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \|V(t, x) - V_{M,N}(t, x)\|_2^2 &\leq \int_0^T \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[ \frac{C_1(l_1)^{M+1}}{(M+1)!2^M} + \frac{C_2(l_2)^{N+1}}{(N+1)!2^N} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_3(l_1)^{M+1}(l_2)^{N+1}}{(M+1)!(N+1)!2^{M+N}} \right]^2 dx dt \\ &= 4l_1l_2 \left[ \frac{C_1(l_1)^{M+1}}{(M+1)!2^M} + \frac{C_2(l_2)^{N+1}}{(N+1)!2^N} + \frac{C_3(l_1)^{M+1}(l_2)^{N+1}}{(M+1)!(N+1)!2^{M+N}} \right]^2. \end{aligned}$$

(۳۰)

از نامساوی (30) می‌توان نتیجه گرفت که نامساوی (28) با  $C_1' = 2C_1\sqrt{l_1l_2}$ ،  $C_2' = 2C_2\sqrt{l_1l_2}$  و  $C_3' = 2C_3\sqrt{l_1l_2}$

نیز برقرار است. ■

اثبات همگرایی الگوریتم تکرار در سیاست برای بازی‌های دیفرانسیلی مجموع ناصفر قطعی با افق زمانی نامتناهی در مراجع [21, 22, 23, 24] آمده است. در ادامه با استفاده از روندی مشابه با افق زمانی نامتناهی به اثبات همگرایی الگوریتم تکرار در سیاست برای بازی دیفرانسیلی رقابت تبلیغاتی با افق زمانی متناهی می‌پردازیم. برای همگرایی الگوریتم تقریب در فضای سیاست، فضای تابعی باناخ

$$\mathcal{V} \subset \{V_i(t, x) : [t_0, t_f] \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2\},$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از فضای تابعی مورد نظر نگاشت  $\mathcal{G}_i : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  برای  $i = 1, 2$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\partial}{\partial t} V_1(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_1(t, x) + q_1 e^{-\rho x} + \frac{1}{2c_1} e^{\rho x} (1-x) \left( \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x) \right)^2 + \frac{x}{c_2} e^{\rho x} \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x) \frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x), \quad (31)$$

$$\mathcal{G}_2 = \frac{\partial}{\partial t} V_2(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_2(t, x) + q_2 e^{-\rho x} (1-x) + \frac{1}{2c_2} e^{\rho x} (x) \left( \frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x) \right)^2 + \frac{(1-x)}{c_1} e^{\rho x} \frac{\partial}{\partial x} V_1(t, x) \frac{\partial}{\partial x} V_2(t, x). \quad (32)$$

لم ۴.۱. فرض کنید  $\mathcal{G}_i$  برای  $i = 1, 2$  نگاشت‌های تعریف شده در (31) و (32) باشند، آن‌گاه برای هر  $V_i \in \mathcal{V}$

$$\mathcal{G}'_{1V_1} Y = \mathcal{G}'_{2V_2} Y = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + e^{\rho x} \frac{\partial Y}{\partial x} \left( \frac{(1-x)}{c_1} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{x}{c_2} \frac{\partial V_2}{\partial x} \right). \quad (33)$$

برابراست با مشتق گاتو  $V_i$  در  $\mathcal{G}_i$ .

اثبات. با توجه به تعریف  $\mathcal{G}_1$ ، برای هر  $V_1 \in \mathcal{V}$  داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(V_1 + sY) - \mathcal{G}_1 &= \frac{\partial(V_1 + sY)}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2(V_1 + sY)}{\partial x^2} + q_1 e^{-\rho x} - \frac{1}{2c_1} e^{\rho x} (x-1) \left( \frac{\partial(V_1 + sY)}{\partial x} \right)^2 \\ &+ x e^{\rho x} \frac{\partial(V_1 + sY)}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} - \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + q_1 e^{-\rho x} - \frac{1}{2c_1} e^{\rho x} (x-1) \left( \frac{\partial V_1}{\partial x} \right)^2 \right) \\ &= s \frac{\partial Y}{\partial t} + s \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + s \frac{\partial Y}{\partial x} \left( \frac{(1-x)}{c_1} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{x}{c_2} \frac{\partial V_2}{\partial x} \right) + \frac{s^2 (1-x)}{2c_1} e^{\rho x} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

بنابراین مشتق گاتو  $\mathcal{G}_1$  در  $V_1$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{G}'_{1V_1} Y = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}_1(V_1 + sY) - \mathcal{G}_1(V_1)}{s} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + e^{\rho x} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \left( \frac{(1-x)}{c_1} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{x}{c_2} \frac{\partial V_2}{\partial x} \right).$$

به طریق مشابه می‌توان مشتق گاتو  $\mathcal{G}_2$  در  $V_2$  را نیز محاسبه کرد. ■

قضیه ۴.۲. فرض کنید عملگرهای  $\mathcal{G}_i$  و  $\mathcal{G}'_{iV_i}$  به ترتیب در (31)-(33) تعریف شده باشند، آن‌گاه روند تکراری روش تکرار

در سیاست در رابطه‌ی (22) معادل با روش شبه نیوتن زیر است:

$$V_i^{k+1} = V_i^k - (\mathcal{G}'_{V_i})^{-1} \mathcal{G}_i, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots$$

اثبات: برای  $i = 1$ ، با در نظر گرفتن رابطه (33) در لم 5-1 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'_{V_1} V_1^{k+1} &= \frac{\partial V_1^{k+1}}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 V_1^{k+1}}{\partial x^2} + e^{\rho t} \frac{\partial V_1^{k+1}}{\partial x} \left( \frac{(1-x)}{c_1} \frac{\partial V_1^k}{\partial x} + \frac{x}{c_2} \frac{\partial V_2^k}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial V_1^{k+1}}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 V_1^{k+1}}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial V_1^{k+1}}{\partial x} \right) (u_1^k \sqrt{1-x} - u_2^k \sqrt{x}), \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}'_{V_1} V_1^k = \frac{\partial V_1^k}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial V_1^k}{\partial x} \right) (u_1^k \sqrt{1-x} - u_2^k \sqrt{x}).$$

از مقایسه عملگر (31) و تکرارهای مربوط به تابع ارزش  $V_1$  در رابطه (22) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\partial V_1^k}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial x^2} + \left( q_1 x - \frac{c_1}{2} (u_1^k)^2 \right) e^{-\rho t} + \left( \frac{\partial V_1^k}{\partial x} \right) (u_1^k \sqrt{1-x} - u_2^k \sqrt{x}).$$

بنابراین

$$\mathcal{G}'_{V_1} V_1^k - \mathcal{G}_1 = - \left( q_1 x - \frac{c_1}{2} (u_1^k)^2 \right) e^{-\rho t}.$$

از طرفی با توجه به (22) داریم:

$$\mathcal{G}'_{V_1} V_1^{k+1} = - \left( q_1 x - \frac{c_1}{2} (u_1^k)^2 \right) e^{-\rho t}. \quad (35)$$

از روابط (34) و (35) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathcal{G}'_{V_1} V_1^{k+1} = \mathcal{G}'_{V_1} V_1^k - \mathcal{G}_1 \Rightarrow V_1^{k+1} = V_1^k - (\mathcal{G}'_{V_1})^{-1} \mathcal{G}_1.$$

اثبات برای  $i = 2$  نیز به طریق مشابه است. ■

### ۵. پیاده‌سازی عددی

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از حل دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن (7) متناظر با مسئله تبلیغات رقابتی تصادفی با استفاده از روش ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف با تکرار در سیاست می‌پردازیم. تمامی محاسبات عددی با استفاده از برنامه نویسی در نرم‌افزار میپل انجام شده است. مقادیر فرضی برای پارامترهای مدل به صورت

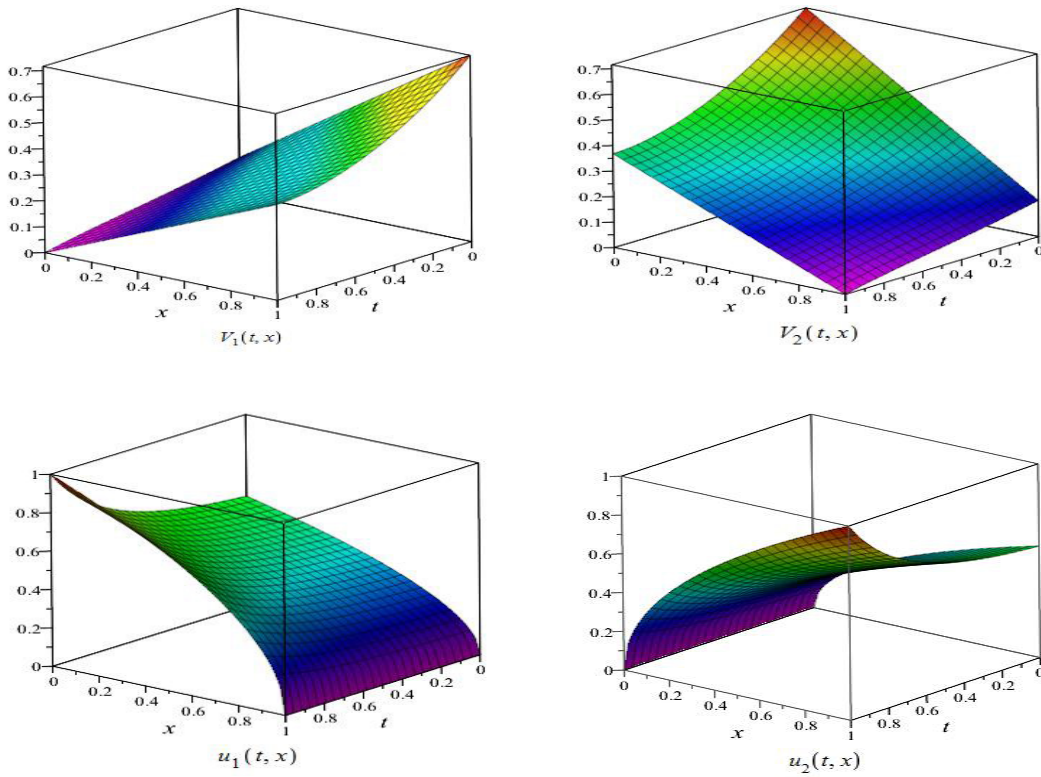
$$\rho = 0.5, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad q_1 = q_2 = 1, \quad q_{1T} = q_{2T} = 0.5,$$

در نظر گرفته شده است. برای  $M = 14$ ،  $N = 14$  و  $k = 7$ ، جواب‌های تقریبی برای توابع ارزش  $V_i(t, x)$ ،  $i = 1, 2$  به عنوان نرخ تبلیغات بهینه برای

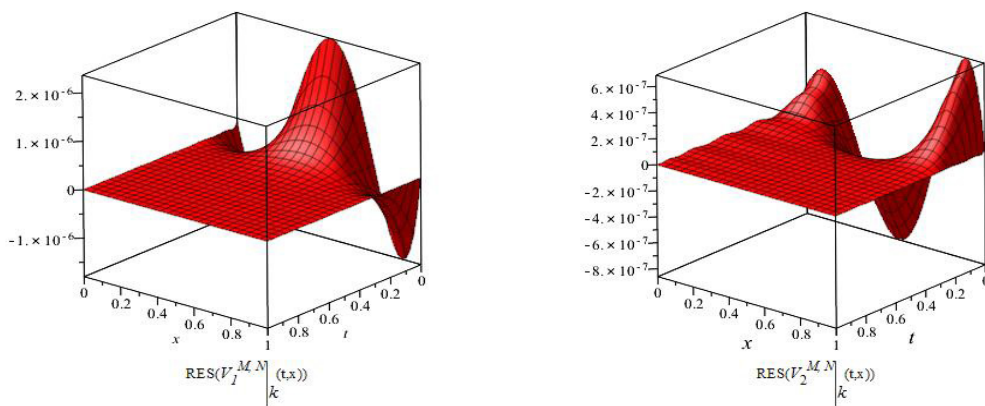
شرکت‌های یک و دو در شکل 1 نشان داده شده‌اند. با توجه به این که جواب دقیق مسئله معلوم نیست، خطاهای تابع مانده چلیشکوف و روش پیشنهادی (ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف با تکرار در سیاست) در جدول 1 گزارش شده است. مشاهده می‌شود که زمان محاسباتی برای حل مسئله با استفاده از روش پیشنهادی ترکیبی در مقایسه با روش هم‌محلی چلیشکوف بسیار کمتر است. اهمیت این مسئله زمانی مشخص می‌شود که ما برای بالا بردن دقت تقریب ناگزیریم تعداد پایه‌های چلیشکوف و همچنین تعداد نقاط هم‌محلی را افزایش دهیم. به علاوه، در مواردی که در روش هم‌محلی چلیشکوف، حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی دشوار و یا حتی غیرممکن است با استفاده از روش ترکیبی به راحتی می‌توان جواب دستگاه‌های معادلات خطی متناظر را محاسبه نمود.

همان‌گونه که از قبل اشاره کردیم، شرکت‌ها در رفتار خود استراتژیک هستند، یعنی سهم بازار هر شرکت از تولید کالا نه تنها به تصمیمات تبلیغاتی خودش بلکه به تصمیمات تبلیغاتی رقیبش نیز بستگی دارد [34]-[36]. به عبارتی، میزان هزینه تبلیغات هر شرکت به منظور افزایش سهم بازار خود و کاهش سهم بازار شرکت رقیب است. فرض کنید شرکت یک با هر بار افزایش سهم بازار  $x$ ، بخشی از هزینه‌های تبلیغاتی خود را کاهش می‌دهد تا شاخص عملکرد او با سرعت بیشتری افزایش یابد. سپس شرکت دو با افزایش هزینه‌های تبلیغاتی خود سعی دارد نسبت به کاهش سهم بازار خود یعنی  $1-x$  واکنش نشان دهد، که این امر تا حدودی باعث افزایش سهم بازار و شاخص عملکرد شرکت دو و در نتیجه کاهش بخشی از سهم بازار شرکت یک می‌گردد. بنابراین با در نظر گرفتن مقادیر مختلف ولی ثابت برای سهم بازار  $x$  در شکل 3 مشاهده می‌شود که توابع ارزش نسبت به متغیر  $x$  صعودی و نسبت به متغیر  $t$  نزولی هستند، در حالی که برای استراتژی‌های تعادلی نش بازخورد به‌عنوان نرخ بهینه تبلیغات شرکت‌ها عکس این قضیه اتفاق می‌افتد، یعنی کنترل‌ها نسبت به متغیر  $x$  نزولی و نسبت به متغیر  $t$  صعودی هستند. با جایگذاری کنترل‌های بهینه تقریبی در معادله دیفرانسیل تصادفی کنترلی (۱) و حل آن با استفاده از روش تقریبات عددی متوالی در مراجع [37,38]، نمودار یک مسیر نمونه‌ای از فرایندهای  $x(t)$  سهم شرکت یک در بازار،  $u_1(t)$  نرخ تبلیغات توسط شرکت یک و  $u_2(t)$  نرخ تبلیغات شرکت دو برحسب زمان در شکل ۴ نشان داده شده است. تاثیر پارامترهای مدل بر کنترل‌های تعادلی نش بازخورد به‌عنوان نرخ تبلیغات بهینه و توابع ارزش به‌عنوان شاخص عملکرد سودآوری برای شرکت‌های یک و دو در حالت‌های متقارن و نامتقارن به ترتیب در جدول‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است. برای شرکت‌های با نقش متقارن فرض می‌کنیم  $q = q_1 = q_2$ ،  $c = c_1 = c_2$ ،  $\rho = \rho_1 = \rho_2$ ، و در حالتی که شرکت‌های یک و دو نقش نامتقارن داشته باشند  $q_1 \neq q_2$ ،  $c_1 \neq c_2$ ،  $\rho_1 \neq \rho_2$  در نظر گرفته می‌شود. توجه داشته باشید علامت + (-) در جدول‌های ۲ و ۳ نشان‌دهنده تاثیر افزایشی (کاهشی) پارامترهای مدل بر نرخ تبلیغات بهینه و شاخص عملکرد سودآوری هر یک از شرکت‌های یک و دو است.

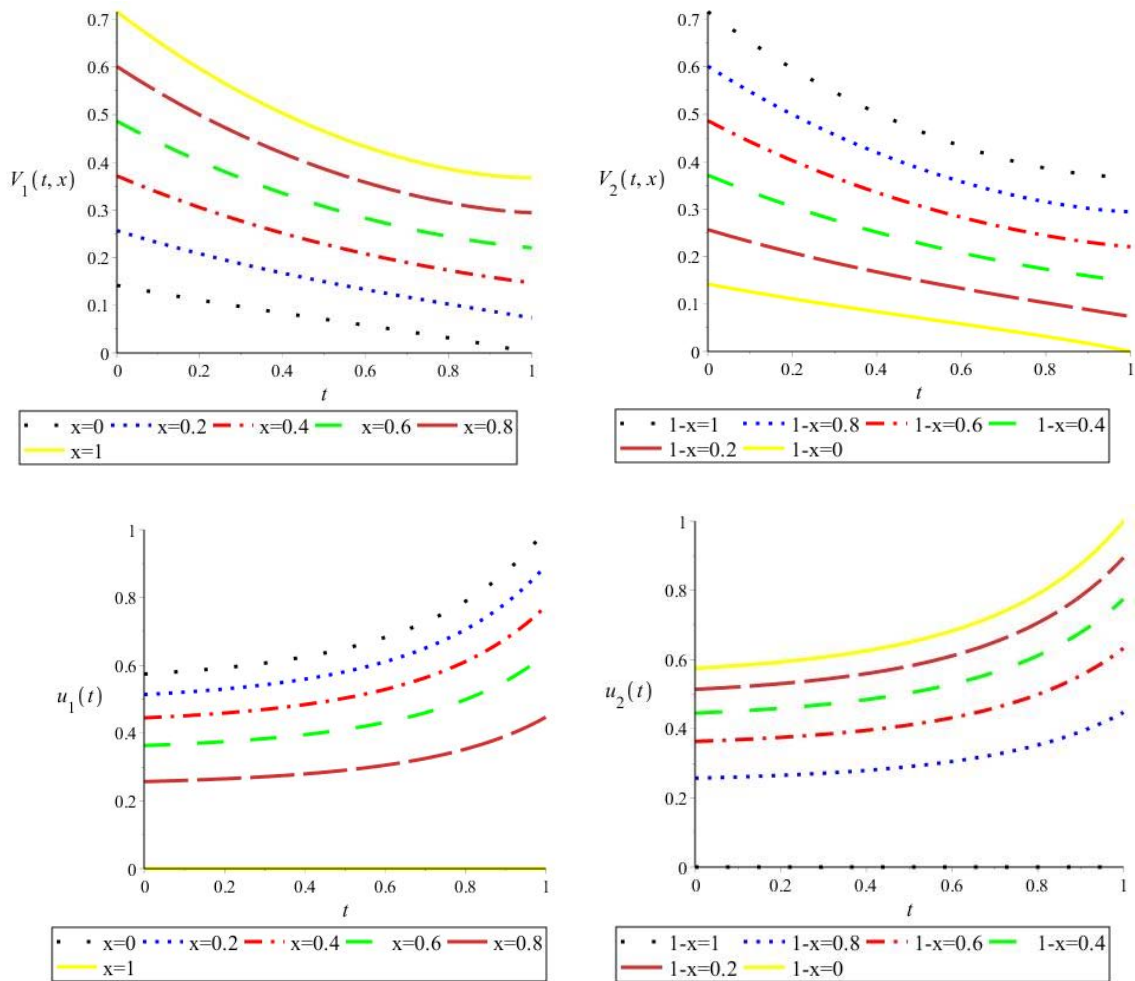




شکل ۱: نمودار جواب‌های تقریبی برای توابع ارزش و کنترل‌های تعادلی نش با خورد با استفاده از روش ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف و تکرار در سیاست برای  $M = 14$ ,  $N = 4$  و  $k = 7$ .



شکل ۲: نمودار توابع مانده برای توابع ارزش با استفاده از روش ترکیبی هم‌محلی چلیشکوف و تکرار در سیاست برای  $M = 14$ ,  $N = 4$  و  $k = 7$ .



**شکل 3:** نمودار توابع ارزش و کنترل‌های تعادلی نش بازخورد برای مقادیر مختلف و ثابت  $x$  به‌عنوان سهم کالای شرکت یک از بازار و  $1 - x$  به‌عنوان سهم کالای شرکت دو از بازار برحسب زمان  $t \in [0, 1]$

**جدول ۱.** مقایسه زمان محاسباتی (ثانیه) برای محاسبه جواب‌های تقریبی با استفاده از روش هم‌محلی چلیشکوف و روش ترکیبی

هم‌محلی چلیشکوف و تکرار در سیاست برای مقادیر مختلف  $K, M, N$ .

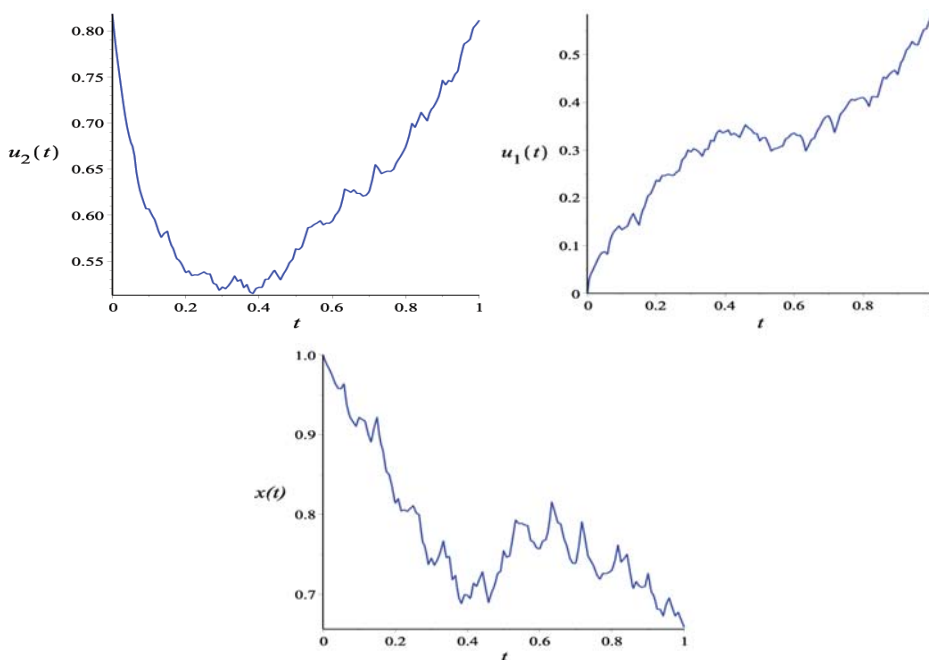
| $M, N$ | $k$ | روش پیشنهادی | روش هم‌محلی چلیشکوف |
|--------|-----|--------------|---------------------|
| ۸, ۲   | ۵   | ۴.۱۹۶        | ۲۱.۸۴۰              |
| ۹, ۳   | ۵   | ۸.۷۹۸        | ۲۹.۵۳۱              |
| ۱۰, ۲  | ۷   | ۹.۱۳۰        | ۱۳.۷۲۳              |
| ۱۲, ۳  | ۷   | ۲۱.۷۹۴       | ۶۷.۱۴۳              |
| ۱۶, ۴  | ۷   | ۸۱.۹۷۹       | ۱۸۶.۲۷۱             |

جدول ۲. تاثیر پارامترها بر عملکرد شرکت‌های متقارن با فرض  $\rho = \rho_1 = \rho_2, c = c_1 = c_2, q = q_1 = q_2$

| پارامترها               | $\rho$ | $c$ | $q$ |
|-------------------------|--------|-----|-----|
| $u_i^*(t, x), i = 1, 2$ | -      | -   | +   |
| $V_i(t, x), i = 1, 2$   | -      | +   | +   |

جدول ۳. تاثیر پارامترها بر عملکرد شرکت‌های نامتقارن با فرض  $\rho_1 \neq \rho_2, c_1 \neq c_2, q_1 \neq q_2$

| پارامترها               | $\rho_i, \rho_j$ | $c_i, c_j$ | $q_i, q_j$ |
|-------------------------|------------------|------------|------------|
| $u_i^*(t, x), i = 1, 2$ | -, +             | -, +       | +, -       |
| $V_i(t, x), i = 1, 2$   | -, +             | ?, +       | +, -       |



شکل ۴: نمودار یک مسیر نمونه‌ای از فرایند  $x(t)$  سهم شرکت یک در بازار، مسیر نمونه‌ای فرایند  $u_1(t)$  نرخ تبلیغات توسط شرکت یک و مسیر نمونه‌ای فرایند  $u_2(t)$  نرخ تبلیغات شرکت دو.

## ۷. نتیجه‌گیری

هدف این مقاله، ارائه یک روش عددی برای حل دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن متناظر با مسئله بازی دیفرانسیلی تصادفی تبلیغات رقابتی است. در حوزه تحقیقات بازاریابی، موضوعاتی از قبیل تبلیغات، فروش، رقبا، تجزیه و تحلیل سیاست‌های تبلیغاتی و مدیریت آن جایگاه اصلی و محوری را به خود اختصاص داده‌اند. در این مقاله، با فرض وجود عدم قطعیت در یک بازار دوجانبه، به کاربردی از بازی‌های دیفرانسیل تصادفی در مدل‌سازی یک مسئله تبلیغات رقابتی بین دو شرکت تولیدی اشاره کردیم. تصمیم در مورد این‌که هر شرکت چه مبلغ یا هزینه بهینه‌ای را برای تبلیغ اختصاص دهد به گونه‌ای که امید ریاضی سود او نیز حداکثر شود، یک تصمیم دشوار و در عین حال مهم است. در این شرایط، یافتن استراتژی تعادل نش بازخورد به‌عنوان نرخ تبلیغات بهینه، منطقی‌ترین راهبرد برای هر دو شرکت در یک بازی رقابت تبلیغاتی تصادفی است. با استفاده از اصل بهینگی بلمن و برنامه‌ریزی پویا در حل مسائل کنترل تصادفی، مجموعه استراتژی‌های تعادل نش بازخورد از توابع ارزش به‌عنوان جواب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بنام همیلتون-ژاکوبی-بلمن به‌دست می‌آیند. شایان ذکر است که، در حالت کلی حل این دستگاه معادلات تابعی یعنی به‌دست آوردن جواب تحلیلی آن کار چندان ساده‌ای نیست. به همین دلیل ارائه روش‌های عددی که به‌توان با استفاده از آنها توابع ارزش را به‌عنوان جواب دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن و در نتیجه استراتژی‌های تعادل نش بازخورد را با دقت خوبی تقریب زد، اهمیت ویژه‌ای دارند. در ابتدا سعی کردیم دستگاه معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن را با روش هم‌محلی چلیشکوف حل نماییم. مشاهده می‌شود که با استفاده از روش هم‌محلی براساس چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و ماتریس عملگر مشتق آن، حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم غیرخطی همیلتون-ژاکوبی-بلمن به حل یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی کاهش می‌یابد. با توجه به این‌که مسئله مورد نظر شامل جملات غیرخطی از تابع جواب است و برای افزایش دقت جواب مجبور هستیم تعداد توابع پایه موجود در بسط تقریبی را افزایش دهیم، تعداد مجهولات دستگاه معادلات جبری غیرخطی متناظر افزایش و حل آن نیز دشوار می‌گردد. سپس الگوریتم تکرار در سیاست را به‌عنوان یک روش برای خطی‌سازی مسئله پیشنهاد کردیم. اگرچه با استفاده از الگوریتم تکرار در سیاست می‌توان حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم غیرخطی را به حل دنباله‌ای از دستگاه معادلات مرتبه دوم خطی کاهش داد ولی در حالت کلی یافتن جواب دقیق یا تحلیلی برای این دسته از مسائل همچنان کار ساده‌ای نیست. بدین منظور در ادامه ترکیبی از هر دو روش هم‌محلی چلیشکوف و الگوریتم تکرار در سیاست را برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل همیلتون-ژاکوبی-بلمن پیشنهاد کردیم. با استفاده از این روش، حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم غیرخطی همیلتون-ژاکوبی-بلمن به حل دنباله‌ای از دستگاه معادلات جبری خطی کاهش می‌یابد. همگرایی روش پیشنهادی ترکیبی را در بخش آنالیز همگرایی مورد بررسی قرار دادیم. در بخش پیاده‌سازی عددی، نتایج حاصل از پیاده‌سازی روش و نمودار جواب‌های تقریبی به‌دست آمده را گزارش کردیم. مشاهده می‌شود که زمان محاسباتی روش پیشنهادی ترکیبی برای حل مسئله بسیار کمتر از زمانی است که روش هم‌محلی چلیشکوف را به‌تنهایی برای حل مسئله به‌کار گرفتیم. هم‌چنین در مواردی که با افزایش تعداد پایه‌ها در بسط تقریبی جواب، روش هم‌محلی چلیشکوف جواب نمی‌دهد، با روش ترکیبی می‌توان جواب مسئله را به‌دست آورد. در پایان نیز با توجه به نمودارهای

به دست آمده به توضیحات مختصری در مورد توابع ارزش تقریبی (شاخص عملکرد سود) و استراتژی‌های تعادلی نش بازخورد (نرخ تبلیغات بهینه) پرداختیم.

## References

1. J.D.C. Little, Aggregate Advertising Models: The State of the Art, *Oper. Res.* **27** (1979), 629-667.
2. K.M. Lancaster, A.S. Judith, Computer-Based Advertising Budgeting Practices of Leading U.S. Consumer Advertisers, *J Advert.* **12** (4) (1983), 4-9.
3. D.M. Hanssens, J.P. Leonard, L. S. Randall, *Market Response Models: Econometric and Time Series Analysis*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.
4. L. Friedman, Game-Theory Models in the Allocation of Advertising Expenditures, *Oper. Res.* **6** (1958), 699-709.
5. E. Dockner, J. Steffen, V. L. Ngo, S. Gerhard, *Differential Games in Economics and anagement Science*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
6. K.M. Ramachandran, C.P. Tsokos, *Stochastic differential games: theory and applications*, Atlantis Press, USA, 2012.
7. M. Jensen, I. Smears, On the convergence of the finite element methods for Hamilton Jacobi Bellman equations, *SIAM J. Numer. Anal.* **51** (2013), 137-162.
8. F. Camilli and E.R. Jakobsen, A finite element like scheme for integro-partial differential Hamilton-Jacobi-Bellman equations, *SIAM J. Numer. Anal.* **47** (2009), 2407-2431.
9. H. Dong, N.V. Krylov, The rate of convergence of finite-difference approximations for parabolic Bellman equations with Lipschitz coefficients in cylindrical domains, *Appl. Math. Optim.* **56** (2007), 37-66.
10. N.V. Krylov, On the rate of convergence of finite-difference approximations for Bellman's equation, *St. Petersburg Math. J.* **9**(3) (1997), 245-256.
11. N.V. Krylov, On the rate of convergence of finite-difference approximations for Bellman's equations with variable coefficients, *Probab. Theory Related Fields* **117**(1) (2000), 1-16.
12. N.V. Krylov, The rate of convergence of finite-difference approximations for Bellman equations with Lipschitz coefficients, *Appl. Math. Optim.* **52**(3) (2005), 365-399.
13. H. Dong and N.V. Krylov, On the rate of convergence of finite-difference approximations for Bellman's equation with constant coefficients, *Algebra Anal.* **17** (2006), 295-313.
14. B. Fornberg, *A practical guide to pseudospectral methods*, Cambridge Monographs, 1995.
15. C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, NewYork, 1988.
16. J. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover, second edition, 2001.
17. J.C. Mason, D.C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, CRC Press LLC, 2003.

18. Z. Avazzadeh, M. Heydari, Chebyshev polynomials for solving two dimensional linear and nonlinear integral equations of the second kind, *Comput. Appl. Math.* **31** (2012), 127-142.
19. E. Scheiber, On the Chebyshev approximation of a function with two variables, arXiv:1504.04693, 2015.
20. E. Tohidi, Application of Chebyshev collocation method for solving two classes of non-classical parabolic PDEs, *Ain Shams Eng. J.* (2015), 373-379.
21. V. S. Chelyshkov, Alternative Orthogonal Polynomials and quadratures, *ETNA, Electron. Trans. Numer. Anal.* **25** (2006), 17-26.
22. L. Moradi, F. Mohammadi, D. Baleanu, A direct numerical solution of time-delay fractional optimal control problems by using Chelyshkov wavelets, *J. Vib. Control.* **25** (2018), 310-324.
23. C. Oğuz, M. Sezer, A.D. Oguz, Chelyshkov collocation approach to solve the systems of linear functional differential equations, *New Trends Math. Sci.* **4** (2015), 83-97.
24. C. Oğuz, M. Sezer, Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.* **259** (2015), 943-954.
25. Y. Talaei, M. Asgari, An operational matrix based on Chelyshkov polynomials for solving multi-order fractional differential equations, *Neural. Comput. Appl.* **30** (2018), 1369-1378.
26. P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, Numerical Solution of Volterra–Hammerstein Delay Integral Equations, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.* **44** (2020), 445-457.
27. D. S. Mohamed, Chelyshkov’s Collocation Method for Solving Three-Dimensional Linear Fredholm Integral Equations, *MathLAB Journal* **4** (2019), 163-171.
28. K. G. Vamvoudakis, F.L. Lewis, Multi-player non-zero-sum games: online adaptive learning solution of coupled Hamilton-Jacobi equations, *Automatica* **47**(8) (2011), 1556-1569.
29. D. Vrabie, F. L. Lewis, Integral reinforcement learning for online computation of feedback Nash strategies of nonzero-sum differential games, *Proceedings of the IEEE conference on Decis. Control.* (2010), 3066-3071.
30. D. Liu, Q. Wei, D. Wang, X. Yang, H. Li, Adaptive Dynamic Programming with Applications in Optimal Control, *Adv. Ind. Control.* Springer, 2017.
31. H. Li, D. Liu, D. Wang, Adaptive dynamic programming for solving nonzero-sum differential games, *Conf. Intell. Control and Autom. Sci.* (2013), 587-591.
32. E. Suli and D. F. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University press, 2003.
33. M. Gasca, T. Sauer, On the history of multivariate polynomial interpolation, *J. Comput. Appl. Math.* **122** (2000), 23-35.
34. Z. Nikooeinejad, A. Delavarkhalafi, M. Heydari, A numerical solution of open-loop Nash equilibrium in nonlinear differential games based on Chebyshev pseudospectral method, *J. Comput. Appl. Math.* **300** (2016), 369-384.
35. Z. Nikooeinejad, A. Delavarkhalafi, M. Heydari, Application of shifted Jacobi pseudospectral method for solving (in)finite-horizon minimax optimal control problems with uncertainty, *Internat. J. Control.* **13** (2017), 725-739.

36. Z. Nikooeinejad, M. Heydari, Nash equilibrium approximation of some class of stochastic differential games: A combined Chebyshev spectral collocation method with policy iteration, *J. Comput. Appl. Math.* **362** (2019), 41-54.
37. M. Saffarzade, G. B. Loghmani, M. Heydari, An iterative technique for the numerical solution of nonlinear stochastic Itô-Volterra integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* **333** (2018), 74-86.
38. S. Alipour, F. Mirzaee, An iterative algorithm for solving two dimensional nonlinear stochastic integral equations: A combined successive approximations method with bilinear spline interpolation, *Appl. Math. Comput.* **371** (2020), 124947.