Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

The Schwarz boundary value problem of complex partial differential equations for the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in an equilateral triangle

Fatemeh Joveini[1], **Mozhgan Akbari**[*2]

1. Faculty of Mathematical Sciences, University of Guilan, Rasht, Iran. E-mail: f_joveini@phd.guilan.ac.ir

2. Faculty of Mathematical Sciences, University of Guilan, Rasht, Iran. ✉ E-mail: m_akbari@guilan.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
29 November 2020
Accepted: 28 May 2023
Published online:
3 December 2023

Keywords:
Schwarz problem,
Cauchy–Pompeiu formula,
Schwarz-Poisson formula,
Equilateral triangle.

ABSTRACT

Introduction

Complex analysis is one of the important branches in mathematics, which has grown significantly in recent years. One of the main goals of complex analysis is its systematic application in the branch of the theory of differential equations with partial derivatives.

Boundary value problems for complex partial differential equations have been studied in many domains. Of all the domains, the unit disc has been studied the most. Polygonal domains that contain corner points are irregular. In general, the boundary value problems in such domains and the study of the behavior of the solution in the neighborhood of the corner points are difficult.

The domain studied in this paper is an equilateral triangle with vertices -1, 1 and $i\sqrt{3}$ and it is represented by the symbol T. Here, the Schwarz boundary value problem for the inhomogeneous Riemann equation on the equilateral triangle T is studied.

Material and methods

In this paper, using the parqueting-reflection method and Cauchy–Pompeiu representation formula, we have accurately calculated a Schwarz-Poisson integral representation formula on the equilateral triangle and its different border sections. Also, we examined the boundary behaviors for the Schwarz type operator.

Results and discussion

Firstly, we present the Schwarz-Poisson representation formula on the equilateral triangle. Then we investigate the boundary behaviors of the Schwarz operator and provide an exact solution for the related Schwarz problem.

Conclusion

In this paper, the Schwartz boundary value problem for the Cauchy-Riemann equation in equilateral triangles has been solved precisely.

How to cite: Joveini, Fatemeh., Akbari, Mozhgan,. (2023). The Schwarz boundary value problem of complex partial differential equations for the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in an equilateral triangle. *Mathematical Researches*, 9 (2), 243 - 256.

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مساله مقدار مرزی شوارتز از معادلات دیفرانسیل جزئی مختلط برای معادله کشی–ریمان ناهمگن در یک مثلث متساوی الاضلاع

فاطمه جوینی [۱]، مژگان اکبری [۲] ✉

۱. گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران. رایانامه: f_joveini@phd.guilan.ac.ir
۲. گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران. ✉ رایانامه: m_akbari@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۹/۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۷
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲

واژه‌های کلیدی:
مساله شوارتز،
فرمول کشی-پمپیو،
فرمول شوارتز-پواسون،
مثلث متساوی الاضلاع.

چکیده

در این مقاله مساله مقدار مرزی شوارتز از معادلات دیفرانسیل جزئی مختلط را برای معادله کشی–ریمان ناهمگن روی یک دامنه چند ضلعی با نقاط گوشه‌ای معلوم یعنی مثلث متساوی الاضلاع، به‌طور دقیق پیشنهاد می‌دهیم. با به‌کار گیری روش بازتاب پارکتینگ و انتخاب یک نقطه‌ی دلخواه از مثلث متساوی الاضلاع مورد نظر و بازتاب های مکرر آن در تمام بخش‌های مرزی از مثلث متساوی الاضلاع تمام صفحه‌ی مختلط پوشش داده می‌شود. علاوه بر این، ابزار اساسی برای حل مساله مقدار مرزی شوارتز از معادلات دیفرانسیل جزئی مختلط برای معادله کشی-ریمان، فرمول نمایش انتگرال کشی-پمپیو است. بدین ترتیب با استفاده از روش بازتاب پارکتینگ و فرمول نمایش انتگرالی کشی–پمپیو یک فرمول نمایش انتگرالی شوارتز-پواسون را روی مثلث متساوی الاضلاع و بخش‌های مرزی مختلف آن به‌طور دقیق محاسبه می‌کنیم. هم‌چنین، رفتارهای مرزی برای عملگر از نوع شوارتز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سرانجام جواب دقیقی را برای مساله مقدار مرزی شوارتز از معادلات دیفرانسیل جزئی مختلط برای معادله کشی-ریمان ناهمگن روی مثلث متساوی الاضلاع ارائه می‌دهیم.

استناد: جوینی، فاطمه؛ اکبری، مژگان؛ (۱۴۰۲). مساله مقدار مرزی شوارتز از معادلات دیفرانسیل جزئی مختلط برای معادله کشی-ریمان ناهمگن در یک مثلث متساوی الاضلاع. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۲۴۳ – ۲۵۶.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.

CC BY NC

مقدمه

آنالیز مختلط یکی از شاخه‌های مهم در ریاضیات است که در سال‌های اخیر رشد چشم‌گیری داشته است. یکی از اهداف اصلی آنالیز مختلط، کاربرد سیستماتیک آن در شاخه‌ی نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است.

نظریه‌ی مسائل مقدار مرزی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مختلط توسط ریمان و هیلبرت پایه گذاری شد و محققانی چون گاخوف، موسخلیش‌ویلی، وکوآ، هاک و وندلند آن‌را توسعه دادند[۶-۱]. بحث در خصوص نظریه‌ی مسائل مقدار مرزی برای توابع تحلیلی با نظریه‌ی معادله انتگرال منفرد، نظریه ایندکس و نیز نظریه‌های کاربردی متعددی در فیزیک مرتبط می‌باشد [7] و [8]. هم‌چنین تکنیک ریمان-هیلبرت در حل بسیاری از مسائل مقدار مرزی با مشتقات جزئی اعم از خطی و غیر خطی انتگرال‌پذیر کارایی دارد [۹].

از یک طرف نظریه‌ای برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مختلط از مرتبه‌ی دلخواه با توجه به جواب‌های بنیادی اساسی یافت شده است [۱۰]، از طرفی دیگر جواب‌های دقیق در دامنه‌های خاص متعددی به‌دست آمده‌اند. این جواب‌های دقیق نه تنها نقش مهمی در کاربردهای مهندسی و فیزیک دارند، بلکه برای ارائه یک نظریه جامع در خصوص دامنه‌های دلخواه تاثیر گذارند.

معادلات دیفرانسل با مشتقات جزئی مختلط، معادلات غیر همگن ساده با یک عملگر دیفرانسیل از حاصل ضرب توان‌های عملگر کشی-ریمان $\partial_{\bar{z}}$ و مزدوج مختلط آن ∂_z، به‌عبارتی $\partial_z^k \partial_{\bar{z}}^l w = f,\ \ k,l \in \mathbb{N}$، می‌باشند. عملگرهای اساسی از این نوع عبارتند از: عملگر کشی-ریمان $\partial_{\bar{z}}$، عملگر لاپلاس $\partial_z\, \partial_{\bar{z}}$ و عملگر بیتسادز $\partial_{\bar{z}}^2$.

مسائل مقدار مرزی اساسی برای معادلات با مشتقات جزئی مختلط عبارتند از: شوارتز، دیریکله و نیومن. مساله یافتن تابع تحلیلی w در ناحیه‌ی $D \subset \mathbb{C}$، به‌عبارتی یافتن جواب معادله کشی-ریمان همگن $w_{\bar{z}} = 0$، صادق در شرایط $\operatorname{Re} w = \gamma$، $w = \gamma$ و $\partial_{\nu_z} w = \gamma$ روی مرز D، به‌ترتیب مساله مقدار مرزی شوارتز، دیریکله و نیومن نامیده می‌شود. در حقیقت مساله مقدار مرزی شوارتز برای معادله کشی-ریمان روی مسائل مقدار مرزی دیریکله و نیومن نقش اساسی دارد.

ابزار اساسی مسائل مقدار مرزی برای معادله کشی-ریمان، فرمول نمایش کشی-پمپیو است. در واقع جواب ویژه برای معادله کشی-ریمان توسط عملگر پمپیو که نسبت به z و $\bar{z}$ مشتق ضعیف دارد، به‌دست می‌آید [۵].

از میان این دامنه‌های نامنظم مرزهایی که شامل قطعاتی از دایره‌ها و خطوط راست و نیز چند ضلعی‌ها می‌باشند، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای نمونه از این دامنه‌ها نیم دیسک واحد، حلقه، نیم دیسک و نیم حلقه، ربع دیسک، ربع حلقه، قطاع هایی از دیسک، قطاع نامتناهی، لنز و لون، نیم صفحه بالایی، ربع صفحه، مثلث، مثلث قائم الزاویه، نیم شش ضلعی و مستطیل را ببینید [27-۱۳]روش بازتاب پارکتینگ روشی برای ساخت هسته شوارتز در این دامنه‌ها می‌باشد. در این روش با بازتاب‌های مکرر دامنه در تمام بخش‌های مرزی، تمام صفحه مختلط پوشش داده می‌شود [28] و [29].

لازم به ذکر است که برای حل مسائل مقدار مرزی برای معادله کشی-ریمان ناهمگن $w_{\bar{z}} = f$، روش وکوآ که در آن جواب‌ها به‌صورت $w = \varphi + Tf$ و φ تابع تحلیلی است، به‌کار گرفته می‌شود. با استفاده از خواص عملگر پمپیو

مساله‌ی مقدار مرزی برای معادله کشی-ریمان ناهمگن به یک مساله‌ی همگن تبدیل می‌شود[۵].
برای هر تابع $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};\mathbb{C})$ ، فرمول نمایش کشی-پمپیو به‌صورت زیر ارائه می‌شود

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} w(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases} \tag{1}$$

که در آن $\zeta = \xi + i\eta$ [۱۱،۵،12].

مسائل مقدار مرزی برای معادلات با مشتقات جزئی مختلط در دامنه‌های متعددی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. از میان تمام دامنه‌ها دیسک واحد بیش از همه مورد بررسی قرار گرفته است. دامنه‌های چند ضلعی که شامل نقاط گوشه‌ای هستند، نامنظم‌اند. به‌طور کلی مسائل مقدار مرزی در چنین دامنه‌هایی و مطالعه‌ی رفتار جواب در همسایگی نقاط گوشه‌ای دشوار است.

دامنه مورد مطالعه در این مقاله یک مثلث متساوی الاضلاع با رئوس $1-$ ، 1 و $i\sqrt{3}$ می‌باشد و با نماد T نمایش داده می‌شود. در این‌جا مساله مقدار مرزی شوارتز برای معادله کشی-ریمان ناهمگن روی مثلث متساوی الاضلاع T، مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

این مقاله به‌صورت زیر ساماندهی شده است. در بخش دوم با استفاده از روش بازتاب پارکتینگ و فرمول کشی-پمپیو، فرمول نمایش شوارتز-پواسون روی مثلث T ارائه می‌گردد. رفتارهای مرزی عملگر شوارتز و جواب دقیق مساله شوارتز مربوط در بخش سوم پیشنهاد می‌شوند.

۲- فرمول شوارتز -پواسون برای مثلث T

در این بخش به ارائه فرمول نمایش شوارتز-پواسون روی مثلث متساوی الاضلاع T می‌پردازیم.

ابتدا نقطه‌ی $z \in T$ را نسبت به خط گذرا از نقاط 1و$i\sqrt{3}$ بازتاب می‌دهیم. در این‌صورت نقطه‌ی

$$z_1 = -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\bar{z} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right),$$

به‌دست می‌آید. با ادامه این فرآیند روی محور حقیقی مثبت نقاط

$$z_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right), z_3 = \bar{z} + 3 + i\sqrt{3}, z_4 = \overline{z_1} + 3 + i\sqrt{3}, z_5 = \overline{z_2} + 3 + i\sqrt{3},$$

$$z_6 = z + 6,$$

را می‌یابیم. هم‌چنین از بازتاب این نقاط نسبت به محور حقیقی به ترتیب نقاط

$$\bar{z}, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4}, \overline{z_5},$$

حاصل می‌شوند. بنابراین تمام انتقال‌ها به‌صورت

$z_k + 6m + 2i\sqrt{3}n, \overline{z_k} + 6m + 2i\sqrt{3}n,$

خواهند بود. نقطه‌ی z را به‌عنوان یک قطب ساده انتخاب نمایید.

بدین ترتیب یک بازتاب مستقیم از قطب، ریشه و یک بازتاب از ریشه، قطب را نتیجه می‌دهد [28] و [29].

$z + \omega_{m,n}, \overline{z_1} + \omega_{m,n}, z_2 + \omega_{m,n},$

قطب‌ها و

$\bar{z} + \omega_{m,n}, z_1 + \omega_{m,n}, \overline{z_2} + \omega_{m,n},$

ریشه‌ها را نمایش می‌دهند. در این‌جا

$\omega_{m,n} = 3m + i\sqrt{3}n, m + n \in 2\mathbb{Z},$

مفروض است. به‌طور مشابه از بازتاب $z \in T$ نسبت به خط گذرا از نقاط $1 -$ و $i\sqrt{3}$ به‌ترتیب نقاط زیر حاصل می‌شوند

$$\widehat{z_1} = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\bar{z} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - i), \widehat{z_2} = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - i), \widehat{z_3} = \bar{z} - 3 + i\sqrt{3},$$

$$\widehat{z_4} = \overline{\widehat{z_1}} - 3 + i\sqrt{3}, \widehat{z_5} = \overline{\widehat{z_2}} - 3 + i\sqrt{3}, \widehat{z_6} = z - 6.$$

قضیه ۱. هر تابع $w \in C^1(T;\mathbb{C}) \cap C(\overline{T};\mathbb{C})$ رابرای $T \subset \mathbb{C}$ می‌توان به‌صورت

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} Re\, w(\zeta)\, 2 \sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}} \left[q_{m,n}(\zeta, z) - q_{m,n}(\zeta, 0)\right] d\zeta$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_1 T}\left[Re\, w(\zeta)\frac{2\left(2\xi - \frac{3}{2}\right)}{\left(2\xi - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + Im\, w(\zeta)\frac{\sqrt{3}}{\left(2\xi - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right] ds_\zeta$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_2 T}\left[Re\, w(\zeta)\frac{2\left(2\xi + \frac{3}{2}\right)}{\left(2\xi + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + Im\, w(\zeta)\frac{\sqrt{3}}{\left(2\xi + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right] ds_\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_3 T} Re\, w(\zeta)\frac{2}{\xi} ds_\zeta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_T \left\{ w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\zeta, z) - q_{m,n}(\zeta, 0)\right] + \frac{1}{\zeta}\right)\right.$$
$$\left. - \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\bar{\zeta}, z) - q_{m,n}(\bar{\zeta}, 0)\right] + \frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right\} d\xi\, d\eta, \qquad (2)$$

که در آن

$\zeta = \xi + i\eta,$

$$q_{m,n}(\zeta,z)=\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3-(z-1)^3},$$

در نظر گرفته شده است.

برهان. از جانشینی نقاط بازتاب شده در رابطه (۱)، داریم

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z-\omega_{m,n}}-\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta-z-\omega_{m,n}}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} w(\zeta)&\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)-\omega_{m,n}}\\ &-\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta+\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)-\omega_{m,n}},\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} w(\zeta)&\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)-\omega_{m,n}}\\ &-\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)-\omega_{m,n}},\end{aligned} \tag{5}$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-\bar z-\omega_{m,n}}-\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta-\bar z-\omega_{m,n}}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} w(\zeta)&\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\bar z-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)-\omega_{m,n}}\\ &-\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta+\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\bar z-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)-\omega_{m,n}},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} w(\zeta)&\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\bar z-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)-\omega_{m,n}}\\ &-\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\bar z-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)-\omega_{m,n}},\end{aligned} \tag{8}$$

تعریف کنید

$$q_{m,n}(\zeta,z)=\frac{1}{\zeta-z-\omega_{m,n}}+\frac{1}{\zeta+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i)-\omega_{m,n}}+\frac{1}{\zeta+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i)-\omega_{m,n}}=\frac{3(\zeta-\omega_{m,n}-1)^2}{(\zeta-\omega_{m,n}-1)^3-(z-1)^3}.$$

سری

$$\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)]=\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}3\left\{\frac{1+(z-1)^3}{(\zeta-\omega_{m,n}-1)^4\left[1+\frac{1-(z-1)^3}{(\zeta-\omega_{m,n}-1)^3}-\frac{(z-1)^3}{(\zeta-\omega_{m,n}-1)^6}\right]}\right\},$$

را در نظر بگیرید. برای $m=n=0$ داریم

$$q_{0,0}(\zeta,z)-q_{0,0}(\zeta,0)=\frac{3(\zeta-1)^2}{(\zeta-1)^3-(z-1)^3}-\frac{3(\zeta-1)^2}{(\zeta-1)^3+1}.$$

در این‌صورت با به‌کارگیری فرمول (۱)، تابع $w(z)$ به‌صورت

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T}w(\zeta)\left[q_{0,0}(\zeta,z)-q_{0,0}(\zeta,0)+\frac{1}{\zeta}\right]d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\left[q_{0,0}(\zeta,z)-q_{0,0}(\zeta,0)+\frac{1}{\zeta}\right]d\xi\, d\eta. \qquad (۱۰)$$

و

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T}w(\zeta)\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z},m^2+n^2\neq 0}[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)]\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z},m^2+n^2\neq 0}[q_{m,n}(\zeta,z)q_{m,n}(\zeta,0)]\,d\xi\, d\eta, \qquad (11)$$

نمایش داده می‌شود. به‌طور مشابه از روابط(۸)-(۶)داریم

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T}w(\zeta)\left[q_{0,0}(\zeta,\bar{z})-q_{0,0}(\zeta,0)+\frac{1}{\zeta}\right]d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\left[q_{0,0}(\zeta,\bar{z})-q_{0,0}(\zeta,0)+\frac{1}{\zeta}\right]d\xi\, d\eta, \qquad (۱۲)$$

و

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} w(\zeta)\sum_{\substack{m+n\in 2\mathbb{Z},\\ m^2+n^2\neq 0}}\left[q_{m,n}(\zeta,\bar{z})-q_{m,n}(\zeta,0)\right]d\zeta -\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\sum_{\substack{m+n\in 2\mathbb{Z},\\ m^2+n^2\neq 0}}\left[q_{m,n}(\zeta,\bar{z}) - q_{m,n}(\zeta,0)\right]d\xi\, d\eta. \qquad (۱۳)$$

با گرفتن مزدوج مختلط از روابط (۱۲) و (۱۳)، فرمول‌های کشی

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} w(\zeta)\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)\right]+\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta -\frac{1}{\pi}\int_T w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)\right]+\frac{1}{\zeta}\right)d\xi\, d\eta, \qquad (۱۴)$$

و

$$0=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} \overline{w(\zeta)}\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\bar{\zeta},z)-q_{m,n}(\bar{\zeta},0)\right]+\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)d\bar{\zeta} -\frac{1}{\pi}\int_T \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\bar{\zeta},z)-q_{m,n}(\bar{\zeta},0)\right]+\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)d\xi\, d\eta \qquad (15)$$

حاصل می‌شوند. اکنون با کم کردن رابطه (۱۵) از (۱۴) داریم

$$\begin{aligned} w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T}\Bigg\{& w(\zeta)\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)\right]+\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta \\ &+\overline{w(\zeta)}\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\bar{\zeta},z)-q_{m,n}(\bar{\zeta},0)\right]+\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)d\bar{\zeta}\Bigg\} \\ &-\frac{1}{\pi}\int_T\Bigg\{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)\right]+\frac{1}{\zeta}\right) \\ &-\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\bar{\zeta},z)-q_{m,n}(\bar{\zeta},0)\right]+\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\Bigg\}\, d\xi\, d\eta. \end{aligned} \qquad (16)$$

قرار دهید

$$\begin{aligned} w(z)=\ & w_1(z)+w_2(z)+w_3(z) \\ &-\frac{1}{\pi}\int_T\Bigg\{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)\right]+\frac{1}{\zeta}\right) \\ &+\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[q_{m,n}(\bar{\zeta},z)-q_{m,n}(\bar{\zeta},0)\right]+\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\Bigg\}\, d\xi\, d\eta, \end{aligned}$$

که در آن $w_1(z)$،$w_2(z)$ و $w_3(z)$ انتگرال‌های مرزی روی بخش‌های مختلف از مرز مثلث T می‌باشند.

ابتدا به محاسبه‌ی $w_1(z)$ روی $\partial_1 T$ می‌پردازیم. این بخش از مرز مثلث بین نقاط 1 و $i\sqrt{3}$ قرار دارد و

$$\zeta = -\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\bar{\zeta} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right),$$

$$\bar{\zeta} = -\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\zeta + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right),$$

$$d\bar{\zeta} = -\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)d\zeta,$$

$$(\zeta-1)^2 = -\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)(\bar{\zeta}-1)^2,$$

$$(\zeta-1)^3 = (\bar{\zeta}-1)^3.$$

هم‌چنین داریم

$$\begin{aligned} w_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_1 T}\Bigg\{ & w(\zeta)\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3-(z-1)^3}-\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3+1}\right]\right. \\ & \left.+\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta \\ & +\overline{w(\zeta)}\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left[\frac{3\left(\bar{\zeta}-\overline{\omega_{m,n}}-1\right)^2}{\left(\bar{\zeta}-\overline{\omega_{m,n}}-1\right)^3-(z-1)^3}-\frac{3\left(\bar{\zeta}-\overline{\omega_{m,n}}-1\right)^2}{\left(\bar{\zeta}-\overline{\omega_{m,n}}-1\right)^3+1}\right]\right. \\ & \left.+\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)d\bar{\zeta}\Bigg\}, \end{aligned}$$

و

$$\left(\bar{\zeta}-\overline{\omega_{m,n}}-1\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\zeta-\omega_{k,l}-1\right)^2,$$

که در آن $k=-\frac{m+n}{2}$، $l=-\frac{3m-n}{2}$ و $k+l\in 2\mathbb{Z}$ مفروض است. بنابراین عبارات همراه با $\bar{\zeta}$ به‌صورت

$$\left(\bar{\zeta}-\overline{\omega_{m,n}}-1\right)^2 d\bar{\zeta} = \left(\zeta-\omega_{k,l}-1\right)^2 d\zeta,$$

$$\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} = \frac{d\zeta}{\zeta-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)}$$

نوشته می‌شوند. از این رو داریم

$$w_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_1 T}\left\{Re\, w(\zeta)\left(\left[2\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left(\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3-(z-1)^3}\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3+1}\right)+\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)}\right]\right)$$
$$\left.+\, i\, Im\, w(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)}\right)\right\}d\zeta.$$

هم‌چنین روی $\partial_1 T$ داریم

$$\eta=-\sqrt{3}\xi+\sqrt{3},$$
$$d\zeta=\left(1-i\sqrt{3}\right)d\xi=-\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)ds_\zeta.$$

بدین ترتیب انتگرال مرزی روی بخش مرزی اول به صورت

$$w_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_1 T}\left\{Re\, w(\zeta)\left[2\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left(\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3-(z-1)^3}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3+1}\right)d\zeta-\frac{2\left(2\xi-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(2\xi-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}ds_\zeta\right]$$
$$\left.-\ Im\, w(\zeta)\frac{\sqrt{3}}{\left(2\xi-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}ds_\zeta\right\}$$

نوشته می‌شود. به‌طور مشابه بامحاسبه‌ی $w_2(z)$ روی $\partial_2 T$ که بین نقاط $i\sqrt{3}$ و -1 قرار دارد و در آن

$$\zeta=-\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\bar{\zeta}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

مفرض است، داریم

$$w_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_2 T}\left\{Re\, w(\zeta)\left[2\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left(\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3-(z-1)^3}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3+1}\right)d\zeta-\frac{2\left(2\xi+\frac{3}{2}\right)^2}{\left(2\xi+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}ds_\zeta\right]$$
$$\left.-\ Im\, w(\zeta)\frac{\sqrt{3}}{\left(2\xi+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}ds_\zeta\right\}.$$

در نهایت روی $\partial_3 T$ که نقاط $1-$ و 1 را به هم وصل می‌کند و در آن داریم

$$\zeta=\bar{\zeta},\qquad \zeta=\xi,\qquad d\zeta=d\xi=ds_\zeta$$

انتگرال مرزی به‌صورت

$$w_3(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_3 T}Re\, w(\zeta)\left[2\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\left(\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3-(z-1)^3}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^2}{\left(\zeta-\omega_{m,n}-1\right)^3+1}\right)+\frac{2}{\xi}\right]ds_\zeta,$$

نوشته می‌شود. بنابراین با ترکیب انتگرال‌های مرزی فرمول نمایش $w(z)$ به‌صورت رابطه (۲) محاسبه می‌شود.

۳- مساله مقدار مرزی شوارتز برای مثلث T

در این بخش ابتدا به بررسی رفتارهای مرزی عملگر شوارتز می‌پردازیم و سپس جواب دقیقی برای مساله شوارتز مربوط ارائه می‌دهیم.

بخش اصلی انتگرال‌های مرزی در فرمول نمایش (۲) عملگر شواتز

$$S_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T}\gamma(\zeta)\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}2\left[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)\right]d\zeta, \qquad (۱۷)$$

می‌باشد.

لم ۱. برای $\zeta_0\in\partial T$ و $\gamma\in C(\partial T;\mathbb{R})$ داریم

$$\lim_{z\to\zeta_0}S_\gamma(z)=\gamma(\zeta_0),$$

که در آن عملگر شوارتز $S_\gamma(z)$ در رابطه (۱۷) داده شده است.

برهان. داریم

$$Re\, S_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T}\gamma(\zeta)\Bigg\{\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\Bigg[\frac{3\big(\zeta-\omega_{m,n}-1\big)^2}{\big(\zeta-\omega_{m,n}-1\big)^3-(z-1)^3} - \frac{3\big(\zeta-\omega_{m,n}-1\big)^2}{\big(\zeta-\omega_{m,n}-1\big)^3+1}\Bigg]d\zeta - \sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}\Bigg[\frac{3\big(\overline{\zeta-\omega_{m,n}-1}\big)^2}{\big(\overline{\zeta-\omega_{m,n}-1}\big)^3-(\bar z-1)^3} - \frac{3\big(\overline{\zeta-\omega_{m,n}-1}\big)^2}{\big(\overline{\zeta-\omega_{m,n}-1}\big)^3+1}\Bigg]d\bar\zeta\Bigg\}.$$

فرض کنید ζ_0 یک نقطه‌ی ثابت روی $\partial_1 T$ باشد. بنابراین $Re\, S_\gamma(z)$ روی $\partial_1 T$ برای $m=n=0$ به‌صورت

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_1 T}\gamma(\zeta)\rho(\zeta,z)\frac{z-z_1}{|\zeta-z|^2}d\zeta,$$

بیان می‌شود که در آن

$$\rho(\zeta,z)=\frac{3(\zeta-1)^2[(z-1)^2+(z-1)(z_1-1)+(z_1-1)^2]}{|(\zeta-1)^2+(\zeta-1)(z-1)+(z-1)^2|^2}.$$

با به‌کارگیری ویژگی هسته شوارتز برای نیم صفحه‌ی بالایی به همراه خط مرزی که از $\partial_1 T$ می‌گذرد، داریم

$$\lim_{z\to\zeta_0}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_1 T}\gamma(\zeta)\rho(\zeta,z)\frac{z-z_1}{|\zeta-z|^2}\left(-\frac{1}{2}\big(-i\sqrt{3}\big)\right)ds_\zeta\right\}=\gamma(\zeta_0).$$

به‌طور مشابه این رابطه برای $\zeta_0\in\partial_2 T$ و $\zeta_0\in\partial_3 T$ برقرار است.

قضیه ۲. مساله مقدار مرزی شوارتز

$$\begin{aligned} &w_{\bar z}=f \text{ روی } T,\ \ f\in L_p(T;\mathbb{C}),\ \ p>2,\\ &Re\, w=\gamma \text{ روی } \partial T,\ \ \gamma\in C(\partial T;\mathbb{R}),\\ &\gamma(\zeta)=0,\ \ \zeta\in\{\pm 1, i\sqrt{3}\}, \end{aligned}\tag{۱۸}$$

و

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_1 T} Im\, w(\zeta)\frac{\sqrt{3}}{\left(2\xi-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}ds_\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_2 T} Im\, w(\zeta)\frac{\sqrt{3}}{\left(2\xi+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}ds_\zeta = c, c\in\mathbb{R}, \tag{۱۹}$$

دارای جواب یکتا به‌صورت

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T}\gamma(\zeta)\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}2\big[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)\big]d\zeta-\frac{1}{\pi i}\int_{\partial_1 T}\gamma(\zeta)\frac{2\xi-\frac{3}{2}}{\left(2\xi-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}ds_\zeta -$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\partial_2 T}\gamma(\zeta)\frac{2\xi+\frac{3}{2}}{\left(2\xi+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}ds_\zeta+\frac{1}{\pi i}\int_{\partial_3 T}\gamma(\zeta)\frac{1}{\xi}ds_\zeta+ic-\frac{1}{\pi}\int_T\Big\{w_{\bar\zeta}(\zeta)\Big(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}[q_{m,n}(\zeta,z)-q_{m,n}(\zeta,0)]+\frac{1}{\zeta}\Big)-\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}\Big(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z}}[q_{m,n}(\bar\zeta,z)-q_{m,n}(\bar\zeta,0)]+\frac{1}{\bar\zeta}\Big)\Big\}d\xi\, d\eta, \quad (20)$$

می‌باشد.

برهان. قرار دهید

$$Tf(z)=-\frac{1}{\pi}\int_T\left\{f(\zeta)\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z},}[q_{m,n}(\zeta,z)\quad-q_{m,n}(\zeta,0)]+\frac{1}{\zeta}\right)-\overline{f(\zeta)}\left(\sum_{m+n\in 2\mathbb{Z},}[q_{m,n}(\bar\zeta,z)-q_{m,n}(\bar\zeta,0)]+\frac{1}{\bar\zeta}\right)\right\}d\xi\, d\eta.$$

تابع $Tf(z)$ یک تابع تحلیلی است و عملگر پمپیو نامیده می‌شود. بنابراین

$$\partial_{\bar z}[Tf(z)]=f(z), z\in T,$$

یک جواب ضعیف برای مساله مقدار مرزی شوارتز ارائه می‌دهد.

هم‌چنین با محاسبه‌ی بخش حقیقی $Tf(z)$ و به‌کارگیری لم ۱

$$\lim_{z\to\zeta_0} Tf(z)=0$$

نتیجه می‌شود.

References

1. Riemann B., "Gesammelte mathematisch Werke", herausgegeben von H. Weber, zweiteAuflage, Leipzig (1892).
2. Hilbert D., "Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", Chelsea (1953).
3. Gakhov F.D., "Boundary Value Problems", Pergamon Press, Oxford (1966).
4. Muskhelishvili N.I., "Singular Integral Equations", Noordhoff, Groningen (1953).
5. Vekua I.N., "Generalized Analytic Functions", International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Pergamon Press, Oxford (1962).
6. Haack W., Wendland W., "Lectures on Plaffian differential equations", Pergamon Press, Oxford (1972).
7. Jianke L., "Boundary Value Problems for Analytic Functions", World Scientific, Singapore (1993).
8. Muskhelishvili N.I., "Singular Integral Equations", second ed., Noordhoff, Groningen (1968).
9. Fokas A.S., "A Unified Approach to Boundary Value Problem", CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math, 78, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2008).
10. Begehr H., Hile G.N., "A hierarchy of integral operators", Rocky Mountain J. Math. 27 (1997) 669-706.

11. Begehr H., "Boundary value problems in complex analysis", I, Bol. Asoc. Mat. Venez, 12 (2005) 65–85; II, Bol. Asoc. Mat. Venez. 12 (2005) 217–250.

12. Begehr H., "Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations: An Introductory Text", World Scientific, Singapore (1994).

13. Wang Y., "Schwarz-type boundary value problems for the polyanalytic equation in the half unit disc", Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal, 57 (2012) 983–993.

14. Vaitekhovich T., "Boundary value problems for complex partial differential equations in a ring domain", PhD thesis, FU Berlin, (2008). Available from: www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS-thesis 000000003859.

15. Begehr H., Vaitekhovich T., "Harmonic boundary value problems in half disc and half ring", Functionset Approximatio, 40 (2009) 251–282.

16. Costache M.R., "Basic boundary value problems for the Cauchy-Riemann and the Poisson equations in a quarter disc", Master thesis, Scoala Naormala Superioara Bucharest, Depart. of Math (2009).

17. Shupeyeva B., "Some Basic Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations in Quarter Ring and Half Hexagon", PhD thesis, FU Berlin (2013). Available from: www.diss.fuberlin.de/diss/receive/FUDISS-thesis-000000094596.

18. Wang, Y., "Boundary value problems for complex partial differential equations in fanshaped Domains", PhD thesis, FU Berlin (2011). Available from: www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS-thesis-000000021359.

19. Akel M.S., Hussein H.S., "Two basic boundary value problems for inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in an infinite sector", Adv. Pure and Appl. Math. 3 (2012) 315–328.

20. Begehr H., Vaitekhovich T., "Schwarz problem in lens and lune", Complex Variables and Elliptic Equations, 59 (2014) 76–84.

21. Joveini F., Akbari M.., "Schwarz problem in lens and half lens", Eurasian Math. J. 10(2) (2019) 49–64.

22. Gartner E., "Basic complex boundary value problems in the upper half plane", PhD thesis, FU Berlin (2006). Available from: www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS thesis 000000002129.

23. Abdymanapov S.A., Begehr H., Tungatarov A.B., "Some Schwarz problems in a quarter plane", Eurasian Math Journal, 3 (2005) 22-35.

24. Begehr H., Vaitekhovich T., "Harmonic Dirichlet problem for some equilateral triangle", Complex Variables and Elliptic Equations, 57 (2012) 185-196.

25. Wang Y.F., Wang Y.J., "Schwarz-type problem of nonhomogeneous Cauchy-Riemann equation on a triangle", J. Math. Anal. Appl. 377 (2011) 557-570.

26. Joveini F., Akbari, M. "Schwarz boundary value problem on a triangle", Casp. J. Math. Sci. 9(2) (2020) 266-283.

27. Wang Y., Zhao X., "Schwarz boundary value problem for the Cauchy-Riemann equation in a rectangle", Boundary Value Problems, 7 (2016) 1-12.

28. Begehr H., Vaitekhovich T., "Green functions, reflections and plane parqueting", Euras. Math. Journal, 1 (2010) 17-31.

29. Begehr H., Vaitekhovich T., "Green functions, reflections and plane parqueting", Euras. Math. Journal, 2, (2011) 139-142.