Kharazmi University
Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Subdistance-preserving Maps Between Subgroups of Positive Continuous Functions

Bagher Jafarzadeh [1]

1. Department of Mathematics, Mahshahr Branch, Islamic Azad University, Mahshahr, Iran.
E-mail: bagher.jafarzadeh@iau.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 16 February 2021
Received in revised form: 11 September 2021
Accepted: 26 September 2021
Published online: 3 December 2023

Keywords:
Subdistances,
Subgroups of functions,
Choquet boundaries,
Metricoid groups,
Weighted composition Operators,
Mazur-Ulam theorem,
Banach-Stone theorem.

ABSTRACT

Introduction

In the class of normed spaces, the study of isometries reveals some geometric properties of the spaces. The classical results in this topic begin with two theorems of Mazur-Ulam and Banach-Stone. By the Mazur-Ulam theorem, any surjective isometry between two real normed spaces preserves the midpoints, and consequently, it is real-linear up to a translation. The Banach-Stone theorem states that if X, Y are compact Hausdorff spaces and $T: C(X) \to C(Y)$ is a surjective linear isometry, then there are a homeomorphism $\psi: Y \to X$ and a function $h \in C(Y)$ with modulus 1 such that $Tf(y) = h(y)f(\psi(y))$ for all $f \in C(X)$ and $y \in Y$. Both theorems have several extensions for various normed spaces (of functions). Motivated by the Mazur-Ulam theorem, Hatori et al. introduced the notion of metricoid spaces and then they investigated some Mazur-Ulam type theorems for certain metricoid spaces, rather than normed spaces.

For a compact Hausdorff space X, let $C(X)$ and $C_{\mathbb{R}}(X)$ be the Banach algebras of all complex-valued, respectively, real-valued continuous functions on X with the uniform norm $\|\cdot\|_X$. We denote by $C^+(X)$ the subset $\{f \in C_{\mathbb{R}}(X): f(x) > 0 \text{ for all } x \in X\}$ of $C_{\mathbb{R}}(X)$. For a subset A of $C_{\mathbb{R}}(X)$, we set $\exp A = \{e^f: f \in A\}$. The *Choquet boundary* of a subspace A of $C_{\mathbb{R}}(X)$, denoted by $\mathrm{Ch}(A)$, is the set of all $x \in X$ such that the evaluation functional $e_x: A \longrightarrow \mathbb{R}$, defined by $e_x(f) = f(x)$, is an extreme point of the unit ball of A^*. For a unital algebra A, we use the notation A^{-1} for the group of invertible elements of A. Following the work of Hatori et al., for $f, g \in C(X)^{-1}$, we set $\Delta(f,g) = \left\|\frac{f}{g} - 1\right\|_X$ and

$$\delta_{\max}(f,g) = \max\left\{\left\|\frac{f}{g} - 1\right\|_X, \left\|\frac{g}{f} - 1\right\|_X\right\},$$
$$\delta_+(f,g) = \left\|\frac{f}{g} - 1\right\|_X + \left\|\frac{g}{f} - 1\right\|_X,$$
$$\delta_\times(f,g) = \left\|\frac{f}{g} - 1\right\|_X \left\|\frac{g}{f} - 1\right\|_X.$$

For $i = 1,2$, let X_i be a compact Hausdorff space, G_i be a subgroup of $C(X_i)^{-1}$, and $\delta \in \{\Delta, \delta_{\max}, \delta_+, \delta_\times\}$. A map $T: G_1 \longrightarrow G_2$ is said to be a δ-*isometry* if for any $f, g \in G_1$, we have $\delta(Tf, Tg) = \delta(f,g)$. Surjective δ-isometries between various groups of functions have been intensively studied by many authors such as O. Hatori, K. Kobayashi, T. Miura, E. Takahasi, A. Jimenez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos and T. Nogawa. These groups include the groups of invertible elements of uniform algebras and their exponential components, strictly positive continuous functions and the exponential components of the algebras of Lipschitz

functions. In most cases, such maps have representations as generalized weighted composition operators.
In this paper, we assume that $\delta \in \{\Delta, \delta_{\max}, \delta_+, \delta_\times\}$ and study surjective δ-isometries $T: \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$, where for $i = 1,2$, A_i is a uniformly closed, point separating subalgebra of $C_{\mathbb{R}}(X_i)$ containing constants, for some compact Hausdorff space X_i. Introducing some positive functions of two variables similar to $\Delta, \delta_{\max}, \delta_+, \delta_\times$ which are associated to $\alpha > 0$ (instead of 1) and nonzero integers m, n, we also investigate surjections preserving such positive functions of two variables.

Main Results

Throughout this paper, for $i = 1,2$, X_i is a compact Hausdorff space and A_i is a uniformly closed subalgebra of $C_{\mathbb{R}}(X_i)$ which contains the constants and separates the points of X_i, and $T: \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$ is a surjective map.

Theorem 1. Let $\delta \in \{\delta_{\max}, \delta_+, \delta_\times\}$. If T is a δ-isometry, then there exist a continuous function h:$\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \{-1,1\}$ and a homeomorphism φ:$\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ such that

$$Tf(y) = T1(y) f(\varphi(y))^{h(y)} \qquad (f \in \exp A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)).$$

Corollary 2. T is a $\delta_{\max}$-isometry if and only if there exist a continuous function h on $\mathrm{Ch}(A_2)$ with values in $\{-1,1\}$ and a homeomorphism φ:$\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ such that

$$Tf(y) = T1(y) f(\varphi(y))^{h(y)} \qquad (f \in \exp A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)).$$

Theorem 3. If T is a Δ-isometry, then there exists a homeomorphism φ:$\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ such that $Tf(y) = T1(y) f(\varphi(y))$ for all $f \in \exp A_1$ and $y \in \mathrm{Ch}(A_2)$.

Now extending the notations of $\delta_{\max}, \delta_+, \delta_\times, \Delta$, we introduce the following notations. Let m, n be nonzero integers and $\alpha > 0$. For a compact Hausdorff space X and each $f, g \in C^+(X)$, we set

$$\begin{gathered}
{}_n^m\delta_{\max}^\alpha(f,g) = \max\{\alpha^{-1}\|f^m g^n - \alpha\|_X, \alpha\|g^{-n} f^{-m} - \alpha^{-1}\|_X\}, \\
{}_n^m\delta_+^\alpha(f,g) = \alpha^{-1}\|f^m g^n - \alpha\|_X + \alpha\|g^{-n} f^{-m} - \alpha^{-1}\|_X, \\
{}_n^m\delta_\times^\alpha(f,g) = \|f^m g^n - \alpha\|_X \|g^{-n} f^{-m} - \alpha^{-1}\|_X, \\
{}_n^m\Delta^\alpha(f,g) = \|f^m g^n - \alpha\|_X.
\end{gathered}$$

In next two theorems, m, n are nonzero integers and $\alpha > 0$.

Theorem 4. Let ${}_n^m\delta^\alpha \in \{{}_n^m\delta_{\max}^\alpha, {}_n^m\delta_+^\alpha, {}_n^m\delta_\times^\alpha\}$. If T is a ${}_n^m\delta^\alpha$-isometry, then there exist a continuous function h:$\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \{-1,1\}$ and a homeomorphism φ:$\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ such that

$$Tf(y) = T1(y) f(\varphi(y))^{h(y)} \qquad (f \in \exp A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)).$$

Theorem 5. If T is a ${}_n^m\Delta^\alpha$-isometry, then there exists a homeomorphism φ:$\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ such that $Tf(y) = T1(y) f(\varphi(y))$ for all $f \in \exp A_1$ and $y \in \mathrm{Ch}(A_2)$.

How to cite: Jafarzadeh, Bagher. (1402). Subdistance-preserving Maps Between Subgroups of Positive Continuous Functions, *Mathematical Researches*, 9 (2), 93 – 106.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نگاشت‌های حافظ زیرفاصله بین زیرگروه‌های توابع پیوستهٔ مثبت

باقر جعفرزاده [۱]

۱. گروه ریاضی، واحد ماهشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، ماهشهر، ایران. رایانامه: bagher.jafarzadeh@iau.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	برای $i = 1,2$، فرض کنیم X_i یک فضای هاسدورف فشرده و A_i زیرجبری به طور یکنواخت بسته از $C_{\mathbb{R}}(X_i)$ باشد که تابع‌های ثابت را در بر دارد و نقطه‌های X_i را جدا می‌کند. در این مقاله، نگاشت‌های پوشای $T\colon \exp A_1 \to \exp A_2$ را توصیف می‌کنیم که زیرفاصله‌های مشخصی را حفظ می‌کنند.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۱/۲۸	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۶/۲۰	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۷/۴	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲	
واژه‌های کلیدی:	
زیرفاصله‌ها،	
زیرگروه‌های توابع،	
مرزهای شوکه،	
گروه‌های متریک‌واره،	
عملگرهای ترکیبی وزن‌دار،	
قضیهٔ مازور–اولام،	
قضیهٔ باناخ–استون.	

استناد: جعفرزاده ، باقر (۱۴۰۲). نگاشت‌های حافظ زیرفاصله بین زیرگروه‌های توابع پیوستهٔ مثبت، *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۹۳ -۱۰۶.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه و پیش‌نیازها

در ردهٔ فضاهای نرم‌دار، مطالعهٔ طولپایی‌ها برخی از ویژگی‌های هندسی فضاها را آشکار می‌سازد. نتایج کلاسیک در این زمینه با دو قضیهٔ مازور-اولام و باناخ-استون آغاز می‌گردند. فرض کنیم A و B دو فضای برداری حقیقی نرم‌دار باشند. نگاشت $T: A \to B$ را یک طولپایی می‌نامند هرگاه به‌ازای هر $f, g \in A$، $\|Tf - Tg\|_B = \|f - g\|_A$. به نگاشت $T: A \to B$ بین فضاهای برداری حقیقی، خطی-حقیقی گفته می‌شود هرگاه به‌ازای هر $f, g \in A$ و هر $r \in \mathbb{R}$، $T(rf + g) = rTf + Tg$. قضیهٔ مازور-اولام بیان می‌کند که اگر $T: A \to B$ طولپایی پوشا بین فضاهای برداری حقیقی نرم‌دار باشد به گونه‌ای که $T(0) = 0$، آنگاه T یک طولپایی خطی-حقیقی است. برای فضای هاسدورف فشردهٔ X، منظور از $C(X)$ جبر باناخ همهٔ توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار روی X با نرم یکنواخت است. قضیهٔ باناخ-استون بیان می‌کند که اگر X و Y دو فضای هاسدورف فشرده باشند و $T: C(X) \to C(Y)$ یک طولپایی خطی پوشا باشد، آنگاه همسان‌ریختی $\psi: Y \to X$ و تابع $h \in C(Y)$ با قدر مطلق 1 موجودند به گونه‌ای که

$$Tf(y) = h(y)f\big(\psi(y)\big) \quad (f \in C(X), y \in Y).$$

هر دو قضیه توسیع‌های مختلفی برای فضاهای نرم‌دار گوناگون از توابع دارند. در این زمینه، کتاب‌های [۱] و [۲] منابع بسیار خوبی هستند. در [۴]، هاتوری[1] و دیگران مفهوم فضاهای متریک‌واره[2] را با الهام از قضیهٔ مازور-اولام معرفی کردند و سپس نوعی قضیهٔ مازور-اولام را برای فضاهای متریک‌واره به جای فضاهای نرم‌دار به دست آوردند. در ادامهٔ این بخش، به ارائه مقدمات لازم برای فضاهای متریک‌واره و بیان نتایج مورد نیاز از منبع [٤] می‌پردازیم.

مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی نامنفی را با $\mathbb{R}^+$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم G یک مجموعه و $d: G \times G \to \mathbb{R}^+$ نگاشتی باشد که برای $f, g \in G$، داشته باشیم $d(f, g) = 0$ اگر و تنها اگر $f = g$. نگاشت $T: G \to G$ یک d-طولپایی نامیده می‌شود اگر برای هر $f, g \in G$، $d(Tf, Tg) = d(f, g)$. به علاوه، نگاشت d را یک زیرفاصله[3] می نامیم هرگاه برای هر $f, g \in G$، عدد $K(f, g) \in \mathbb{R}^+$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر d-طولپایی دوسویی T بر G با $Tg = g$، نابرابری $d(Tf, f) \leq K(f, g)$ برقرار باشد. در این حالت، به دوتایی (G, d) یک فضای متریک‌واره می‌گوییم.

هر فضای متری یک فضای متریک‌واره است. در واقع، اگر (G, d) یک فضای متری باشد، آنگاه برای هر $f, g \in G$ و هر d-طولپایی دوسویی T بر G با $Tg = g$، خواهیم داشت $d(Tf, f) \leq d(Tf, Tg) + d(Tg, f) = d(f, g) + d(g, f) = 2d(f, g)$؛ یعنی (G, d) یک فضای متریک‌واره است.

فرض کنیم (G, d) یک فضای متریک‌واره باشد و $h \in G$. در این صورت، d-طولپایی $\rho: G \to G$ یک انعکاس[4] از G در h نامیده می‌شود اگر $\rho h = h$، ρ^2 نگاشت همانی باشد، و ثابت $L(h) > 1$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر

1. Hatori
2. Metricoid spaces
1. Subdistance
2. Reflection

$f \in G$، $d(\rho f, f) \geq L(h)d(f,h)$. مجموعهٔ همهٔ انعکاس‌های از G در h را با $R(G,h)$ نشان می‌دهیم. فضای متریک‌وارهٔ (G,d) را انعکاسی[1] نامند هرگاه برای هر $h \in G$، $R(G,h)$ ناتهی باشد.

در فضای نرم‌دار N، برای $f, g \in N$، به $\frac{f+g}{2}$ نقطهٔ میانی[2] f و g گفته می‌شود. مفهوم نقطهٔ میانی در فضای متریک‌وارهٔ (G,d) به این صورت تعریف می‌شود. برای $f, g \in G$، تعریف می‌کنیم

$$\frac{f \circ g}{2} = \{h \in G: \rho f = g \text{ که باشد داشته وجود } \rho \in R(G,h)\}.$$

بنا بر نتیجهٔ ۳,۱ از [۴]، $\frac{f \circ g}{2}$ مجموعه‌ای تهی یا تک‌نقطه‌ای است. طبق [۴، تذکر ۲,۱]، در فضای نرم‌دار N، برای هر $f, g \in N$، $\frac{f \circ g}{2} = \frac{f+g}{2}$.

فرض کنیم N_1 و N_2 فضاهایی نرم‌دار باشند. یادآوری می‌کنیم که نگاشت $T: N_1 \to N_2$ آفین[3] نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $f, g \in N_1$ و $t \in \mathbb{R}$، $T(tf + (1-t)g) = tTf + (1-t)Tg$. لم ۴,۱ از [٤] بیان می‌کند که نگاشت پیوستهٔ $T: N_1 \to N_2$ بین فضاهای نرم‌دار در شرط

$$T\left(\frac{f \circ g}{2}\right) = \frac{Tf \circ Tg}{2} \qquad (f, g \in N_1)$$

صدق می‌کند اگر و تنها اگر T آفین باشد.

حال مفهوم آفین بودن نگاشت T بین فضاهای متریک‌واره را بیان می‌کنیم. نگاشت T را از فضای متریک‌وارهٔ (G_1, d_1) به فضای متریک‌وارهٔ (G_2, d_2) آفین می‌نامند اگر برای هر $f, g \in G_1$، $T\left(\frac{f \circ g}{2}\right) = \frac{Tf \circ Tg}{2}$. فضای متریک‌وارهٔ (G,d) قویاً انعکاسی[4] نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $f, g \in G$، داشته باشیم $\frac{f \circ g}{2} \neq \emptyset$. تذکر ۳,۱ از [۴] بیان می‌کند که اگر G قویاً انعکاسی باشد، آنگاه G انعکاسی است.

فرض کنیم (G,d) یک فضای متریک‌واره باشد. در این صورت، (G,d) یک گروه متریک‌واره[5] نامیده می‌شود هرگاه G ساختاری گروهی داشته باشد به‌طوری که اولاً به‌ازای هر $f, g, h \in G$، $d(hf^{-1}h, hg^{-1}h) = d(f,g)$، و ثانیاً برای هر $h \in G$، ثابت $L(h) > 1$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که به‌ازای هر $f \in G$، داشته باشیم $d(hf^{-1}h, f) \geq L(h)d(f,h)$. بنا بر [۴، تذکر ۴,۱]، هر گروه متریک‌وارهٔ (G,d) انعکاسی است.

فرض کنیم (G,d) یک گروه متریک‌واره باشد. در این صورت، به‌ازای هر $f, g \in G$، قرار می‌دهیم

$$N(f,g) = \{h \in G: \rho_h(f) = g\},$$

که در آن ρ_h انعکاسی از G در h است و به صورت $\rho_h(f) = hf^{-1}h$، $f \in G$، تعریف می‌شود. گروه متریک‌وارهٔ (G,d) را فوق انعکاسی[6] گویند هرگاه به‌ازای هر $f, g \in G$، داشته باشیم $N(f,g) \neq \emptyset$. با توجه به تعریف، ملاحظه

3. Reflective
4. Midpoint
5. Affine
1. Strongly reflective
2. Metricoid group
3. Super reflective

می‌کنیم $N(f,g)\subseteq \frac{f\circ g}{۲}$ و لذا هنگامی که $N(f,g)\neq \emptyset$، داریم $N(f,g)=\frac{f\circ g}{2}$. بنابراین اگر گروه متریک‌وارهٔ (G,d) فوق انعکاسی باشد، آنگاه (G,d) قویاً انعکاسی است.

برای فضای هاسدورف فشردهٔ X، فرض کنیم $C_{\mathbb{R}}(X)$ جبر باناخ تمام توابع پیوستهٔ حقیقی-مقدار بر X با نرم یکنواخت $\|\cdot\|_X$ باشد. زیرمجموعهٔ $\left\{f\in C_{\mathbb{R}}(X): f(x)>0 \text{ برای همهٔ } x\in X\text{ها}\right\}$ از $C_{\mathbb{R}}(X)$ را با $C^+(X)$ نمایش می‌دهیم. برای جبر یک‌دار A از نماد A^{-1} برای نمایش گروه اعضای وارون‌پذیر A بهره می‌گیریم. طبق [۴]، برای $f,g\in C(X)^{-1}$ قرار می‌دهیم $\Delta(f,g)=\left\|\frac{f}{g}-1\right\|_X$ و

$$\delta_{\max}(f,g)=\max\left\{\left\|\frac{f}{g}-1\right\|_X,\left\|\frac{g}{f}-1\right\|_X\right\},$$

$$\delta_+(f,g)=\left\|\frac{f}{g}-1\right\|_X+\left\|\frac{g}{f}-1\right\|_X,$$

$$\delta_\times(f,g)=\left\|\frac{f}{g}-1\right\|_X\left\|\frac{g}{f}-1\right\|_X\cdot$$

فرض کنیم (G_1,d_1) و (G_2,d_2) دو فضای متریک‌واره باشند. نگاشت $T:G_1\to G_2$ یک (d_1,d_2)-طولپایی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $f,g\in G_1$، $d_2(Tf,Tg)=d_1(f,g)$. بنا به قضیهٔ ۳,۲ از [۴]، هر (d_1,d_2)-طولپایی دوسویی بین گروه‌های متریک‌وارهٔ فوق انعکاسی (G_1,d_1) و (G_2,d_2) آفین است. طبق [۴، قضیهٔ ۴,۲]، برای $\delta\in\{\delta_+,\delta_\times\}$، دوتایی $(C^+(X),\delta)$ یک گروه متریک‌وارهٔ فوق انعکاسی است؛ به علاوه، به‌ازای هر $f,g\in C^+(X)$، داریم $\frac{f\ o\ g}{2}=\sqrt{fg}$. با برهانی مشابه برهان این قضیه، می‌توان نشان داد که برای هر زیرجبر بستهٔ A از $C_{\mathbb{R}}(X)$ که شامل توابع ثابت است و نقاط X را جدا می‌کند، و برای $\delta\in\{\delta_+,\delta_\times\}$، $(\exp A,\delta)$ یک گروه متریک وارهٔ فوق انعکاسی است و به‌ازای هر $f,g\in A$، داریم $\frac{f\ o\ g}{2}=\sqrt{fg}$.

برای $i=1,2$، فرض کنیم X_i یک فضای هاسدورف فشرده و G_i زیرگروهی از $C(X_i)^{-1}$ باشد و داشته باشیم $\delta\in\{\Delta,\delta_{\max},\delta_+,\delta_\times\}$. Δ-طولپایی‌های پوشا بین گروه‌های اعضای وارون‌پذیر جبرهای یکنواخت و بین مؤلفه‌های همبندی نمایی آنها در [۶] توصیف شده اند. همین مسئله برای جبرهای باناخ جابه‌جایی نیم‌ساده (با شعاع طیفی به جای نرم یکنواخت) و برای جبر توابع لیپ‌شیتز (به جای جبر یکنواخت) به ترتیب در [۶] و [۵] مطالعه شده است. از طرف دیگر، هاتوری و دیگران در [۴] فرم همهٔ Δ-طولپایی‌های پوشا را بین گروه‌های توابع پیوستهٔ اکیداً مثبت تعیین کرده‌اند. آنها همچنین $\delta_{\max}$-طولپایی‌ها، δ_+-طولپایی‌ها و $\delta_\times$-طولپایی‌ها را بین چنین گروه‌هایی مطالعه نموده‌اند.

اخیراً $\delta_{\max}$-طولپایی‌های پوشا بین مؤلفه‌های همبندی نمایی جبرهای یکنواخت در [۷] توصیف شده‌اند. نشان داده شده است که چنین طولپایی‌ای به صورت یک عملگر ترکیبی وزن‌دار روی زیرمجموعه‌ای باز و بسته از مرز شوکه و مزدوج یک عملگر ترکیبی وزن‌دار روی سایر نقاط مرز شوکه است.

در این مقاله، فرض می‌کنیم که $\delta\in\{\Delta,\delta_{\max},\delta_+,\delta_\times\}$ و δ-طولپایی‌های پوشای $T:\exp A_1\to\exp A_2$ را بررسی می‌کنیم، که در آن برای $i=1,2$، X_i یک فضای هاسدورف فشرده و A_i زیرجبر بسته‌ای از $C_{\mathbb{R}}(X_i)$ است که

نقاط X_i را جدا می‌کند و توابع ثابت را در بر می‌گیرد. با معرفی توابع دو متغیرهٔ مثبتی مشابه زیرفاصله‌ها با نمادهای $\Delta, \delta_{\max}, \delta_+, \delta_\times$ که مرتبط با اسکالری مانند $\alpha > 0$ (به جای 1) و عددهای صحیح ناصفر m و n هستند، نگاشت های پوشایی که چنین توابع دو متغیرهٔ مثبتی را حفظ می‌کنند، بررسی می‌شوند.

برای زیرمجموعهٔ A از $C_{\mathbb{R}}(X)$، قرار می‌دهیم $\exp A = \{e^f : f \in A\}$. مرز شوکهٔ زیرفضای A از $C_{\mathbb{R}}(X)$ که با نماد $\mathrm{Ch}(A)$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ $x \in X$هایی است که تابعک مقداری $e_x : A \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $e_x(f) = f(x)$ نقطهٔ اکستریم گوی یکه A^* می‌باشد.

تعریف گروه تک‌پارامتری[1] را طبق [۸، تعریف ۵،۴،۶] بیان می‌کنیم. برای جبر یک‌دار $\mathcal{A}$ یک گروه تک‌پارامتری در $\mathcal{A}$ یک هم‌ریختی گروهی مانند ω از گروه جمعی $\mathbb{R}$ به گروه ضربی $\mathcal{A}^{-1}$ است. اگر $\mathcal{A}$ جبر نرم‌داری باشد، اصطلاح‌های گروه تک‌پارامتری پیوسته و گروه تک‌پارامتری کران‌دار معنی روشنی دارند. برای گروه تک‌پارامتری ω در جبر نرم‌دار $\mathcal{A}$، اگر حد $\lim_{t\to 0}(\omega(t) - 1)/t$ موجود باشد، آنگاه آن حد را مولد ω می‌نامند.

نتایج اصلی

لم ۱. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده و $\{g_n\}$ دنباله‌ای در $C^+(X)$ باشد و $g \in C^+(X)$ به طوری که $lim\ \delta_\times(g_n, g) = 0$. در این صورت، $lim \left\|\frac{g_n}{g} - 1\right\|_X = 0$ و $lim \left\|\frac{g}{g_n} - 1\right\|_X = 0$.

برهان. در ابتدا، فرض کنیم که دنبالهٔ $\left\{\frac{g_n}{g} - 1\right\}$ به طور یکنواخت به 0 همگرا نباشد. پس با گذر از زیردنباله، یک $0 < \epsilon < 1$ وجود دارد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\left\|\frac{g_n}{g} - 1\right\|_X > \epsilon$. برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in X$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\left\|\frac{g_n}{g} - 1\right\|_X = \left|\frac{g_n(x_n)}{g(x_n)} - 1\right|$. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $\left|\frac{g(x_n)}{g_n(x_n)} - 1\right| \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. بنابراین به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\left\|\frac{g_n}{g} - 1\right\|_X \left\|\frac{g}{g_n} - 1\right\|_X > \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon}$$

که یک تناقض است.

به طور مشابه، می‌توانیم نشان دهیم $lim \left\|\frac{g}{g_n} - 1\right\|_X = 0$.

قضیهٔ ۲. برای $i = 1,2$، فرض کنیم X_i یک فضای هاسدورف فشرده و A_i زیرجبری به طور یکنواخت بسته از $C_{\mathbb{R}}(X_i)$ شامل توابع ثابت باشد که نقاط X_i را جدا می‌کند. فرض کنیم $\delta \in \{\delta_{\max}, \delta_+, \delta_\times\}$ و $T: \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$ یک δ-طولپایی پوشا باشد. در این صورت، تابع پیوستهٔ $h: \mathrm{Ch}(A_2) \to \{-1,1\}$ و همسان‌ریختی $\varphi: \mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ موجودند به گونه‌ای که

$$Tf(y) = T1(y) f(\varphi(y))^{h(y)} \qquad (f \in \exp A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)).$$

1. One-parameter group

برای اثبات قضیه، به چند لم نیاز داریم. با فرض برقراری فرض‌های این قضیه، قرار می‌دهیم $\tilde{T}=\frac{T}{T1}$. در این صورت، $\tilde{T}\colon \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$ یک δ-طولپایی پوشا است که $\tilde{T}1=1$. ملاحظه می‌کنیم که $\delta(f,g)=0$ اگر و تنها اگر $f=g$. بنابراین $\tilde{T}$ یک‌به‌یک است.

لم ۳. $\tilde{T}$ ضربی است.

برهان. بنا بر قضیهٔ ۳,۴ از [۳]، $\tilde{T}$ ضربی است هرگاه $\delta=\delta_{\max}$.

اینک فرض کنیم $\delta\in\{\delta_+,\delta_\times\}$. از آنجایی که $(\exp A_i\,,\delta)$ یک گروه متریک‌وارهٔ فوق انعکاسی است که به‌ازای هر دو عضو f و g از $\exp A_i$ داریم $\sqrt{fg}=\frac{f\circ g}{2}$، از قضیهٔ ۳,۲ از [۴] نتیجه می‌شود که $\tilde{T}$ نقاط میانی را حفظ می‌کند. لذا به‌ازای هر $f,g\in\exp A_1$،

$$\tilde{T}\left(\sqrt{fg}\right)=\tilde{T}\left(\frac{f\circ g}{2}\right)=\frac{\tilde{T}f\circ\tilde{T}g}{2}=\sqrt{\tilde{T}f\,\tilde{T}g}=\sqrt{\tilde{T}f}\,\sqrt{\tilde{T}g}.$$

به‌ویژه برای هر $f\in\exp A_1$، خواهیم داشت

$$\tilde{T}f=\tilde{T}\left(\sqrt{f^{2}\cdot 1}\right)=\sqrt{\tilde{T}(f^2)}\,\sqrt{\tilde{T}1}=\sqrt{\tilde{T}(f^2)},$$

یعنی $\tilde{T}f^2=\left(\tilde{T}f\right)^2$. در نتیجه، برابری‌های

$$\tilde{T}(fg)=\tilde{T}\left(\sqrt{f^2g^2}\right)=\sqrt{\tilde{T}(f^2)}\,\sqrt{\tilde{T}(g^2)}=\tilde{T}f\,\tilde{T}g$$

برای هر $f,g\in\exp A_1$ برقرار می‌باشند. پس $\tilde{T}$ در این حالت هم ضربی است.

لم ۴. $\tilde{T}$ نسبت به توپولوژی حاصل از نرم‌های یکنواخت یک همسان‌ریختی است.

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\exp A_1$ باشد که در نرم یکنواخت به $f\in\exp A_1$ همگرا است. پس $lim\,\delta(f_n,f)=0$. ابتدا فرض کنیم $\delta\in\{\delta_{\max},\delta_+\}$. برهان این حالت دقیقاً مانند برهانی است که در گزارهٔ ۲ از [۷] آمده است. در واقع، داریم

$$\begin{aligned}lim\left\|\tilde{T}f_n-\tilde{T}f\right\|_{X_2}&=lim\left\|\left(\frac{\tilde{T}f_n}{\tilde{T}f}-1\right)\tilde{T}f\right\|_{X_2}\le lim\left\|\frac{\tilde{T}f_n}{\tilde{T}f}-1\right\|_{X_2}\left\|\tilde{T}f\right\|_{X_2}\\&\le lim\,\delta\left(\tilde{T}f_n,\tilde{T}f\right)\left\|\tilde{T}f\right\|_{X_2}=lim\,\delta(f_n,f)\left\|\tilde{T}f\right\|_{X_2}=0.\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\delta=\delta_\times$. چون

$$lim\,\delta\left(\tilde{T}f_n,\tilde{T}f\right)=lim\,\delta(f_n,f)=lim\left\|\frac{f_n}{f}-1\right\|_{X_1}\left\|\frac{f}{f_n}-1\right\|_{X_1}=0,$$

نتیجه می‌شود که $\left\|\frac{\tilde{T}f}{\tilde{T}f_n}-1\right\|_{X_2}=0$ $\left\|\frac{\tilde{T}f_n}{\tilde{T}f}-1\right\|_{X_2}$ lim. لذا بنا بر لم ۱، داریم $lim\left\|\frac{\tilde{T}f_n}{\tilde{T}f}-1\right\|_{X_2}=0$.
بنابراین

$$lim\left\|\tilde{T}f_n-\tilde{T}f\right\|_{X_2}\le lim\left\|\frac{\tilde{T}f_n}{\tilde{T}f}-1\right\|_{X_2}\left\|\tilde{T}f\right\|_{X_2}=0.$$

در نتیجه، در همهٔ حالت‌ها، $\tilde{T}$ نسبت به توپولوژی حاصل از نرم‌های یکنواخت پیوسته است. از آنجایی که $\tilde{T}^{-1}$ ویژگی‌های یکسانی با $\tilde{T}$ دارد، این نگاشت نیز پیوسته می‌باشد.

با بهره‌گیری از لم‌های بالا، $\tilde{T}$ یک همسان‌ریختی و یک‌ریختی گروهی است. اکنون فرض کنیم $u\in A_1$. برای هر $t_1,t_2\in\mathbb{R}$، داریم $e^{(t_1+t_2)u}=e^{t_1u+t_2u}=e^{t_1u}.e^{t_2u}$؛ پس $t\longmapsto e^{tu}$ یک هم‌ریختی گروهی از گروه جمعی $\mathbb{R}$ به گروه ضربی $\exp A_1\subseteq {A_1}^{-1}$ است، یعنی این نگاشت یک گروه تک‌پارامتری در A_1 است. از طرفی، $t\longmapsto e^{tu}$ یک تابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به A_1 با نرم یکنواخت است، زیرا ترکیب ضرب اسکالر و تابع نمایی روی A_1 است، که هر دو توابع پیوسته‌ای هستند. بنابراین نگاشت $t\longmapsto e^{tu}$ یک گروه تک‌پارامتری پیوستهٔ نرمی در A_1 است. حال برای هر عضو u در A_1، نگاشت $\omega:\mathbb{R}\longrightarrow\exp A_2$ را به صورت $t\longmapsto\tilde{T}(e^{tu})$ تعریف می‌کنیم. می‌دانیم که ترکیب دو هم‌ریختی یک هم‌ریختی و ترکیب دو تابع پیوسته یک تابع پیوسته است. از آنجایی که نگاشت $t\longmapsto e^{tu}$ یک گروه تک‌پارامتری پیوستهٔ نرمی در A_1 (یعنی یک هم‌ریختی گروهی و یک تابع پیوسته از گروه جمعی $\mathbb{R}$ به گروه ضربی $\exp A_1\subseteq {A_1}^{-1}$ با نرم یکنواخت) و $\tilde{T}$ یک یک‌ریختی گروهی و همسان‌ریختی (نسبت به نرم یکنواخت) از $\exp A_1$ به‌روی $\exp A_2$ است، ω (که ترکیب این دو نگاشت است) یک هم‌ریختی گروهی و یک تابع پیوسته از گروه جمعی $\mathbb{R}$ به گروه ضربی $\exp A_2\subseteq {A_2}^{-1}$ با نرم یکنواخت است، یعنی یک گروه تک‌پارامتری پیوستهٔ نرمی در A_2 می‌باشد. پس بنا بر گزارهٔ ۶،۴،۶ از [۸]، ω دارای مولدی مانند $v\in A_2$ خواهد بود، یعنی به‌ازای هر $t\in\mathbb{R}$، $e^{tv}=\tilde{T}(e^{tu})$.

اکنون همان‌گونه که در برهان قضیهٔ ۱ از [۷] آمده است، نگاشت $S:A_1\longrightarrow A_2$ را طوری تعریف می‌کنیم که برای هر $u\in A_1$، Su عضو یکتای $v\in A_2$ باشد که در تساوی بالا صدق می‌کند.

لم ۵. S یک طولپایی است.

برهان. از آنجایی که $\tilde{T}^{-1}$ ویژگی‌های یکسانی با $\tilde{T}$ دارد، پس یک نگاشت $S':A_2\longrightarrow A_1$ وجود دارد به طوری که به‌ازای هر $t\in\mathbb{R}$ و $v\in A_2$، $\tilde{T}^{-1}(e^{tv})=e^{tS'v}$. لذا برای هر $v\in A_2$، $S(S'v)=v$، یعنی S پوشا می‌باشد.

برای اینکه نشان دهیم S یک طولپایی است، فرض می‌کنیم $u_1,u_2\in A_1$. در حالتی که $\delta=\delta_\times$، داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2}\delta_\times(e^{tu_1},e^{tu_2})&=\frac{1}{t^2}\left\|e^{t(u_1-u_2)}-1\right\|_{X_1}\left\|e^{t(u_2-u_1)}-1\right\|_{X_1}\\&=\left\|\frac{e^{t(u_1-u_2)}-1}{t}\right\|_{X_1}\left\|\frac{e^{t(u_2-u_1)}-1}{t}\right\|_{X_1}\xrightarrow{t\to0}\|u_1-u_2\|_{X_1}\|u_2-u_1\|_{X_1}\\&=\|u_1-u_2\|_{X_1}^2.\end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2}\delta_\times(e^{tu_1},e^{tu_2}) &= \frac{1}{t^2}\delta_\times(\tilde{T}e^{tu_1},\tilde{T}e^{tu_2}) = \frac{1}{t^2}\delta_\times(e^{tSu_1},e^{tSu_2})\\ &= \frac{1}{t^2}\left\|e^{t(Su_1-Su_2)}-1\right\|_{X_2}\left\|e^{t(Su_2-Su_1)}-1\right\|_{X_2}\\ &= \left\|\frac{e^{t(Su_1-Su_2)}-1}{t}\right\|_{X_2}\left\|\frac{e^{t(Su_2-Su_1)}-1}{t}\right\|_{X_2}\end{aligned}$$

که زمانی که $t \to 0$، عبارت آخر به $\|Su_1 - Su_2\|_{X_2}\|Su_2 - Su_1\|_{X_2} = \|Su_1 - Su_2\|_{X_2}^2$ میل می‌کند. بنابراین $\|Su_1 - Su_2\|_{X_2}^2 = \|u_1 - u_2\|_{X_1}^2$ و در نتیجه، $\|Su_1 - Su_2\|_{X_2} = \|u_1 - u_2\|_{X_1}$.

سایر حالت‌ها، یعنی وقتی که $\delta \in \{\delta_{\max}, \delta_+\}$، به روش مشابه ثابت می‌شوند.

برهان قضیهٔ ۲. فرض کنیم $S: A_1 \longrightarrow A_2$ طولپایی‌ای باشد که در بالا معرفی شده است. از آنجایی که S پوشا است و $S(0) = 0$، از قضیهٔ مازور–اولام نتیجه می‌شود که S خطی–حقیقی است. پس بنا بر قضیهٔ نووینگر[1] (قضیهٔ ۱۰،۳،۲ از [۱])، تابع پیوستهٔ $h:\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \{-1,1\}$ و همسان‌ریختی $\varphi:\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ موجود هستند به گونه‌ای که

$$Su(y) = h(y)u(\varphi(y)) \qquad (u \in A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)).$$

اکنون فرض کنیم $f \in \exp A_1$ و $y \in \mathrm{Ch}(A_2)$. در این صورت، می‌توان $u \in A_1$ را چنان یافت که $f = e^u$. چون $\tilde{T}(e^u) = e^{Su}$، خواهیم داشت

$$\tilde{T}f(y) = \tilde{T}(e^u)(y) = e^{Su(y)} = e^{h(y)u(\varphi(y))} = f(\varphi(y))^{h(y)},$$

و در نتیجه، $Tf(y) = T1(y)f(\varphi(y))^{h(y)}$.

نتیجهٔ ۶. برای $i = 1,2$، فرض کنیم X_i یک فضای هاسدورف فشرده و A_i زیرجبری به طور یکنواخت بسته از $C_{\mathbb{R}}(X_i)$ شامل توابع ثابت باشد که نقاط X_i را جدا می‌کند. فرض کنیم $T: \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$ نگاشتی پوشا باشد. در این صورت، T یک $\delta_{\max}$-طولپایی است اگر و تنها اگر تابع پیوستهٔ $h:\mathrm{Ch}(A_2) \to \{-1,1\}$ و همسان‌ریختی $\varphi:\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ موجود باشند به گونه‌ای که

$$Tf(y) = T1(y)f(\varphi(y))^{h(y)} \qquad (f \in \exp A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)).$$

برهان. قسمت تنها اگر از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود.

حال فرض کنیم $h:\mathrm{Ch}(A_2) \to \{-1,1\}$ تابعی پیوسته و $\varphi:\mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ یک همسان‌ریختی باشد به طوری که

$$Tf(y) = T1(y)f(\varphi(y))^{h(y)} \qquad (f \in \exp A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)).$$

1. Novinger's theorem

نشان می‌دهیم T یک $\delta_{\max}$-طولپایی است. فرض کنیم $f, g \in \exp A_1$. از آنجایی که $\mathrm{Ch}(A_1)$ یک مرز برای A_1 است و $\frac{f}{g}-1, \frac{g}{f}-1 \in A_1$، می‌توان $x \in \mathrm{Ch}(A_1)$ را طوری اختیار کرد که

$$\max\left\{\left\|\frac{f}{g}-1\right\|_{X_1}, \left\|\frac{g}{f}-1\right\|_{X_1}\right\} = \max\left\{\left|\frac{f(x)}{g(x)}-1\right|, \left|\frac{g(x)}{f(x)}-1\right|\right\}.$$

قرار می‌دهیم $y = \varphi^{-1}(x)$. با توجه به اینکه $h(y) \in \{-1,1\}$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\delta_{\max}(f,g) &= \max\left\{\left\|\frac{f}{g}-1\right\|_{X_1}, \left\|\frac{g}{f}-1\right\|_{X_1}\right\} = \max\left\{\left|\frac{f(x)}{g(x)}-1\right|, \left|\frac{g(x)}{f(x)}-1\right|\right\}\\ &= \max\left\{\left|\frac{f(\varphi(y))}{g(\varphi(y))}-1\right|, \left|\frac{g(\varphi(y))}{f(\varphi(y))}-1\right|\right\}\\ &= \max\left\{\left|\frac{T1(y)f(\varphi(y))^{h(y)}}{T1(y)g(\varphi(y))^{h(y)}}-1\right|, \left|\frac{T1(y)g(\varphi(y))^{h(y)}}{T1(y)f(\varphi(y))^{h(y)}}-1\right|\right\}\\ &= \max\left\{\left|\frac{Tf(y)}{Tg(y)}-1\right|, \left|\frac{Tg(y)}{Tf(y)}-1\right|\right\}\\ &\leq \max\left\{\left\|\frac{Tf}{Tg}-1\right\|_{X_2}, \left\|\frac{Tg}{Tf}-1\right\|_{X_2}\right\} = \delta_{\max}(Tf,Tg).\end{aligned}$$

به کمک بحثی مشابه، می‌توانیم نابرابری طرف دیگر را نیز نتیجه بگیریم. لذا T یک $\delta_{\max}$-طولپایی است.

قضیهٔ ۷. برای $i = 1,2$، فرض کنیم X_i یک فضای هاسدورف فشرده و A_i زیرجبری به طور یکنواخت بسته از $C_{\mathbb{R}}(X_i)$ شامل توابع ثابت باشد که نقاط X_i را جدا می‌کند. اگر $T\colon \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$ یک Δ-طولپایی پوشا باشد، آنگاه همسان‌ریختی $\varphi\colon \mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ یافت می‌شود به گونه‌ای که

$$Tf(y) = T1(y)f(\varphi(y)) \qquad (f \in \exp A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)).$$

برهان. برهان این قضیه مشابه برهان نتیجهٔ ۲،۳ از [۴] است.

به روشنی T یک $\delta_{\max}$-طولپایی است. لذا بنا بر قضیهٔ ۲، تابع پیوستهٔ $h\colon \mathrm{Ch}(A_2) \to \{-1,1\}$ و همسان‌ریختی $\varphi\colon \mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ وجود دارند به طوری که

$$Tf(y) = T1(y)f(\varphi(y))^{h(y)} \qquad (f \in \exp A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)).$$

ملاحظه می‌کنیم به‌ازای هر $y \in \mathrm{Ch}(A_2)$، $T2(y) = T1(y)2^{h(y)}$ و در نتیجه، $\frac{T1(y)}{T2(y)} = \frac{1}{2^{h(y)}}$. پس به‌ازای هر $y \in \mathrm{Ch}(A_2)$، خواهیم داشت

$$\left|\frac{1}{2^{h(y)}}-1\right| = \left|\frac{T1(y)}{T2(y)}-1\right| \leq \left\|\frac{T1}{T2}-1\right\|_{X_2} = \Delta(T1,T2) = \Delta(1,2) = \frac{1}{2}.$$

چون $h(y) \in \{-1,1\}$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $y \in \mathrm{Ch}(A_2)$، $h(y) = 1$.

اکنون با گسترش نمادهای δ_+، $\delta_\times$، $\delta_{\max}$ و Δ، نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم. فرض کنیم m و n اعداد صحیح ناصفری باشند و $\alpha > 0$. برای فضای هاسدورف فشردهٔ X و هر $f, g \in C^+(X)$ قرار می‌دهیم

$$
\begin{gathered}
{}^m_n\delta^\alpha_{\max}(f,g) = \max\{\alpha^{-1}\|f^m g^n - \alpha\|_X, \alpha\|g^{-n} f^{-m} - \alpha^{-1}\|_X\},\\
{}^m_n\delta^\alpha_+(f,g) = \alpha^{-1}\|f^m g^n - \alpha\|_X + \alpha\|g^{-n} f^{-m} - \alpha^{-1}\|_X,\\
{}^m_n\delta^\alpha_\times(f,g) = \|f^m g^n - \alpha\|_X \|g^{-n} f^{-m} - \alpha^{-1}\|_X,\\
{}^m_n\Delta^\alpha(f,g) = \|f^m g^n - \alpha\|_X.
\end{gathered}
$$

قضیهٔ ۸. برای $i = 1,2$، فرض کنیم X_i یک فضای هاسدورف فشرده و A_i زیرجبری به طور یکنواخت بسته از $C_{\mathbb{R}}(X_i)$ شامل توابع ثابت باشد که نقاط X_i را جدا می‌کند. فرض کنیم m و n اعداد صحیح ناصفری باشند و $\alpha > 0$. فرض کنیم ${}^m_n\delta^\alpha \in \{{}^m_n\delta^\alpha_{\max}, {}^m_n\delta^\alpha_+, {}^m_n\delta^\alpha_\times\}$ و $T\colon \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$ نگاشت پوشایی باشد که

$$
{}^m_n\delta^\alpha(Tf, Tg) = {}^m_n\delta^\alpha(f,g), \qquad (f, g \in \exp A_1).
$$

در این صورت، تابع پیوستهٔ $h\colon \mathrm{Ch}(A_2) \to \{-1,1\}$ و همسان‌ریختی $\varphi\colon \mathrm{Ch}(A_2) \longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ موجود می‌باشند به گونه‌ای که

$$
Tf(y) = T1(y) f(\varphi(y))^{h(y)} \qquad \big(f \in \exp A_1, y \in \mathrm{Ch}(A_2)\big).
$$

برهان. فرض کنیم $f, g \in \exp A_1$. در این صورت، بنا بر فرض، $g' \coloneqq g^{-m/n} \in \exp A_1$. پس $g^m (g')^n = 1$. قرار می‌دهیم $\beta = \alpha^{1/n}$. چون $\exp A_1$ زیرگروهی ضربی از $C^+(X_1)$ شامل ثابت‌های مثبت است، $\beta g' \in \exp A_1$.

در حالتی که ${}^m_n\delta^\alpha = {}^m_n\delta^\alpha_\times$، داریم

$$
\begin{aligned}
&\|T(g)^m T(\beta g')^n - \alpha\|_{X_2} \|T(\beta g')^{-n} T(g)^{-m} - \alpha^{-1}\|_{X_2}\\
&\qquad = \|g^m (\beta g')^n - \alpha\|_{X_1} \|(\beta g')^{-n} g^{-m} - \alpha^{-1}\|_{X_1}\\
&\qquad = \|g^m \alpha (g')^n - \alpha\|_{X_1} \|\alpha^{-1} (g')^{-n} g^{-m} - \alpha^{-1}\|_{X_1}\\
&\qquad = \alpha\|g^m (g')^n - 1\|_{X_1} \alpha^{-1} \|((g')^n g^m)^{-1} - 1\|_{X_1} = 0.
\end{aligned}
$$

پس یا $\|T(g)^m T(\beta g')^n - \alpha\|_{X_2} = 0$ یا $\|T(\beta g')^{-n} T(g)^{-m} - \alpha^{-1}\|_{X_2} = 0$ که ایجاب می‌کند $T(g)^m = \left(\beta^{-1} T(\beta g')\right)^{-n}$. لذا

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{T(f)^m}{T(g)^m} - 1\right\|_{X_2} \left\|\frac{T(g)^m}{T(f)^m} - 1\right\|_{X_2}\\
&\qquad = \left\|T(f)^m \left(\beta^{-1} T(\beta g')\right)^n - 1\right\|_{X_2} \left\|\left(\beta^{-1} T(\beta g')\right)^{-n} T(f)^{-m} - 1\right\|_{X_2}\\
&\qquad = \alpha^{-1} \|T(f)^m T(\beta g')^n - \alpha\|_{X_2} \alpha \|T(\beta g')^{-n} T(f)^{-m} - \alpha^{-1}\|_{X_2}\\
&\qquad = \|f^m (\beta g')^n - \alpha\|_{X_1} \|(\beta g')^{-n} f^{-m} - \alpha^{-1}\|_{X_1}\\
&\qquad = \|f^m \alpha g^{-m} - \alpha\|_{X_1} \|\alpha^{-1} g^m f^{-m} - \alpha^{-1}\|_{X_1}\\
&\qquad = \alpha\|f^m g^{-m} - 1\|_{X_1} \alpha^{-1} \|g^m f^{-m} - 1\|_{X_1} = \left\|\frac{f^m}{g^m} - 1\right\|_{X_1} \left\|\frac{g^m}{f^m} - 1\right\|_{X_1}.
\end{aligned}
$$

بنابراین $\left\|\frac{g^m}{f^m}-1\right\|_{X_1}\left\|\frac{f^m}{g^m}-1\right\|_{X_1}=\left\|\frac{T(g)^m}{T(f)^m}-1\right\|_{X_2}\left\|\frac{T(f)^m}{T(g)^m}-1\right\|_{X_2}$. به سادگی می‌توان این برابری را برای حالت‌های دیگر ${}^m_n\delta^\alpha$ به دست آورد.

اکنون نگاشت $T'\colon \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$ را به صورت $T'(f)=T\left(f^{1/m}\right)^m$ تعریف می‌کنیم. طبق فرض، T' خوش‌تعریف است. به‌ازای هر $g\in \exp A_2$، بنا بر پوشایی T، یک $f\in \exp A_1$ وجود دارد به طوری که $T(f)=g^{1/m}$. در این صورت، $T'(f^m)=T\left((f^m)^{1/m}\right)^m=T(f)^m=g$ که نشان می‌دهد T' پوشا است. حال بنا بر بحث بالا، برای $\delta\in\{\delta_{\max},\delta_+,\delta_\times\}$، نگاشت $T'\colon \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$ یک δ-طولپایی پوشا است. لذا بنا بر قضیهٔ ۲، تابع پیوستهٔ $h{:}\mathrm{Ch}(A_2)\to\{-1{,}1\}$ و همسان‌ریختی $\varphi{:}\mathrm{Ch}(A_2)\longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ موجودند به گونه‌ای که

$$T'f(y)=T'1(y)f\big(\varphi(y)\big)^{h(y)}\qquad \big(f\in \exp A_1, y\in \mathrm{Ch}(A_2)\big).$$

تعریف T' ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $f\in \exp A_1$ و $y\in \mathrm{Ch}(A_2)$،

$$(Tf)^m(y)=T'(f^m)(y)=T1(y)^m f\big(\varphi(y)\big)^{mh(y)},$$

و در نتیجه، $Tf(y)=T1(y)f\big(\varphi(y)\big)^{h(y)}$.

قضیهٔ ۹. برای $i=1{,}2$، فرض کنیم X_i یک فضای هاسدورف فشرده و A_i زیرجبری به طور یکنواخت بسته از $C_{\mathbb{R}}(X_i)$ شامل توابع ثابت باشد که نقاط X_i را جدا می‌کند. فرض کنیم m و n اعداد صحیح ناصفری باشند و $\alpha>0$. اگر $T\colon \exp A_1 \longrightarrow \exp A_2$ نگاشت پوشایی باشد که در شرط

$${}^m_n\Delta^\alpha(Tf,Tg)={}^m_n\Delta^\alpha(f,g),\qquad (f,g\in \exp A_1),$$

صدق کند، آنگاه یک همسان‌ریختی $\varphi{:}\mathrm{Ch}(A_2)\longrightarrow \mathrm{Ch}(A_1)$ وجود دارد به طوری که

$$Tf(y)=T1(y)f\big(\varphi(y)\big)\qquad \big(f\in \exp A_1, y\in \mathrm{Ch}(A_2)\big).$$

برهان. با بهره‌گیری از قضیهٔ [۸]، برهان این قضیه مشابه برهان قضیهٔ [۷] است.

References

1. R. J. Fleming and J. E. Jamison, Isometries on Banach Spaces: function spaces, Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 2002.

2. R. J. Fleming and J. E. Jamison, Isometries on Banach Spaces: vector-valued function spaces and operator spaces, Volume Two, CRC Press, 2007.

3. O. Hatori, G. Hirasawa, T. Miura and L. Molnar, Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple products on groups, Tokyo J. Math., **35** (2012), 385-410.

4. O. Hatori, K. Kobayashi, T. Miura and S. E. Takahasi, Reflections and a generalization of the Mazur-Ulam theorem, Rocky Mountain J. Math., **42** (2012), 117-150.

5. O. Hatori, A. Jimenez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, Maps which preserve norms of non-symmetrical quotients between groups of exponentials of Lipschitz functions, J. Math. Anal. Appl., **415** (2014), 825-845.

6. T. Miura, D. Honma and R. Shindo, Divisibly norm-preserving maps between commutative Banach algebras, Rocky Mountain J. Math., **41** (2011), 1675-1699.

7. T. Nogawa, Maps which preserve a certain norm condition between the exponential groups of uniform algebras, Tokyo J. Math., **39** (2016), 39-44.

8. T. W. Palmer, Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras, Vol. I. Algebras and Banach Algebras, Encyclopedia of Math. Appl. 49, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.