Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

(2n)-Weak Module Amenability of Triangular Banach Algebras on Semigroup Algebras

E. Nasrabadi[1]
Department of Mathematics, Faculty of Mathematics Science and Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.
E-mail: nasrabadi@birjand.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 12 June 2021
Received in revised form: 23 May 2022
Accepted: 28 May 2022
Published online: 6 February 2024

Keywords:
Semigroup algebra, Triangular Banach algebra, Weak module amenability, First module cohomology group.

ABSTRACT

Introduction

The concept of weak module amenability for Banach algebras which are Banach module over another Banach algebra with compatible actions, was introduced by Amini and Bagha in [2]. As an example, they showed the semigroup algebra $\ell^1(\mathrm{S})$ of a commutative inverse semigroup S is always weakly amenable as a module over the semigroup algebra $\ell^1(\mathrm{E})$ of its subsemigroup E of idempotents. Also, the author of the current paper and Pourabbas in [7] extended this result and showed that $\ell^1(\mathrm{S})$ is $(2n+1)$-weakly $\ell^1(\mathrm{E})$-module amenable. Let A and B be Banach algebras, and M be a Banach A, B-module, that means, M is a left Banach A-module and right Banach B-module. Then $\mathcal{T}=\left\{\begin{bmatrix} a & m \\ & b \end{bmatrix} : a \in A, b \in B, m \in M\right\}$, equipped with the usual operations associated with 2 × 2 matrices and the Banach space norm $\left\|\begin{bmatrix} a & m \\ & b \end{bmatrix}\right\| = \|a\| + \|m\| = \|b\|$, becomes a Banach algebra which is called a triangular Banach algebra. This class of Banach algebras was studied by Forrest and Marcoux in [4]. They have studied the weak amenability of triangular Banach algebras in [5]. They consider the cases where A and B have units and M is unital A, B-module, and showed that the weak amenability of $\mathcal{T}$ is equivalent to the weak amenability of the corner Banach algebras A and B, where $\mathcal{T}$ is unital. The author of the current paper and Pourabbas in [9] (see also [6] and [3]) extended this result and showed that the weak module amenability of $\mathcal{T}$ is equivalent to the weak module amenability of the corner Banach algebras A and B, where $\mathcal{T}$ is unital.

Material and Methods

Let A and $\mathfrak{A}$ be Banach algebras such that A is a Banach $\mathfrak{A}$-module with compatible actions and let X be a Banach A-module and a Banach $\mathfrak{A}$-module with compatible actions. Then we say that X is a Banach $\mathfrak{A}$-A-module. An $\mathfrak{A}$-module map D: $A \longrightarrow X$ is called an $\mathfrak{A}$-module derivation if

$$D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b \qquad (a, b \in A).$$

Although D is not necessarily linear, but still its boundedness implies its norm continuity. When X is a commutative Banach $\mathfrak{A}$-A-module, any $x \in X$ defines an $\mathfrak{A}$-module derivation $ad_x : A \longrightarrow X$ by $ad_x(a) = a \cdot x - x \cdot a \quad (a \in A)$ which is called inner $\mathfrak{A}$-module derivation. We use the notation $\mathcal{Z}^1_{\mathfrak{A}}(A,X)$ for the set of all $\mathfrak{A}$-module derivations from A to X and $\mathcal{B}^1_{\mathfrak{A}}(A,X)$ for those which are inner. The first $\mathfrak{A}$-module cohomology group with coefficients in X is denoted by $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{A}}(A,X)$ which is the quotient group $\mathcal{Z}^1_{\mathfrak{A}}(A,X)/\mathcal{B}^1_{\mathfrak{A}}(A,X)$. The Banach algebra A is called (n)-weak $\mathfrak{A}$-module amenable if $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{A}}\big(A, A^{(n)}\big) = 0$

$(n \in \mathbb{N})$.

Let $\mathfrak{A}$, A and B be Banach algebras such that both A and B are Banach $\mathfrak{A}$-modules with compatible actions and let M be a Banach A, B-module, that is, M is a left Banach A-module and a right Banach B-module. Furthermore, let M be commutative Banach $\mathfrak{A}$-A-module and commutative Banach $\mathfrak{A}$-B-module with compatible actions. The space

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{bmatrix} a & m \\ & b \end{bmatrix} : a \in A, b \in B, m \in M \right\}$$

equipped with the usual 2×2 matrix addition and formal multiplication and the norm $\left\| \begin{bmatrix} a & m \\ & b \end{bmatrix} \right\| = \|a\|_A + \|b\|_B + \|m\|_M$ is a Banach algebra, which is called the triangular Banach algebra. We define $\mathfrak{T} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathfrak{A} \right\} \simeq \mathfrak{A}$. The triangular Banach algebra $\mathcal{T}$ with the usual matrix product is a commutative Banach $\mathfrak{T}$-module. Note that, $\mathcal{T}$ is not a commutative algebra.

Results and discussion

A discrete semigroup S is called an inverse semigroup if for each $s \in S$ there is a unique element $s^* \in S$ such that $ss^*s = s$ and $s^*ss^* = s^*$. The semigroup S is called commutative if $st = ts$ for each $s, t \in S$. An element $e \in S$ is called an idempotent if $e = e^* = e^2$. The set of idempotent elements of S is denoted by E. Throughout this paper, we consider a commutative (not necessary unital) inverse semigroup S with idempotent set E. In this case $\ell^1(\mathrm{S})$ is a commutative Banach $\ell^1(E)$-module with the following actions

$$\delta_s \cdot \delta_e = \delta_e \cdot \delta_s = \delta_e * \delta_s = \delta_{es} \,,$$

where δ_s and δ_e are the point mass at $s \in S$ and $e \in E$, respectively. Also, we will assume that $M = \frac{\ell^1(\mathrm{S})}{M_0}$, where M_0 is the closed linear span of $\{\delta_{es} - \delta_s : e \epsilon E,\ s \epsilon S\}$ in $\ell^1(S)$. Suppose $\mathcal{T} = \left\{ \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{m} \\ & b \end{bmatrix} : a, b \in \ell^1(\mathrm{S}), \boldsymbol{m} \in M \right\}$ and $\mathfrak{T} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \ell^1(\mathrm{E}) \right\} \simeq \ell^1(\mathrm{E})$.

In this case $\mathcal{T}^*$ is a commutative Banach $\mathfrak{T}$-$\mathcal{T}$-module. Recently in [8], it is shown that for every $n \in \mathbb{N}$, the triangular Banach algebra $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \ell^1(\mathrm{S}) & \ell^1(\mathrm{S})/M_0 \\ & \ell^1(\mathrm{S}) \end{bmatrix}$ is (2n+1)-weakly $\mathfrak{T}$-module amenable. In this paper, we show that for every $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}$ is (2n)-weakly $\mathfrak{T}$-module amenable, without any additional conditions on S and E.

Conclusion

The results of this paper and Corollary 4.1 of [8] proves that the triangular Banach algebra $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \ell^1(\mathrm{S}) & \ell^1(\mathrm{S})/M_0 \\ & \ell^1(\mathrm{S}) \end{bmatrix}$ is permanent weakly module amenable (as an $\mathfrak{T}$-module (or $\ell^1(\mathrm{E})$-module)).

How to cite: Nasrabadi, E. (2023). (2n)-Weak Module Amenability of Triangular Banach Algebras on Semigroup Algebras. *Mathematical Researches*, 9 (3), 235 – 250.

 Publisher: Kharazmi University

پژوهش‌های ریاضی

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

$(2n)$–میانگین‌پذیری مدولی ضعیف جبرهای باناخ مثلثی روی جبرهای نیم‌گروهی

ابراهیم نصرآبادی [1]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران. رایانامه: nasrabadi@birjand.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۳/۲۲
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۳/۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۷
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷

واژه‌های کلیدی:
جبر نیم‌گروهی،
جبر باناخ مثلثی،
میانگین‌پذیری مدولی ضعیف،
اولین گروه کوهومولوژی مدولی.

چکیده

فرض‌کنید S یک نیم‌گروه معکوس جابجایی (نه لزوماً یکدار) با مجموعه عناصر خودتوانِ E باشد. جبرهای نیم‌گروهی $\ell^1(S)$، $\ell^1(E)$ و جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}=\begin{bmatrix}\ell^1(S) & \ell^1(S)/M_0\\ & \ell^1(S)\end{bmatrix}$ و زیر جبر $\mathfrak{T}=\left\{\begin{bmatrix}\alpha & \\ & \alpha\end{bmatrix}:\alpha\in\ell^1(E)\right\}$ که در آن M_0 زیرفضای بسته‌ای از $\ell^1(S)$، تولید شده توسط مجموعه‌ی $\{\delta_{es}-\delta_s: e\epsilon E,\ s\epsilon S\}$ است را در نظر بگیرید. این اواخر نویسنده این مقاله همراه با رمضانپور و آسرائی در [8] نشان دادند که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $(2n+1)$-میانگین‌پذیری مدولیِ ضعیف جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}$ (بعنوان $\mathfrak{T}$- مدول) و $(2n+1)$-میانگین‌پذیری مدولیِ ضعیف $\ell^1(S)$ (بعنوان $\ell^1(E)$-مدول)، معادل هستند. ما در این مقاله این حکم را توسیع داده و ثابت می‌کنیم که حکم برای حالت زوج یعنی $(2n)$-میانگین‌پذیری مدولیِ ضعیف، آن‌هم در حالت غیر یکدار بودن این جبرها نیز صادق است.

استناد: نصرآبادی، ابراهیم؛ (۱۴۰۲). $(2n)$-میانگین‌پذیری مدولی ضعیف جبرهای باناخ مثلثی روی جبرهای نیم‌گروهی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۳)، ۲۳۵ – ۲۵۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

مفهوم میانگین‌پذیری مدولی[1] جبرهای باناخ، نخستین بار توسط امینی[2] در [۱] معرفی شد که در واقع توسیعی از میانگین‌پذیری جانسون (هاخشیلد) است. وی نشان داد که برای هر نیم‌گروه معکوس S با مجموعه عناصر خودتوان E، میانگین‌پذیری مدولی جبر نیم‌گروهی $\ell^1(S)$ (بعنوان $\ell^1(E)$-مدول)، معادل میانگین‌پذیری نیم‌گروه S است. البته وی عمل مدولی $\ell^1(E)$ روی $\ell^1(S)$ را به‌شکل

$$\delta_e \cdot \delta_s = \delta_s \quad , \quad \delta_s \cdot \delta_e = \delta_{se} \qquad (s \in S , e \in E), \qquad (۱)$$

درنظر گرفت که در آن δ_x و δ_e به‌ترتیب توابع مشخصه (جرم نقطه‌ای) عناصر $s \in S$ و $e \in E$ هستند. کمی بعدتر امینی و بقا[3] مفهوم میانگین‌پذیری مدولیِ ضعیف[4] جبرهای باناخ را در [۲] معرفی کردند و نشان دادند که برای هر نیم‌گروه معکوس جابجایی S، جبر نیم‌گروهی $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر $\ell^1(E)$-مدولیِ ضعیف است که در آن عمل مدولی را به شکل متفاوت زیر در نظر گرفتند:

$$\delta_e \cdot \delta_s = \delta_s \cdot \delta_e = \delta_{se} \qquad (s \in S , e \in E). \qquad (۲)$$

از سویی دیگر خیلی قبل‌تر، فورست[5] و مارکوس[6] در [۴]، اشتقاق‌ها را روی خانواده بسیار مهمی از جبرهای باناخ بنام جبرهای باناخ مثلثی مطالعه و سپس در [۵]، میانگین‌پذیری ضعیف این نوع جبرها را بررسی کردند. آنها ثابت کردند که یک جبر باناخ مثلثی یکدار، میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و تنها اگر جبرهای گوشه‌ای آن نیز میانگین‌پذیر ضعیف باشند. که البته بعد از معرفی حالت مدولی این مفاهیم، نویسنده این مقاله همراه با پورعباس[7] در [۹] ([۶] را نیز ببینید) و بعد از آن بداغی[8] و جباری[9] در [۳]، نتایج فورست و مارکوس را به حالت مدولی توسیع دادند که تمام نتایجشان در حالت یکدار بودن جبرهای باناخ مثلثی حاصل شده است. حال این سوال مطرح است که آیا می‌توان در حالتی خاص، بدون داشتن فرض یکداری این جبرها، همان احکام را نتیجه گرفت؟ در این مقاله ما به این سوال پاسخ می‌دهیم.

فرض‌کنید S یک نیم‌گروه معکوس جابجایی (نه لزوماً یکدار) با مجموعه عناصر خودتوان E باشد. همچنین فرض‌کنید $\ell^1(S)$ و $\ell^1(E)$ به‌ترتیب جبرهای نیم‌گروهی S و E باشند. می‌دانیم که $\ell^1(S)$ با عمل (۲) تبدیل به یک $\ell^1(E)$ - مدول باناخ دوطرفه جابجایی می‌شود. M_0 را زیرفضای بسته از $\ell^1(S)$ تولید شده توسط $\{\delta_{es} - \delta_s \colon e \epsilon E,\ s \epsilon S\}$ در نظر بگیرید. ما در این مقاله جبر مثلثی $\mathcal{T}$ را به‌صورت

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix} : a, b \in \ell^1(\mathrm{S}), [m] \in \ell^1(\mathrm{S})/M_0 \right\},$$

---

1 Module Amenability
2 Amini
3 Bagha
4 Weak Module Amenability
5 Forrest
6 Marcoux
7 Pourabbas
8 Bodaghi
9 Jabbari

در نظر می‌گیریم. اگر $\mathfrak{T} := \left\{\begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \ell^1(E)\right\}$ در این‌صورت $\mathcal{T}$ همراه با ضرب معمولی ماتریسی، نرم و عمل مدولی که در ادامه ارائه خواهیم داد، به یک جبر $\mathfrak{T}$-مدول باناخ جابجایی غیر یکدار تبدیل می‌شود. اخیراً نویسنده این مقاله همراه با همکارانش در [۸] نشان دادند که برای هر $n \in \mathbb{N}$، مفاهیم $(2n+1)$-میانگین‌پذیری $\mathfrak{T}$-مدولیِ ضعیف $\mathcal{T}$ و $(2n+1)$-میانگین‌پذیری $\ell^1(E)$-مدولیِ ضعیف $\ell^1(S)$، معادل هستند. در واقع ثابت کردند که اولین گروه کوهومولوژی $\mathfrak{T}$-مدولیِ $\mathcal{T}$ با ضرائب در $\mathcal{T}^{(2n+1)}$ با اولین گروه کوهومولوژی $\ell^1(E)$-مدولیِ $\ell^1(S)$ با ضرائب در $\ell^1(S)^{(2n+1)}$ به‌صورت:

$$\mathcal{H}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n+1)}\right) \simeq \mathcal{H}^1_{\ell^1(\mathrm{E})}\left(\ell^1(\mathrm{S}), \ell^1(\mathrm{S})^{(2n+1)}\right) \oplus \mathcal{H}^1_{\ell^1(\mathrm{E})}\left(\ell^1(\mathrm{S}), \ell^1(\mathrm{S})^{(2n+1)}\right),$$

در ارتباط هستند. این در حالی است که فرض یکدار بودن $\mathcal{T}$ برداشته شده است. ما در این مقاله این نتیجه را توسیع داده و نشان خواهیم داد که احکام برای حالت زوج نیز صادق است. در واقع با همان فرض‌ها، ثابت می‌کنیم:

$$\mathcal{H}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right) \simeq \mathcal{H}^1_{\ell^1(\mathrm{E})}\left(\ell^1(\mathrm{S}), \ell^1(\mathrm{S})^{(2n)}\right) \oplus \mathcal{H}^1_{\ell^1(\mathrm{E})}\left(\ell^1(\mathrm{S}), \ell^1(\mathrm{S})^{(2n)}\right),$$

که بدین معنی است که جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}$، $(2n)$-میانگین‌پذیر مدولیِ ضعیف (بعنوان $\mathfrak{T}$-مدول) است اگر و تنها اگر جبر گوشه‌ای آن یعنی $\ell^1(S)$، $(2n)$-میانگین‌پذیر مدولیِ ضعیف (بعنوان $\ell^1(E)$-مدول) است و چون میانگین‌پذیر مدولیِ ضعیف $\ell^1(S)$ (بعنوان $\ell^1(E)$-مدول) از هر مرتبه‌ای در [۳] ثابت شده‌است، لذا با توجه به نتایج این مقاله در می‌یابیم که $\mathcal{T}$، از هر مرتبه‌ای میانگین‌پذیر مدولیِ ضعیف (بعنوان $\mathfrak{T}$-مدول) است.

ابتدا به بیان مفاهیم و روابط اولیه مورد نیاز در این مقاله می‌پردازیم.

فرض‌کنید A و $\mathfrak{A}$ جبرهای باناخ باشند، به‌طوری که A یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ دوطرفه با اعمال سازگار بوده بعلاوه، X هم یک A-مدول باناخ دوطرفه و هم یک $\mathfrak{A}$- مدول باناخ دوطرفه با اعمال سازگار باشد. در این‌صورت، X یک A-$\mathfrak{A}$-مدول باناخ نامیده می‌شود. (برای جزعیات بیشتر به [۲]، [۶]، [۷]، [۸] و [۹] رجوع کنید). X را یک A-$\mathfrak{A}$-مدول باناخ جابجایی (هم جابجایی) گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\alpha \cdot x = x \cdot \alpha \qquad (a \cdot x = x \cdot a) \qquad \left(\alpha \in \mathfrak{A}, a \in A, x \in X\right).$$

اگر X یک A-$\mathfrak{A}$-مدول باناخ (جابجایی) باشد، در این صورت X^* (دوگان X) نیز با اعمال زیر یک A-$\mathfrak{A}$ -مدول باناخ (جابجایی) است.

$$\left(\alpha \cdot f\right)(x) = f\left(\, x \cdot \alpha\right) \ , \quad \left((a \cdot f)(x) = f\left(\, x \cdot a\right)\right) \qquad \left(\alpha \in \mathfrak{A}, a \in \ A, x \in X, f \in X^*\right),$$

که به طرز مشابه برای سمت دیگر هم قابل تعریف است. در حالت ویژه اگر Aیک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ دوطرفه جابجایی باشد، آنگاه A یک A-$\mathfrak{A}$-مدول باناخ جابجایی خواهد بود.

تعریف ۱. نگاشت پیوسته $D: A \to X$ را یک اشتقاق $\mathfrak{A}$-مدولی[۱] روی جبر A نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$D(a \pm b) = D(a) \pm D(b) \quad , \quad D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b \quad (a, b \in A),$$

$$D(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot D(a) \quad , \quad D(a \cdot \alpha) = D(a) \cdot \alpha \qquad (\alpha \in \mathfrak{A}, a \in A).$$

البته باید دقت شود که اشتقاق‌های مدولی، لزوماً خطی نیستند.

فرض‌کنید X یک A-$\mathfrak{A}$-مدول باناخ جابجایی باشد، در این حالت عنصر $x \in X$ را یک عنصر مرکزی[۲] نسبت به مدولِ $\mathfrak{A}$ نامیم هرگاه x با کلیه عناصر $\mathfrak{A}$ جابجا شود. مجموعه کلیه عناصر مرکزی X نسبت به مدول $\mathfrak{A}$ را با نماد $\mathrm{Cen}_{\mathfrak{A}}X$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲. هر عنصر مرکزی X نسبت به مدول $\mathfrak{A}$، یک اشتقاقِ $\mathfrak{A}$-مدولی به‌شکل زیر تعریف می‌کند که آن را یک اشتقاقِ $\mathfrak{A}$-مدولی درونی[۳] می‌نامیم.

$$D(a) = \boldsymbol{ad}_x(a) = a \cdot x - x \cdot a \qquad (a \in A).$$

واضح است که اگر X یک A-$\mathfrak{A}$-مدول باناخ جابجایی باشد، $\mathrm{Cen}_{\mathfrak{A}}X = X$ و اگر X یک A-$\mathfrak{A}$-مدول باناخ هم‌جابجایی باشد، آنگاه هر اشتقاق $\mathfrak{A}$-مدولی درونی، صفر است.

تعریف ۳. جبر باناخ A را میانگین‌پذیرِ $\mathfrak{A}$-مدولی گوئیم هرگاه به ازای هر A-$\mathfrak{A}$-مدول باناخ X، هر اشتقاق $\mathfrak{A}$-مدولی $D: A \to X$، درونی باشد. همچنین جبر باناخ A را میانگین‌پذیرِ $\mathfrak{A}$-مدولیِ ضعیف ((n)-میانگین‌پذیر $\mathfrak{A}$-مدولی ضعیف) گوئیم، هرگاه هر اشتقاق $\mathfrak{A}$-مدولی $D: A \to A^*$ ($D: A \to A^{(n)}$)، درونی باشد.

نکته ۴. تعاریف فوق از طریق مفهوم گروه‌های کوهومولوژی مدولی مرتبه اول نیز قابل بیان هستند. فرض‌کنید مجموعه همه اشتقاق‌های $\mathfrak{A}$-مدولی از A به X را با نماد $\mathrm{Z}^1_{\mathfrak{A}}(A, X)$ و مجموعه همه اشتقاق‌های $\mathfrak{A}$-مدولی درونی از A به X را با نماد $\mathcal{B}^1_{\mathfrak{A}}(A, X)$ نمایش‌دهیم. در این صورت گروه خارج‌قسمتی $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{A}}(A, X) = \frac{\mathrm{Z}^1_{\mathfrak{A}}(A,X)}{\mathcal{B}^1_{\mathfrak{A}}(A,X)}$ را اولین گروه کوهومولوژی A با ضرائب در X می‌نامیم. با این نمادگذاری، واضح است که جبر باناخ A میانگین‌پذیر $\mathfrak{A}$-مدولی است، هرگاه به ازای هر A-$\mathfrak{A}$-مدول باناخ X داشته باشیم $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{A}}(A, X^*) = \{0\}$ و جبر باناخ A را (n)-میانگین‌پذیر $\mathfrak{A}$-مدولیِ ضعیف گوئیم، اگر $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{A}}\left(A, A^{(n)}\right) = \{0\}$.

در ادامه به تعریف جبرهای باناخ مثلثی و جزعیات آن پرداخته و خواص آنها را بیان خواهیم نمود. فرض‌کنید A و B جبرهای باناخ و M یک (A, B)-مدول باناخ (A-مدول چپ و B-مدول راست) باشد، در این صورت مجموعه‌ی

[1] $\mathfrak{A}$ - Module Derivation
[2] Central element
[3] $\mathfrak{A}$ - Module Inner Derivation

$$\mathcal{T}=\left\{\begin{bmatrix} a & m \\ & b \end{bmatrix} : a\in A, b\in B, m\in M\right\},$$

با ضرب معمولی ماتریس‌ها و نرمِ $\left\|\begin{bmatrix} a & m \\ & b \end{bmatrix}\right\| = \|a\|_A + \|m\|_M + \|b\|_B$ یک جبر باناخ بوده که به جبر باناخ مثلثی معروف است. از طرف دیگر، از اینکه جبر باناخ $\mathcal{T}$ به عنوان فضای باناخ به‌صورت $\mathcal{T} \simeq A\oplus_1 M\oplus_1 B$ است، لذا دوگان مرتبه n-ام آن به‌صورت $\mathcal{T}^{(n)} \simeq A^{(n)}\oplus_\infty M^{(n)}\oplus_\infty B^{(n)}$ خواهد بود و اثر عناصر $\mathcal{T}^{(n)}$ روی عناصر $\mathcal{T}^{(n-1)}$ به صورت زیر است ([۸] و [۹] را ببینید).

$$\left(\begin{bmatrix} \phi & \varphi \\ & \psi \end{bmatrix} \in \mathcal{T}^{(n-1)}, \begin{bmatrix} \mu & \gamma \\ & \theta \end{bmatrix} \in \mathcal{T}^{(n)}\right) \quad \begin{bmatrix} \mu & \gamma \\ & \theta \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \phi & \varphi \\ & \psi \end{bmatrix}\right) = \mu(\phi)+\gamma(\varphi)+\theta(\psi).$$

ما در این مقاله جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}$ را به شکلی خاص و با استفاده از جبر نیم‌گروهی $\ell^1(S)$ که در آن S یک نیم‌گروه معکوس جابجایی (نه لزوماً یکدار) با مجموعه عناصر خودتوان E است، به‌صورت

$$\mathcal{T}=\left\{\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix} : a,b\in \ell^1(\mathrm{S}), [m]\in \ell^1(\mathrm{S})/M_0\right\},$$

در نظر می‌گیریم که در آن M_0 زیرفضای بسته از $\ell^1(S)$ تولید شده توسط $\{\delta_{es}-\delta_S : e\epsilon E,\ s\epsilon S\}$ است. برای هر $[m]\in \frac{\ell^1(\mathrm{S})}{M_0}$، فرض‌کنید $[m]=\rho(m)$ که $\rho: \ell^1(\mathrm{S}) \to \frac{\ell^1(\mathrm{S})}{M_0}$، همان نگاشت طبیعی خارج‌قسمتی باشد. با در نظر گرفتن $\mathfrak{T} = \left\{\begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{bmatrix} : \alpha\in \ell^1(E)\right\}$، جبر $\mathcal{T}$ با عمل مدولی زیر به یک $\mathfrak{T}$-مدول باناخ دوطرفه جابجایی (نه لزوماً یکدار) تبدیل می‌شود

$$\begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha[m] \\ & \alpha b \end{bmatrix}, \qquad (۳)$$

که در آن $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}\in\mathfrak{T}$ و $\begin{bmatrix} a & [m] \\ 0 & b \end{bmatrix}\in\mathcal{T}$. بوسیله استقرا می‌توان نشان داد که با عمل‌های

$$\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \phi & \varphi \\ & \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\phi+[m]\varphi & b\varphi \\ & b\psi \end{bmatrix}, \qquad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} \phi & \varphi \\ & \psi \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi a & \varphi a \\ & \varphi[m]+\psi b \end{bmatrix}, \qquad (۵)$$

$\mathcal{T}^{(2n+1)}$ به یک $\mathcal{T}$-مدول باناخ دوطرفه و با عمل‌های

$$\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mu & \gamma \\ & \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mu & [m]\theta+a\gamma \\ & b\theta \end{bmatrix}, \qquad (۶)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & \gamma \\ & \theta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu a & \mu[m]+\gamma b \\ & \theta b \end{bmatrix}, \qquad (۷)$$

$\mathcal{T}^{(2n)}$ به $\mathcal{T}$-مدول باناخ دوطرفه تبدیل می‌شود که $\begin{bmatrix} a & [m] \\ 0 & b \end{bmatrix}\in\mathcal{T}$، $\begin{bmatrix} \phi & \varphi \\ & \psi \end{bmatrix}\in\mathcal{T}^{(2n+1)}$ و $\begin{bmatrix} \mu & \gamma \\ & \theta \end{bmatrix}\in\mathcal{T}^{(2n)}$.

توجه داشته باشید که در روابط فوق، $[m]\varphi$ و $\varphi[m]$، عناصری در $\ell^1(\mathrm{S})^{(2n+1)}$ با ضابطه‌های

$$([m]\varphi)(\mu)=\varphi(\mu[m]),\quad (\varphi[m])(\theta)=\varphi([m]\theta)\qquad \left(\mu,\theta\in\ell^1(\mathrm{S})^{(2n)}\right) \tag{۸}$$

و همچنین $\mu[m]$ و $[m]\theta$ عناصری در $\left(\frac{\ell^1(\mathrm{S})}{M_0}\right)^{(2n)}$ با ضابطه‌های

$$(\mu[m])(\omega)=\mu([m]\omega),\quad ([m]\theta)(\omega)=(\theta)(\omega[m])\quad \left(\omega\in\left(\frac{\ell^1(\mathrm{S})}{M_0}\right)^{(2n-1)}\right),$$

هستند. از طرفی می‌توان بررسی کرد که

$$[m]\varphi=\rho^{(2n+1)}(m\varphi),\qquad \varphi[m]=\rho^{(2n+1)}(\varphi m) \tag{۹}$$

و

$$\mu[m]=\rho^{(2n)}(\mu m),\qquad [m]\theta=\rho^{(2n)}(m\theta). \tag{۱۰}$$

۱. نتایج اصلی

فرض‌کنید S یک نیم‌گروه معکوس (نیم‌گروهی که برای هر عنصر دلخواه مانند $s\in S$، عنصر منحصربفردی در آن مانند s^* یافت شود به‌طوری‌که $s^*ss^*=s^*$ و $ss^*s=s$) با مجموعه عناصر خودتوان E (مجموعه عناصری مانند e در S که $ee=e^2=e$) باشد. همچنین فرض‌کنید $\ell^1(S)$ جبر نیم‌گروهی آن باشد. در این بخش با فرض اینکه نیم‌گروه معکوس S جابجایی (نه لزوماً یکدار) باشد، اولین گروه کوهومولوژی $\mathfrak{T}$-مدولیِ $\mathcal{T}$ با ضرائب در $\mathcal{T}^{(2n)}$ را مورد بررسی قرار داده و ثابت می‌کنیم:

$$\mathcal{H}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T},\mathcal{T}^{(2n)}\right)\simeq \mathcal{H}^1_{\ell^1(\mathrm{E})}\left(\ell^1(\mathrm{S}),\ell^1(\mathrm{S})^{(2n)}\right)\oplus \mathcal{H}^1_{\ell^1(\mathrm{E})}\left(\ell^1(\mathrm{S}),\ell^1(\mathrm{S})^{(2n)}\right)$$

و با استفاده از آن $(2n)$-میانگین‌پذیری $\mathfrak{T}$-مدولیِ ضعیف $\mathcal{T}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در واقع رابطه بالا بیان‌گر این است که $(2n)$-میانگین‌پذیری $\mathfrak{T}$-مدولیِ ضعیف $\mathcal{T}$ و $(2n)$-میانگین‌پذیری $\ell^1(E)$-مدولیِ ضعیف $\ell^1(S)$، معادل هستند و چون میانگین‌پذیر مدولیِ ضعیف $\ell^1(S)$ (بعنوان $\ell^1(E)$-مدول) از هر مرتبه‌ای در [۳] ثابت شده‌است، لذا با توجه به نتایج این مقاله در می‌یابیم که $\mathcal{T}$، از هر مرتبه‌ای میانگین‌پذیرِ مدولیِ ضعیف (بعنوان $\mathfrak{T}$-مدول) است.

لم ۵. فرض‌کنید $D:\mathcal{T}\to\mathcal{T}^{(n)}$ یک اشتقاقِ $\mathfrak{T}$-مدولی و نگاشت‌های $D_1,D_4:\ell^1(S)\to\ell^1(S)^{(n)}$ به‌صورت

$$D_1:\ell^1(S)\longrightarrow\ell^1(S)^{(n)} \qquad\qquad D_4:\ell^1(S)\longrightarrow\ell^1(S)^{(n)}$$

$$D_1(a):=\pi_1\left(D\left(\begin{bmatrix} a & 0\\ & 0\end{bmatrix}\right)\right)\quad \text{و}\quad D_4(b):=\pi_4\left(D\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ & b\end{bmatrix}\right)\right)$$

(که در آنها π_1 و π_4 نگاشت‌های تصویر روی آرایه‌های متناظرشان هستند)، تعریف شوند. آنگاه D_1 و D_4 نیز اشتقاق‌های $\ell^1(E)$-مدولی هستند. برعکس اگر D_1 و D_4 دو اشتقاق $\ell^1(E)$-مدولی باشند، آنگاه نگاشت $D_{14}: \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{(n)}$ که به‌صورت $D_{14}\left(\begin{bmatrix} a & m \\ & b \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} D_1(a) & 0 \\ & D_4(b) \end{bmatrix}$، تعریف می‌شود نیز یک اشتقاق $\mathfrak{T}$-مدولی است. بعلاوه D_{14} درونی است اگر و تنها اگر D_1 و D_4 هردو درونی باشند.

برهان: با توجه به لم ۱،۱ از [۹] (همچنین لم ۲،۱ از [۸]) و کمی محاسبات حاصل می‌شود که به خواننده واگذار می‌شود.

لم ۶. اگر $D: \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{(2n)}$ یک اشتقاق $\mathfrak{T}$-مدولی باشد. آنگاه عنصر γ در $M^{(2n)}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر عنصر خودتوان $e \in E$ داریم

$$D\left(\begin{bmatrix} \delta_e & 0 \\ & \delta_e \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}, \qquad (۱۱)$$

$$D\left(\begin{bmatrix} \delta_e & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ & 0 \end{bmatrix}, \qquad (۱۲)$$

$$D\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ & \delta_e \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۱۳)$$

برهان: ابتدا با استقرا نشان می‌دهیم که برای هر $k \in \mathbb{N}$، داریم:

$$\Phi\delta_e = \Phi = \delta_e\Phi \qquad \left(\Phi \in M^{(k)}, e \in E\right), \qquad (۱۴)$$

فرض‌کنید $\phi \in M^{(1)} = M^*$ و از جایی که $M^* = \left(\frac{\ell^1(S)}{M_0}\right)^* = \frac{\ell^\infty(S)}{(M_0)^\perp}$، لذا برای هر $s \in S$، داریم:

$$(\phi\delta_e - \phi)(\delta_s) = \phi(\delta_{es} - \delta_s) = 0,$$

حال با توجه به خطی و پیوستگی نگاشت ϕ، رابطه (۱۴) برای $k = 1$ درست است. حال فرض‌کنید رابطه (۱۴) برای هر $k \geq 2$ درست است. فرض‌کنید $\phi \in M^{(k)}$، $\Phi \in M^{(k+1)}$ و $e \in E$ و با توجه به فرض استقرا داریم:

$$\Phi\delta_e(\phi) = \Phi(\delta_e\phi) = \Phi(\phi) = \Phi(\phi\delta_e) = \delta_e\Phi(\phi),$$

که نشان می‌دهد رابطه (۱۴) برای $k + 1$ نیز درست است. حال به اثبات قسمت‌های اصلی قضیه می‌پردازیم. فرض‌کنـــید $e \in E$ برای اثبات رابطه (۱۱) چون D اشتقاق است پس با توجه به $\begin{bmatrix} \delta_e & 0 \\ & \delta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_e & 0 \\ & \delta_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_e & 0 \\ & \delta_e \end{bmatrix}$، داریم:

$$D\left(\begin{bmatrix} \delta_e & 0 \\ & \delta_e \end{bmatrix}\right) = 2D\left(\begin{bmatrix} \delta_e & 0 \\ & \delta_e \end{bmatrix}\right),$$

پس $D\left(\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & \delta_e\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ & 0\end{bmatrix}$. برای قسمت بعد، با توجه به تعریف اشتقاق D_1 و اینکه $D_1(\delta_e)=0$، فرض‌کنید برای عناصر $\gamma_e \in M^{(2n)}$ و $\theta_e \in \ell^1(S)^{(2n)}$، داشته باشیم $D\left(\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}D_1(\delta_e) & \gamma_e\\ & \theta_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \gamma_e\\ & \theta_e\end{bmatrix}$. یک بار دیگر با استفاده از خاصیت اشتقاق بودن D و روابط (۶) و (۷) داریم:

$$\begin{aligned}D\left(\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & 0\end{bmatrix}\right)&=D\left(\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & 0\end{bmatrix}\right)\\&=\begin{bmatrix}0 & \gamma_e\\ & \theta_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \gamma_e\\ & \theta_e\end{bmatrix},\\&=\begin{bmatrix}0 & \delta_e\gamma_e\\ & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \gamma_e\\ & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

و چون D جمع‌پذیر است داریم:

$$D\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_e\end{bmatrix}\right)=D\left(\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & \delta_e\end{bmatrix}\right)-D\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_e\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & \gamma_e\\ & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\gamma_e\\ & 0\end{bmatrix}.$$

در نهایت برای اتمام اثبات کافی است نشان‌دهیم که برای عنصر دیگر $x \in E$ باید داشته باشیم: $\gamma_e=\gamma_x$. بدین منظور عنصر دیگر $x \in E$ را در نظر می‌گیریم. چون $D\left(\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & \delta_x\end{bmatrix}\right)=D\left(\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & \delta_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & \delta_x\end{bmatrix}\right)$ با توجه به (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0 & \gamma_e-\gamma_x\\ & 0\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0 & \gamma_e-\gamma_x\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & \delta_x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & \delta_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \gamma_e-\gamma_x\\ & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0 & (\gamma_e-\gamma_x)\delta_e\\ & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \delta_x(\gamma_e-\gamma_x)\\ & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0 & 2(\gamma_e-\gamma_x)\\ & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

بنابراین $\gamma_e=\gamma_x$ و اثبات تمام است.

لم ۷. فرض‌کنید $D:\mathcal{T}\to\mathcal{T}^{(2n)}$ یک اشتقاقِ $\mathfrak{T}$-مدولی باشد. در این‌صورت عنصر γ' در $M^{(2n)}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر عنصر خودتوان $e \in E$ داریم:

$$D\left(\begin{bmatrix}0 & [\delta_e]\\ & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & \gamma'\\ & 0\end{bmatrix}.$$

برهان: فرض‌کنید $D\left(\begin{bmatrix}0 & [\delta_e]\\ & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\mu'_e & \gamma'_e\\ & \theta'_e\end{bmatrix}\in\mathcal{T}^{(2n)}$. با توجه به اینکه D اشتقاق است، اگر D را روی هر کدام از روابط $\begin{bmatrix}0 & [\delta_e]\\ & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & [\delta_e]\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_e\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0 & [\delta_e]\\ & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & [\delta_e]\\ & 0\end{bmatrix}$ اثر دهیم و از روابط (۶) و (۷) و همچنین لم ۶. استفاده کنیم، خواهیم داشت: $\mu'_e=\theta'_e=0$ و $\gamma'_e=\gamma$. برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم که برای هر عنصر دیگر $x\in E$ داریم $\gamma'_e=\gamma'_x$. بدین منظور با استفاده از لم ۶ و روابط (۶)، (۷) و (۱۴)، داریم:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}0 & \gamma'_e\\ & 0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & \gamma'_e\delta_x\\ & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & \gamma'_e\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & [\delta_e]\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\gamma\\ & 0\end{bmatrix}\\
&= D\left(\begin{bmatrix}0 & [\delta_e]\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_x\end{bmatrix}\right)\\
&= D\left(\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & [\delta_x]\\ & 0\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}0 & \gamma\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & [\delta_e]\\ & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_e & 0\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \gamma'_x\\ & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & \gamma'_x\delta_e\\ & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \gamma'_x\\ & 0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

بنابراین $\gamma'_e=\gamma'_x$ و برهان تمام است.

لم ۸. فرض‌کنید $D:\mathcal{T}\to\mathcal{T}^{(2n)}$ یک اشتقاقِ مدولی باشد. در این‌صورت اشتقاق‌های $D_1,D_4:\ell^1(S)\to\ell^1(S)^{(2n)}$ و عناصر γ و γ' در $M^{(2n)}$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر عنصر دلخواه $s\in E$ داریم:

$$D\left(\begin{bmatrix}\delta_s & 0\\ & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}D_1(\delta_s) & \delta_s\gamma\\ & 0\end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

$$D\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_s\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & -\gamma\delta_s\\ & D_4(\delta_s)\end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

$$D\left(\begin{bmatrix}0 & [\delta_s]\\ & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & \left(\rho^{(2n)}\circ D_1\right)(\delta_s)+\delta_s\gamma'\\ & 0\end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

$$D\left(\begin{bmatrix}0 & [\delta_s]\\ & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & \left(\rho^{(2n)}\circ D_4\right)(\delta_s)+\gamma'\delta_s\\ & 0\end{bmatrix}. \tag{۱۸}$$

برهان: فرض‌کنید D_1 و D_4 همان اشتقاق‌هایی باشند که در لم ۵ ساخته و γ و γ' نیز عناصری در $M^{(2n)}$ باشند که به ترتیب در لم‌های ۶ و ۷ یافت شدند. برای عضو دلخواه $s\in S$ فرض‌کنید $D\left(\begin{bmatrix}\delta_s & 0\\ & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}D_1(\delta_s) & \gamma_s\\ & \theta_s\end{bmatrix}$. از جایی که s^*s عنصری خودتوان است (و لذا $\delta_{s^*s}\in\ell^1(E)$) از روابط (۶)، (۷) و (۱۲) داریم:

$$D\left(\begin{bmatrix}\delta_s & 0\\ & 0\end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix}\delta_s & 0\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{s^*s} & 0\\ & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}D_1(\delta_s) & \gamma_s\\ & \theta_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{s^*s} & 0\\ & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta_s & 0\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \gamma\\ & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}D_1(\delta_s)\delta_{s^*s} & \delta_s\gamma\\ & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \delta_s\gamma\\ & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}D_1(\delta_{ss^*s}) & \delta_s\gamma\\ & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}D_1(\delta_s) & \delta_s\gamma\\ & 0\end{bmatrix}.$$

که رابطه (۱۵) را ثابت می‌کند. برای اثبات رابطه (۱۶) مانند استدلال قبل با فرض $D\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_s\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\mu_s & \gamma_s\\ & D_4(\delta_s)\end{bmatrix}$، از رابطه (۱۳) داریم:

$$D\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_s\end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_{ss^*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_s\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}0 & -\gamma\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_{ss^*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_s & \gamma_s\\ & D_4(\delta_s)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & -\gamma\delta_s\\ & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_{ss^*}D_4(\delta_s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\gamma\delta_s\\ & D_4(\delta_s)\end{bmatrix}.$$

و در نهایت با توجه به رابطه (۱۰) داریم:

$$D\left(\begin{bmatrix}0 & [\delta_s]\\ & 0\end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix}\delta_s & 0\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & [\delta_{s^*s}]\\ & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}D_1(\delta_s) & \delta_s\gamma\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & [\delta_{s^*s}]\\ & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta_s & 0\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \gamma'\\ & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & D_1(\delta_s)[\delta_{s^*s}]\\ & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \delta_s\gamma'\\ & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & \rho^{(2n)}(D_1(\delta_s)\delta_{s^*s}) + \delta_s\gamma'\\ & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & \left(\rho^{(2n)}\circ D_1\right)(\delta_s) + \delta_s\gamma'\\ & 0\end{bmatrix}.$$

که این (۱۷) را اثبات می‌کند. در آخر نیز با استفاده از تساوی $\begin{bmatrix}0 & [\delta_s]\\ & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & [\delta_{ss^*}]\\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ & \delta_s\end{bmatrix}$ به‌طور مشابه می‌توان رابطه (۱۸) را ثابت کرد و برهان تمام است.

اکنون به قضیه‌ای می‌رسیم که ارتباط مستقیم بین اشتقاق‌های $\mathfrak{T}$-مدولی از $\mathcal{T}$ به $\mathcal{T}^{(2n)}$ و اشتقاق‌های $\ell^1(E)$-مدولی از $\ell^1(S)$ به $\ell^1(S)^{(2n)}$ را آشکار و یک تناظر یک‌به‌یک بین آنها برقرار می‌کند. این قضیه کمی بعدتر منجر به نتیجه اصلی این مقاله خواهد شد که در قضیه ۱۰ ارائه خواهیم داد.

قضیه ۹. نگاشت $D:\mathcal{T}\to\mathcal{T}^{(2n)}$ یک اشتقاقِ $\mathfrak{T}$-مدولی از $\mathcal{T}$ به $\mathcal{T}^{(2n)}$ است اگر و تنها اگر اشتقاق‌های $\ell^1(E)$-مدولیِ D_1 و D_4 از $\ell^1(S)$ به $\ell^1(S)^{(2n)}$ و عناصر γ و γ' در $M^{(2n)}$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$D\left(\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} D_1(a) & a\gamma-\gamma b+\left(\rho^{(2n)}\circ D_1\right)(m)+m\gamma' \\ & D_4(b) \end{bmatrix}, \qquad (۱۹)$$

$$=\begin{bmatrix} D_1(a) & a\gamma-\gamma b+\left(\rho^{(2n)}\circ D_4\right)(m)+\gamma' m \\ & D_4(b) \end{bmatrix}, \qquad (۲۰)$$

بعلاوه D درونی است اگر و تنها اگر D_1 و D_4 درونی باشند.

برهان: با توجه به لم‌های ۵ و ۸، وجود اشتقاق‌های D_1 و D_4 از $\ell^1(S)$ به $\ell^1(S)^{(2n)}$ و عناصر γ و γ' در $M^{(2n)}$ که درستی رابطه (۱۰) را برای توابع مشخصه در $\ell^1(S)$ ثابت کند، تضمین شده‌است. اما با توجه به تعریف اشتقاق مدولی که پیوسته و جمع‌پذیر است و از طرفی چون ترکیبات خطی توابع مشخصه در جبرهای نیم‌گروهی چگال هستند، رابطه (۱۹) و (۲۰) برای تمام عناصر $\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\in\mathcal{T}$ اثبات می‌شود. لذا برای اتمام اثبات باید نشان‌دهیم:

الف) D نگاشت $\mathfrak{T}$-مدولی است اگر و تنها اگر D_1 و D_4 نگاشت‌های $\ell^1(E)$-مدولی باشند.

ب) D اشتقاق است اگر و تنها اگر D_1 و D_4 اشتقاق باشند.

ج) D درونی است اگر و تنها اگر D_1 و D_4 درونی باشند.

اثبات (الف) سخت نیست. برای اثبات (ب) ابتدا فرض‌کنید D اشتقاق و $\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}$ و $\boldsymbol{t}'=\begin{bmatrix} a' & [m'] \\ & b' \end{bmatrix}$ دو عنصر در $\mathcal{T}$ باشند و عبارت $\boldsymbol{t}D(\boldsymbol{t}')+D(\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}'$ را Δ بنامید. داریم:

$$\Delta=\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1(a') & a'\gamma-\gamma b'+\left(\rho^{(2n)}\circ D_1\right)(m')+m'\gamma' \\ & D_4(b') \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} D_1(a) & a\gamma-\gamma b+\left(\rho^{(2n)}\circ D_4\right)(m)+\gamma' m \\ & D_4(b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & [m'] \\ & b' \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} aD_1(a') & aa'\gamma-a\gamma b'+\rho^{(2n)}\left(aD_1(m')\right)+am'\gamma'+\rho^{(2n)}(mD_4(b')) \\ & bD_4(b') \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} D_1(a)a' & \rho^{(2n)}(D_1(a)m') + a\gamma b' - \gamma bb' + \rho^{(2n)}(D_4(m)b') + \gamma' mb' \\ & D_4(b) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_1(aa') & aa'\gamma - \gamma bb' + \rho^{(2n)}(D_1(am')) + am'\gamma' + \rho^{(2n)}(D_4(mb'))+\gamma' mb' \\ & D_4(bb') \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_1(aa') & aa'\gamma - \gamma bb' + \left(\rho^{(2n)} \circ D_1\right)(am') + am'\gamma' \\ & D_4(bb') \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & \left(\rho^{(2n)} \circ D_4\right)(mb')+\gamma' mb' \\ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= D\left(\begin{bmatrix} aa' & [am'] \\ & bb' \end{bmatrix}\right) + D\left(\begin{bmatrix} 0 & [mb'] \\ & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= D\left(\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & [m'] \\ & b' \end{bmatrix}\right)$$

$$= D(\boldsymbol{tt}').$$

که نشان می‌دهد D اشتقاق است. حالت برعکس که اشتقاق بودن D_1 و D_4 از اشتقاق بودن D نتیجه می‌شود، نیز به همین صورت حاصل می‌شود.

در نهایت برای اثبات قسمت (ج)، فرض‌کنید D اشتقاق درونی بوده و برای عنصری در $\mathcal{T}^{(2n)}$ مانند $\begin{bmatrix} f & g \\ & h \end{bmatrix}$ داشته باشیم $D = \boldsymbol{ad}_{\begin{bmatrix} f & g \\ & h \end{bmatrix}}$. در این‌صورت برای عناصر دلخواه a و b در $\ell^1(S)$ داریم:

$$\begin{bmatrix} D_1(a) & a\gamma - \gamma b \\ & D_4(b) \end{bmatrix} = D\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ & b \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f & g \\ & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f & g \\ & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ & b \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} af & ag \\ & bh \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} fa & gb \\ & hb \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{ad}_f(a) & ag - gb \\ & \boldsymbol{ad}_h(b) \end{bmatrix}.$$

که نشان می‌دهد D_1 و D_4 درونی هستند. برعکس، فرض‌کنید D_1 و D_4 درونی باشند. چون $\ell^1(S)^{(2n)}$ یک جبر $\ell^1(S)$ -مدول باناخِ جابجایی است، لذا $D_1 = D_4 = 0$. از طرفی چون $\rho^{(2n)}: \ell^{(2n)}(S) \to M^{(2n)}$ نگاشتی پوشاست، عنصر $\omega \in \ell^{(2n)}(S)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\rho^{(2n)}(\omega) = \gamma'$. حال با استفاده از رابطه (۱۹) برای هر عنصر $\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}$ در $\mathcal{T}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} D_1(a) & a\gamma - \gamma b + \left(\rho^{(2n)} \circ D_1\right)(m) + m\gamma' \\ & D_4(b) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a\gamma - \gamma b + m(\rho^{(2n)}(\omega)) \\ & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a\gamma - \gamma b + \rho^{(2n)}(m\omega) \\ & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a\gamma - \gamma b + [m]\omega \\ & b\omega - \omega b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a\gamma + [m]\omega \\ & b\omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \gamma b \\ & \omega b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ & \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ & \omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{ad}_{\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ & \omega \end{bmatrix}}\left(\begin{bmatrix} a & [m] \\ & b \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد D درونی است و برهان تمام می‌شود.

یک کاربرد مفید از قضیه قبل همانطور که قبلاً هم اشاره شد، حالت زوج برای قضیه ۵.۲ از [۸] است که ارتباط موجود بین اولین گروه کوهومولوژی $\mathfrak{T}$-مدولی $\mathcal{T}$ با ضرائب در $\mathcal{T}^{(2n)}$ و اولین گروه کوهومولوژی $\ell^1(E)$-مدولی $\ell^1(S)$ با ضرائب در $\ell^1(S)^{(2n)}$ را بیان می‌کند.

قضیه ۱۰. فرض‌کنید S یک نیم‌گروه جابجایی (نه لزوماً یکدار) با مجموعه عناصر خودتوان E و جبرهای باناخ مثلثی $\mathcal{T}$ و $\mathfrak{T}$ مطابق بالا باشند. در این‌صورت

$$\mathcal{H}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right) \simeq \mathcal{H}^1_{\ell^1(E)}\left(\ell^1(S), \ell^1(S)^{(2n)}\right) \oplus \mathcal{H}^1_{\ell^1(E)}\left(\ell^1(S), \ell^1(S)^{(2n)}\right). \qquad (۲۱)$$

برهان: فرض‌کنید $D \in \mathcal{Z}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right)$ باشد. قضیه قبل نشان مـی‌دهد اشتقاق‌های $\ell^1(E)$-مدولی D_1 و D_4 در $\mathcal{Z}^1_{\ell^1(E)}\left(\ell^1(S), \ell^1(S)^{(2n)}\right)$ وجود دارند طوری‌که روابط (۱۹) و (۲۰) برقرار هستند. حال نگاشت Γ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{gathered}
\Gamma: \mathcal{Z}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right) \longrightarrow \mathcal{H}^1_{\ell^1(E)}\left(\ell^1(S), \ell^1(S)^{(2n)}\right) \oplus \mathcal{H}^1_{\ell^1(E)}\left(\ell^1(S), \ell^1(S)^{(2n)}\right) \\
D \mapsto \left(D_1 + \mathcal{B}^1_{\ell^1(E)}\left(\ell^1(S), \ell^1(S)^{(2n)}\right), D_4 + \mathcal{B}^1_{\ell^1(E)}\left(\ell^1(S), \ell^1(S)^{(2n)}\right)\right).
\end{gathered}$$

می‌توان نشان داد که Γ خطی و بنابر قضیه ۹، خوش‌تعریف است. از نتایج دیگر قضیه ۹ این است که:

$$D \in \ker(\Gamma) \Leftrightarrow D_1, D_4 \in \mathcal{B}^1_{\ell^1(E)}\left(\ell^1(S), \ell^1(S)^{(2n)}\right) \Leftrightarrow D \in \mathcal{B}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right),$$

که این نشان می‌دهد $\ker(\Gamma) = \mathcal{B}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right)$، لذا با توجه به قضیه مقدماتی جبرخطی داریم :

$$\operatorname{Im}(\Gamma) = \frac{\mathcal{Z}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right)}{\ker(\Gamma)} \cong \frac{\mathcal{Z}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right)}{\mathcal{B}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right)} \cong \mathcal{H}^1_{\mathfrak{T}}\left(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{(2n)}\right)$$

و چون بنابر لم ۵، Γ پوشاست لذا حکم ثابت می‌شود و برهان تمام است.

نتیجه۱۱. جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}$، $(2n)$-میانگین‌پذیر $\mathfrak{T}$-مدولیِ ضعیف است.

برهان: با توجه به قضیه ۱۰، صفر شدن هر کدام از گروه‌های کوهومولوژی رابطه (۲۱) معادل صفر شدن دیگری است. از سویی دیگر بداغی و جباری در مثال ۱ از [۳] نشان دادند که جبر نیم‌گروهی $\ell^1(S)$، $(2n)$-میانگین‌پذیر $\ell^1(E)$-مدولیِ ضعیف است .

نتیجه۱۲. جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}$، از هر مرتبه میانگین‌پذیر $\mathfrak{T}$-مدولیِ ضعیف است.

برهان: نویسنده این مقاله و همکارانش در نتیجه ۱.۴ از [۸] نشان دادند که جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}$، $(2n+1)$-میانگین‌پذیر $\mathfrak{T}$-مدولیِ ضعیف است که با توجه به نتیجه ۱۱، ثابت می‌شود که $\mathcal{T}$ از هر مرتبه، میانگین‌پذیر $\mathfrak{T}$-مدولیِ ضعیف است.

References

1. M. Amini, Module amenability for semigroup algebras, Semigroup Forum., **69** (2004), 243-254.
2. M. Amini and D. E. Bagha, Weak module amenability for semigroup algebras, Semigroup Forum., **71** (2005), 18-26.
3. A. Bodaghi and A. Jabbari, n-Weak module amenability of triangular Banach algebras, Math Slovaca., **65**(3) (2015), 645-666.
4. B.E. Forrest and L.W. Marcoux, Derivation of triangular Banach algebras, Ind. Univ. Math. J., **45** (1996), 441-462.
5. B.E. Forrest and L.W. Marcoux, Weak amenability of triangular Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 1435-1452.
6. E. Nasrabadi, Weak module amenability of triangular Banach algebras I, Math. Slovaca., **69**(2) (2019), 425-432.
7. E. Nasrabadi and A. Pourabbas, Module cohomology group of inverse semigroup algebras, Bull. Iran. Math. Soc., **37**(4) (2011), 157-169.
8. E. Nasrabadi, M. Ramezanpour and A. Aasaraai, (2n+1)-weak module amenability of triangular Banach algebras on Inverse semigroup algebras, Sci. Islam. Repub. Iran., **32**(4) (2021), 341-347.
9. A. Pourabbas and E. Nasrabadi, Weak module amenability of triangular Banach algebras, Math. Slovaca., **61**(6) (2011), 949–958.