



## Strongly $\theta_{cl}$ -Continuous Functions

Masoumeh Etebar<sup>1</sup>

1. Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. E-mail: m.etebar@scu.ac.ir

---

**Article Info****Article type:**  
Research Article**Article history:**

Received: 11 August 2021

Accepted:

26 September 2021

Published online:

3 December 2023

**Keywords:** $\theta_{cl}$ -open set,  
 $\theta_{cl}$ -closed set,  
 $\theta_{cl}$ -space,  
 $cl$ -closure compact space,  
 $\theta_{cl}$ -closed graph.

---

**ABSTRACT****Introduction**

The purpose of the present paper is to study the class of strongly  $\theta_{cl}$ -continuous functions, which contains the class of  $cl$ -supercontinuous functions ( $\equiv$  clopen continuous functions). Both these two classes are contained in the classes of strongly  $\theta$ -continuous functions and  $R_{cl}$ -supercontinuous functions. A set  $A$  in a topological space  $X$  is called  $cl$ -open if it is the union of clopen sets. The complement of a  $cl$ -open set is referred to as  $cl$ -closed. For a set  $A$  in a topological space  $X$  the set of all  $x \in X$  such that every clopen set containing  $x$  intersects  $A$  is called the  $cl$ -closure of  $A$  and it is denoted by  $cl_s A$ . So, a set  $B$  is  $cl$ -closed if and only if  $B = cl_s B$ .

An open set  $U$  in a topological space  $X$  is called  $r_{cl}$ -open if it is the union of  $cl$ -closed sets. A topological space  $X$  is called an  $R_{cl}$ -space if every open set in  $X$  is  $r_{cl}$ -open. If  $A$  is a subset of  $X$ , then  $int_{\theta} A$  denotes the set of all  $x \in A$  such that  $A$  contains a closed neighborhood containing  $x$ . A set  $B$  is called  $\theta$ -open if  $B = int_{\theta} B$ . The complement of a  $\theta$ -open set is called  $\theta$ -closed. The set of all  $x \in X$  such that every closed neighborhood of  $x$  intersects  $A$  is called the  $\theta$ -closure of  $A$  and it is denoted by  $cl_{\theta} A$ . So, a set  $B$  is  $\theta$ -closed if and only if  $B = cl_{\theta} B$ . A function  $f: X \rightarrow Y$  is said to be  $cl$ -supercontinuous (respectively  $R_{cl}$ -supercontinuous, respectively strongly  $\theta$ -continuous) if  $f^{-1}(V)$  is  $cl$ -open (respectively  $r_{cl}$ -open, respectively  $\theta$ -open) in  $X$  for every open set  $V$  in  $Y$ .

**Material and methods**

A function  $f: X \rightarrow Y$  is said to be *strongly  $\theta_{cl}$ -continuous* at  $x \in X$  if for each open set  $V$  in  $Y$  containing  $f(x)$ , there exists an open set  $U$  in  $X$  containing  $x$  such that  $f(cl_s U) \subseteq V$ . The function  $f$  is said to be *strongly  $\theta_{cl}$ -continuous* if it is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous at each  $x \in X$ . Clearly, such functions are strongly  $\theta$ -continuous but not conversely. For instance, the identity function on the real line is strongly  $\theta$ -continuous, but it is not strongly  $\theta_{cl}$ -continuous. This is also an example of a continuous function which is not strongly  $\theta_{cl}$ -continuous. The  $\theta_{cl}$ -closure of a set  $A$  in a topological space  $X$ , denoted by  $cl_{\theta_{cl}} A$ , is the set of all  $x \in X$  such that each  $cl$ -closed neighborhood of  $x$  intersects  $A$ . A subset  $H$  of  $X$  is called  $\theta_{cl}$ -closed if  $H = cl_{\theta_{cl}} H$ . The  $\theta_{cl}$ -interior of  $A$  denotes the set of all  $x \in A$  such that  $A$  contains a  $cl$ -closed neighborhood of  $x$  and it is denoted by  $int_{\theta_{cl}} A$ . A set  $G$  is called  $\theta_{cl}$ -open if  $G = int_{\theta_{cl}} G$ . We denote by  $S_{cl}(X)$  the ring of all real valued strongly  $\theta_{cl}$ -continuous functions on a topological space  $X$ , and  $C(X)$  denotes the ring of all real valued continuous functions on  $X$ .

A function  $f: X \rightarrow Y$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous if and only if the inverse image of a closed set under  $f$  is  $\theta_{cl}$ -closed if and only if the inverse image

---

---

of an open set under  $f$  is  $\theta_{cl}$ -open if and only if the inverse image of a subbasic open set under  $f$  is  $\theta_{cl}$ -open if and only if for every  $x \in X$  and for each closed set  $F$  in  $Y$  with  $x \notin F$ , there exists a  $\theta_{cl}$ -open set  $U$  in  $X$  containing  $x$  such that  $f(U) \cap F = \emptyset$ .

A function  $f: X \rightarrow Y$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous if and only if  $f(cl_{\theta_{cl}} A) \subseteq cl f(A)$  for every subset  $A$  of  $X$  if and only if  $cl_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl B)$  for every subset  $B$  of  $Y$  if and only if  $f^{-1}(int B) \subseteq int_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B))$  for every subset  $B$  of  $Y$ .

### Results and discussion

If  $f: X \rightarrow Y$  is a strongly  $\theta_{cl}$ -continuous function and  $g: Y \rightarrow Z$  is continuous, then  $g \circ f$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous.

A function  $f: X \rightarrow Y$  is said to be  $\theta_{cl}$ -open ( $\theta_{cl}$ -closed) if the image of each  $\theta_{cl}$ -open ( $\theta_{cl}$ -closed) set in  $X$  is open (closed) in  $Y$ .

Let  $f: X \rightarrow Y$  be a  $\theta_{cl}$ -open and strongly  $\theta_{cl}$ -continuous surjection and let  $g: Y \rightarrow Z$  be a function. Then  $g \circ f$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous if and only if  $g$  is continuous. Further, if in addition  $f(A)$  is  $\theta_{cl}$ -open in  $Y$  for every  $\theta_{cl}$ -open set  $A$  in  $X$ , then  $g$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous.

A subset  $S$  of a space  $X$  is said to be  $\theta_{cl}$ -embedded in  $X$  if every  $\theta_{cl}$ -open ( $\theta_{cl}$ -closed) set in  $S$  is the intersection of a  $\theta_{cl}$ -open ( $\theta_{cl}$ -closed) set in  $X$  with  $S$ . Let  $f: X \rightarrow Y$  be a function. Let  $\{U_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$  be a cover of  $X$  by  $\theta_{cl}$ -open sets such that each  $U_\alpha$  is  $\theta_{cl}$ -embedded in  $X$  and let  $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda$ . If each  $f_\alpha$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous, then  $f$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous. Let  $\{F_i | i = 1, \dots, n\}$  be a cover of  $X$  by  $\theta_{cl}$ -closed sets such that each  $F_i$  is  $\theta_{cl}$ -embedded in  $X$  and let  $f_i = f|_{F_i}$ , where  $i = 1, \dots, n$ . If each  $f_i$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous, then  $f$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous.

Let  $\{f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$  be a family of functions and let  $f: \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$  be a function defined by  $f((x_\alpha)) = (f_\alpha(x_\alpha))$ . If each  $f_\alpha$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous, then  $f$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous and whenever each  $X_\alpha$  is extremally disconnected, then the converse is also true.

A space is said to be a  $\theta_{cl}$ -space if every open set is  $\theta_{cl}$ -open. A topological space  $(X, \tau)$  is a  $\theta_{cl}$ -space if and only if every continuous function from  $(X, \tau)$  into a space  $(Y, \sigma)$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous.

Let  $f: X \rightarrow Y$  be a function and let  $g: X \rightarrow X \times Y$  be the graph function of  $f$  defined by  $g(x) = (x, f(x))$ . Then  $g$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous if and only if  $f$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous and  $X$  is a  $\theta_{cl}$ -space.

The *component* of a point  $x$  in a topological space  $X$  is the maximal connected subset  $C_x$  in  $X$  containing  $x$ . The *quasi-component*  $Q_x$  of  $x$  in  $X$  is the intersection of all clopen subsets of  $X$  containing  $x$ . A space is called *totally disconnected* if the only nonempty components are singletons. For a strongly  $\theta_{cl}$ -continuous function  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f(Q_x) \subseteq Q_{f(x)}$  for each  $x \in X$  and if  $Y$  is a  $T_1$ -space, then  $f(Q_x) = \{f(x)\}$  for each  $x \in X$ . Also if  $f$  is injective and  $Y$  is a  $T_1$ -space, then  $X$  is totally disconnected.

If  $f: X \rightarrow Y$  is an open strongly  $\theta_{cl}$ -continuous injection, then  $X$  is a  $\theta_{cl}$ -space. If  $f: X \rightarrow Y$  is a continuous function and  $Y$  is a  $\theta_{cl}$ -space, then  $f$  is strongly  $\theta_{cl}$ -continuous.

A space is called *ultra-Hausdorff* if for each pair of distinct points, there is a clopen set containing one and not the other. Let  $f: X \rightarrow Y$  be a strongly  $\theta_{cl}$ -continuous injection. If  $Y$  is  $T_0$ , then  $X$  is ultra-Hausdorff.

A space  $X$  is called *cl-closure compact* if every open cover of  $X$  has a finite subcollection whose *cl-closures* cover  $X$ . A subset  $A$  of a space  $X$  is said

---

---

to be *cl-closure compact relative to X* if for each cover of  $A$  by open sets in  $X$ , there exists a finite subcollection whose *cl*-closures cover  $A$ .

The strongly  $\theta_{cl}$ -continuous image of a *cl*-closure compact space is compact. Let  $f: X \rightarrow Y$  be a strongly  $\theta_{cl}$ -continuous function and let  $A \subseteq X$ . If  $A$  is *cl*-closure compact relative to  $X$ , then  $f(A)$  is compact.

The graph  $G(f)$  of a function  $f: X \rightarrow Y$  is said to be  $\theta_{cl}$ -closed if for each  $(x, y) \notin G(f)$ , there exist an open set  $U$  in  $X$  and an open set  $V$  in  $Y$  containing  $x$  and  $y$ , respectively, such that  $(cl_s U \times cl_s V) \cap G(f) = \emptyset$ . The graph of  $f$  is said to be  $\theta_{cl}$ -closed with respect to  $X$  if for each  $(x, y) \notin G(f)$ , there exist an open set  $U$  in  $X$  and an open set  $V$  in  $Y$  containing  $x$  and  $y$ , respectively, such that  $f(cl_s U) \cap V = \emptyset$ . If  $f: X \rightarrow Y$  is a strongly  $\theta_{cl}$ -continuous function and  $Y$  is Hausdorff, then  $G(f)$  is  $\theta_{cl}$ -closed with respect to  $X$ .

### Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- If  $X$  is a  $\theta_{cl}$ -space, then  $C(X) = S_{cl}(X)$ , and whenever  $X$  is completely regular the converse is true.
- For every topological space  $X$ , there is an ultra-Hausdorff space  $Y$  such that  $S_{cl}(X) \cong C(Y)$ . Also if  $X$  is compact, then  $Y$  is zero-dimensional.

---

**How to cite:** Etebar, Masoumeh, (2023). Strongly  $\theta_{cl}$ -Continuous Functions. *Mathematical Researches*, 9 (2), 107 – 124.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## نگاشت‌های به طور قوی $\theta_{cl}$ - پیوسته

### معصومه اعتبار<sup>۱</sup>

۱. گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. رایانامه: m.etebar@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله کلاسی از نگاشت‌های پیوسته میان فضاهای توپولوژی؛ به نام نگاشت‌های به طور قوی $\theta_{cl}$ - پیوسته، مورد بررسی قرار می‌گیرد. با بررسی ویژگی‌های اساسی نگاشت‌های به طور قوی $\theta_{cl}$ - پیوسته، مشاهده می‌شود که این خواص، مشابه خواص نگاشت‌های پیوسته هستند. حلقه‌ی شامل تمام نگاشت‌های حقیقی - مقدار به طور قوی $\theta_{cl}$ - پیوسته روی فضای توپولوژی $X$ را با $S_{cl}(X)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که اگر برد یک نگاشت به طور قوی $\theta_{cl}$ - پیوسته $f$ یک $T_1$ - فضا باشد، آن‌گاه $f$ روی شبه مؤلفه‌های همبندی دامنه‌ی خود ثابت است. با استفاده از این موضوع، ثابت می‌کنیم که برای هر فضای توپولوژی $X$ ، فضای فراهاسدورف $Y$ وجود دارد که $S_{cl}(X) \cong C(Y)$ . رفتار این نگاشت‌ها در ارتباط با اصول موضوع تفکیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نشان می‌دهیم که اگر $f$ یک نگاشت به طور قوی $\theta_{cl}$ - پیوسته از فضای توپولوژی $X$ به $T_0$ - فضای $Y$ باشد، آن‌گاه $X$ فراهاسدورف است. خواص توپولوژیکی نگاره‌ی مستقیم و نگاره‌ی وارون فضاهایی با ویژگی‌های توپولوژیکی معین، تحت نگاشت‌های به طور قوی $\theta_{cl}$ - پیوسته بررسی می‌شود. از جمله ثابت می‌شود که نگاره‌ی مستقیم هر فضای $cl$ - بستار فشرده تحت یک نگاشت به طور قوی $\theta_{cl}$ - پیوسته، فشرده است. در پایان، ویژگی‌های نمودارهای این نگاشت‌ها بیان می‌شود. ثابت می‌شود که برای هر فضای فشرده و هاسدورف مانند $Y$ ، به طور قوی $\theta_{cl}$ - پیوستگی نگاشت $f: X \rightarrow Y$ با $\theta_{cl}$ - بسته بودن نمودار آن نسبت به $X$ معادل است.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۷/۴ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲	
واژه‌های کلیدی: مجموعه‌ی $\theta_{cl}$ - باز، مجموعه‌ی $\theta_{cl}$ - بسته، $\theta_{cl}$ - فضا، فضای $cl$ - بستار فشرده، نمودار $\theta_{cl}$ - بسته.	

استناد: اعتبار، معصومه (۱۴۰۲). نگاشت‌های به طور قوی  $\theta_{cl}$  - پیوسته. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۲)، ۱۰۷ - ۱۲۴.



## مقدمه

هدف این مقاله بررسی خواص نوعی قوی از نگاشت های پیوسته به نام نگاشت های به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته و همچنین مطالعه حلقه های نگاشت های به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته حقیقی مقدار روی یک فضای توپولوژی است که برای اولین بار در [۴] معرفی شده است. کلاس نگاشت های به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته شامل کلاس نگاشت های  $cl$ -بالا پیوسته (نگاشت های بستباز پیوسته) است که توسط ریلی و وامانامورتی در [۹] معرفی شد و خواص این نگاشت ها توسط سینک در [۱۰] مورد بررسی قرار گرفت و سپس افروز و همکارانش حلقه های نگاشت های بستباز پیوسته حقیقی مقدار روی یک فضای توپولوژی را در [۱۱] بررسی نمودند. هر دوی این کلاس ها مشمول کلاس نگاشت های به طور قوی  $\theta$ -پیوسته و کلاس نگاشت های  $R_{cl}$ -بالا پیوسته می باشند که توسط نویری، تیاگی و همکاران در [۱۳، ۸] معرفی و مطالعه شدند. مجموعه  $A$  در فضای توپولوژی  $X$  را  $cl$ -باز گوئیم، هر گاه  $A$  به صورت اجتماعی از مجموعه های بستباز باشد. متمم یک مجموعه  $cl$ -باز را  $cl$ -بسته گوئیم. برای مجموعه  $A$  در فضای توپولوژی  $X$ ،  $cl$ -بستار  $A$  مجموعه ای شامل تمام نقاط  $x \in X$  است که هر مجموعه بستباز شامل  $x$ ،  $A$  را قطع می کند و این مجموعه به صورت  $[A]_{cl}$  در [۱۰] (  $cl_s A$  در [۱۱] ) نمایش داده می شود. بنابراین مجموعه  $A$ ،  $cl$ -بسته است اگر و تنها اگر  $A = cl_s A$ . مجموعه  $U$  در فضای توپولوژی  $X$  را  $r_{cl}$ -باز گوئیم، اگر  $U$  به صورت اجتماعی از مجموعه های  $cl$ -بسته باشد. فضای توپولوژی  $X$  یک- $R_{cl}$  فضا نامیده می شود، اگر هر مجموعه  $cl$ -باز در آن  $r_{cl}$ -باز باشد. برای  $A \subseteq X$ ، مجموعه ای شامل تمام نقاط  $x \in A$  که  $A$  شامل یک همسایگی بسته ای شامل  $x$  است را با  $\text{int}_\theta A$  نمایش می دهیم. [۱۴]. گفته می شود مجموعه  $B$ ،  $\theta$ -باز است، اگر  $B = \text{int}_\theta B$ . متمم یک مجموعه  $\theta$ -باز را  $\theta$ -بسته نامیم. مجموعه ای شامل تمام نقاط  $x \in X$  که هر همسایگی بسته ای شامل  $x$ ،  $A$  را قطع می کند،  $\theta$ -بستار  $A$  نامیده می شود و با  $cl_\theta A$  نشان داده می شود. تابع  $f: X \rightarrow Y$  را  $cl$ -بالا پیوسته ( $R_{cl}$ -بالا پیوسته، به طور قوی  $\theta$ -پیوسته) گوئیم، هر گاه برای هر مجموعه  $V$  در  $Y$ ،  $f^{-1}(V)$  در  $X$ ،  $cl$ -باز ( $r_{cl}$ -باز،  $\theta$ -باز) باشد.

۱. نگاشت های به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته

در این بخش پس از مشخصه سازی نگاشت های به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته، به بررسی ارتباط میان حلقه های نگاشت های حقیقی - مقدار به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته روی فضای توپولوژی  $X$  با حلقه  $C(X)$  می پردازیم. در ادامه ویژگی های اساسی نگاشت های به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرد. ابتدا به بیان مفاهیم زیر می پردازیم که برگرفته از مرجع [۴] می باشند.

گوئیم نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  در  $f: X \rightarrow Y$  در  $X$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است، اگر برای هر مجموعه  $V$  در  $Y$  شامل  $f(x)$ ، مجموعه  $U$  در  $X$  شامل  $x$  موجود باشد که  $f^{-1}(V) \subseteq U$ ،  $f$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است، اگر در هر  $x \in X$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد. بدیهی است که هر نگاشت به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته،

به‌طور قوی  $\theta$ -پیوسته است، اما عکس این گزاره لزوماً برقرار نیست. به عنوان مثال، نگاشت همانی روی  $\mathbb{R}$  به‌طور قوی  $\theta$ -پیوسته است، اما به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته نمی‌باشد.

برای مجموعه‌ی  $A$  در فضای توپولوژی  $X$ ، مجموعه‌ی شامل تمام نقاط  $x \in X$  که هر همسایگی  $cl$  بسته‌ی شامل  $x$ ، با  $A$  اشتراک ناتهی دارد را  $\theta_{cl}$ -بستار  $A$  گوئیم و با  $cl_{\theta_{cl}} A$  نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی  $H$  در فضای توپولوژی  $X$  را  $\theta_{cl}$  بسته گوئیم، اگر  $H = cl_{\theta_{cl}} H$ . مجموعه‌ی شامل تمام نقاط  $x \in A$  که  $A$  شامل یک همسایگی  $cl$ -بسته‌ی شامل  $x$  باشد را  $\theta_{cl}$ -درون  $A$  نامیم و با  $int_{\theta_{cl}} A$  نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی  $G$  را  $\theta_{cl}$ -باز گوئیم، اگر  $G = int_{\theta_{cl}} G$ . بدیهی است که هر مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز ( $\theta_{cl}$ -بسته) یک مجموعه‌ی باز (بسته) است. افزون بر آن، متمم یک مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز ( $\theta_{cl}$ -بسته) یک مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -بسته ( $\theta_{cl}$ -باز) می‌باشد. خانواده‌ی شامل تمام مجموعه‌های  $\theta_{cl}$ -باز در فضای  $(X, \tau)$  یک توپولوژی روی  $X$  تشکیل می‌دهد که با  $\tau_{\theta_{cl}}$  نشان داده می‌شود. فضای  $(X, \tau_{\theta_{cl}})$  را با  $X_{\theta_{cl}}$  نشان می‌دهیم.

قضیه‌ی زیر نگاشت‌های به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته را توصیف می‌کند. به دلیل سادگی، از ذکر اثبات آن صرف‌نظر می‌شود.

**قضیه ۱:** گزاره‌های زیر برای نگاشت  $f : X \rightarrow Y$  معادلند.

(۱)  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

(۲) نگاره‌ی وارون هر مجموعه‌ی بسته در  $Y$  تحت  $f$ ،  $\theta_{cl}$ -بسته است.

(۳) نگاره‌ی وارون هر مجموعه‌ی باز در  $Y$  تحت  $f$ ،  $\theta_{cl}$ -باز است.

(۴) نگاره‌ی وارون هر عضو زیرپایه‌ی  $Y$  تحت  $f$ ،  $\theta_{cl}$ -باز است.

(۵) برای هر  $x \in X$  و هر مجموعه‌ی بسته مانند  $F$  در  $Y$  که  $f(x) \notin F$ ، مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز  $U$  در  $X$  شامل  $x$  وجود دارد که  $f(U) \cap F = \emptyset$ .

از قضیه‌ی قبل، گزاره‌ی زیر نتیجه می‌شود.

**نتیجه ۱:** گزاره‌های زیر برای نگاشت  $f : X \rightarrow Y$  معادلند.

(۱)  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

(۲) برای هر  $A \subseteq X$ ،  $f(cl_{\theta_{cl}} A) \subseteq cl f(A)$ .

(۳) برای هر  $B \subseteq Y$ ،  $cl_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl B)$ .

$$(۴) \text{ برای هر } B \subseteq Y, f^{-1}(\text{int } B) \subseteq \text{int}_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B))$$

با استفاده از قضیه ۱ و از آن جا که یک مجموعه در  $X, \theta_{cl}$  - باز است اگر و تنها اگر در  $X_{\theta_{cl}}$  باز باشد، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

**نتیجه ۲:** نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است اگر و تنها اگر  $f: X_{\theta_{cl}} \rightarrow Y$  پیوسته باشد.

مشابه  $R_{cl}$  - فضاها،  $\theta_{cl}$  - فضاها به صورت زیر معرفی می‌شوند.

فضای  $X$  را یک  $\theta_{cl}$  - فضا گوئیم، اگر هر مجموعه‌ی باز در آن  $\theta_{cl}$  - باز باشد [۴]. بدیهی است که  $\theta_{cl}$  - بودن یک فضا یک ویژگی توپولوژیکی است و هر  $\theta_{cl}$  - فضا یک  $R_{cl}$  - فضا است، اما عکس این گزاره لزوماً درست نیست. مثال زیر (مثال ۱۱۳ در [۱۲]) گویای این مطلب است.

**مثال ۱:** فرض کنیم  $M$  خانواده‌ی شامل تمام فرآپالایه‌های روی  $\mathbb{Z}^+$  باشد که اصلی نیستند. گیریم  $X = \mathbb{Z}^+ \cup M$  با توپولوژی فرآپالایه‌ای قوی باشد. در این صورت بنا به مثال ۲، ۳ در [۱۳]،  $X$  یک  $R_{cl}$  - فضا است. این فضا یک  $\theta_{cl}$  - فضا نمی‌باشد؛ زیرا، اگر  $A \in F, F \in M$  و  $U = A \cup \{F\}$ ، آن‌گاه  $U$  مجموعه‌ی بازی است که  $\theta_{cl}$  - باز نیست. در واقع، اگر  $U, \theta_{cl}$  - باز باشد، آن‌گاه  $B \in F$  و مجموعه‌ی  $cl$  - بسته‌ی  $C_F$  در  $X$  وجود دارند که  $B \cup \{F\} \subseteq C_F \subseteq U$  و در نتیجه  $cl(B \cup \{F\}) \subseteq U$  که تناقض است؛ زیرا بنا به بند ۳ مثال ۱۱۳ در [۱۲]،  $cl(B \cup \{F\})$  شامل تمام فرآپالایه‌های آزادی در  $\mathbb{Z}^+$  است که شامل  $B$  هستند و این مجموعه نمی‌تواند مشمول  $U$  باشد. بنابراین  $X$  یک  $\theta_{cl}$  - فضا نیست.

**گزاره ۱:** فرض کنیم  $(X, \tau)$  یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت  $(X, \tau)$  یک  $\theta_{cl}$  - فضا است اگر و تنها اگر هر نگاشت پیوسته از  $(X, \tau)$  به هر فضای  $(Y, \sigma)$  به طور قوی  $\theta_{cl}$  - پیوسته باشد.

**اثبات:**  $\Leftarrow$  بدیهی است.

$\Rightarrow$  گیریم  $(Y, \sigma) = (X, \tau)$ . در این صورت نگاشت همانی  $i$  روی  $X$  پیوسته و در نتیجه به طور قوی  $\theta_{cl}$  - پیوسته است. پس بنا به قضیه ۱، برای هر  $U \in \tau, i^{-1}(U) = U$ ، یک مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$  - باز در  $X$  می‌باشد که نتیجه می‌دهد  $X$  یک  $\theta_{cl}$  - فضا است.

مجموعه‌ی شامل تمام نگاشت‌های حقیقی - مقدار به طور قوی  $\theta_{cl}$  - پیوسته روی فضای  $X$  را با  $S_{cl}(X)$  نشان می‌دهیم. با استفاده از قضیه ۱ می‌توان مشاهده نمود که  $S_{cl}(X)$  با اعمال جمع و ضرب معمولی یک زیرحلقه و زیرمشبکه‌ی  $C(X)$  می‌باشد که  $C(X)$  حلقه‌ی تمام نگاشت‌های حقیقی مقدار پیوسته روی  $X$  است.

برای هر  $f \in C(X)$ ، صفر-مجموعه‌ی  $f$ ؛ که با  $Z(f)$  نشان داده می‌شود، مجموعه‌ی شامل تمام نقاطی مانند  $x \in X$  است که  $f(x) = 0$ . مجموعه‌ی شامل تمام صفر-مجموعه‌های  $X$  را با  $Z(X)$  نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی  $X \setminus Z(f)$  را متمم صفر-مجموعه‌ی  $f$  نامیم و با  $\text{coz}(f)$  نشان می‌دهیم. بنا به قضیه ۲،۳ در [۵]، فضای توپولوژی  $X$  کاملاً منظم است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی  $Z(X)$  پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در  $X$  باشد اگر و تنها اگر مجموعه‌ی شامل تمام متمم صفر-مجموعه‌های  $X$  پایه‌ای برای مجموعه‌های باز در  $X$  باشد. قضیه‌ی زیر ارتباط میان  $C(X)$  و  $S_{cl}(X)$  را بیان می‌کند.

**قضیه ۲:** اگر  $X$  یک  $\theta_{cl}$ -فضا باشد، آن‌گاه  $C(X) = S_{cl}(X)$  و اگر  $X$  کاملاً منظم باشد، عکس آن نیز برقرار است.

**اثبات:** اگر  $X$  یک  $\theta_{cl}$ -فضا باشد، آن‌گاه بنا به گزاره ۱،  $C(X) = S_{cl}(X)$ . برعکس، فرض کنیم  $X$  کاملاً منظم باشد و  $C(X) = S_{cl}(X)$ . همچنین فرض کنیم  $f \in C(X)$  و  $x \in \text{coz}(f)$ . بنابراین  $f(x) \neq 0$  و چون  $f \in S_{cl}(X)$ ، پس مجموعه‌ی باز  $U$  شامل  $x$  در  $X$  وجود دارد که برای هر  $y \in cl_s U$ ،  $f(y) \neq 0$  و در نتیجه  $cl_s U \subseteq \text{coz}(f)$ . پس  $\text{coz}(f)$  یک مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز است و از آن‌جا که هر مجموعه‌ی باز در  $X$  به صورت اجتماعی از متمم صفر-مجموعه‌هاست، پس هر مجموعه‌ی باز،  $\theta_{cl}$ -باز خواهد بود. بنابراین  $X$  یک  $\theta_{cl}$ -فضاست.

حال به بررسی ویژگی‌های اساسی نگاشت‌های به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته می‌پردازیم و مشاهده خواهیم کرد که مشابه ویژگی‌های شناخته شده در مورد پیوستگی هستند. حال لم زیر را بیان می‌کنیم که به‌طور مستقیم از نتیجه ۲ حاصل می‌شود.

**لم ۱:** اگر  $f: X \rightarrow Y$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته و  $g: Y \rightarrow Z$  پیوسته باشد، آن‌گاه  $g \circ f: X \rightarrow Z$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

مشابه نگاشت باز، نگاشت  $\theta_{cl}$ -باز را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۱:** نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  را  $\theta_{cl}$ -باز گوئیم، اگر تصویر هر مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز در  $X$ ، یک مجموعه‌ی باز در  $Y$  باشد. نگاشت  $\theta_{cl}$ -بسته نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

بدیهی است که هر نگاشت  $\theta_{cl}$ -باز روی فضای توپولوژی  $X$ ، روی  $X_{\theta_{cl}}$  باز است.

**گزاره ۲:** فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت  $\theta_{cl}$ -باز، به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته و پوشا باشد. همچنین فرض کنیم  $g: Y \rightarrow Z$  یک نگاشت باشد. در این صورت  $g \circ f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است اگر و تنها اگر  $g$  پیوسته باشد. افزون بر آن، اگر علاوه بر شروط فوق، نگاره‌ی هر مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز در  $X$  تحت نگاشت  $f$ ،  $\theta_{cl}$ -باز باشد، آن‌گاه  $g$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.



**اثبات:** شرط لازم با استفاده از خواص پیوستگی و از آنجا که بنا به نتیجه ۲،  $gof$  روی  $X_{\theta_{cl}}$  پیوسته و  $f$  روی  $X_{\theta_{cl}}$  پیوسته و باز است، به سادگی اثبات می شود. شرط کافی، نتیجه مستقیم لم ۱ می باشد. برای اثبات گزاره ی دوم، فرض کنیم  $W$  مجموعه ی باز ی در  $Z$  باشد. از آنجا که  $gof$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است،  $(gof)^{-1}(W)$ ، در  $X_{\theta_{cl}}$  باز است و چون  $f$  پوشاست،  $f((gof)^{-1}(W)) = f(f^{-1}(g^{-1}(W))) = g^{-1}(W)$  که بنا به فرض، در  $Y_{\theta_{cl}}$  باز است. پس بنا به قضیه ۱،  $g$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

مشابه پیوستگی، اگر  $f: X \rightarrow Y$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد و  $A \subseteq X$ ، آن گاه نگاشت تحدید  $f|_A: A \rightarrow Y$  نیز به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است. برای بیان عکس این گزاره به مفهوم  $\theta_{cl}$ -نشاندگی نیاز داریم. گفته می شود که مجموعه ی  $S$  در فضای توپولوژی  $X_{\theta_{cl}}$ ،  $\theta_{cl}$ -نشاندگی است، اگر هر مجموعه ی  $\theta_{cl}$ -باز  $(\theta_{cl}$ -بسته) در  $S$  به صورت اشتراک  $S$  با یک مجموعه ی  $\theta_{cl}$ -باز  $(\theta_{cl}$ -بسته) در  $X$  باشد.

**گزاره ۳:** گزاره های زیر برای نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  برقرارند.

(۱) فرض کنیم خانواده ی  $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$  پوششی از مجموعه های  $\theta_{cl}$ -باز برای  $X$  باشد که هر  $U_\alpha$  در  $X_{\theta_{cl}}$  یک  $\theta_{cl}$ -نشاندگی است. اگر برای هر  $\alpha \in \Lambda$ ، نگاشت  $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد، آن گاه  $f$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

(۲) فرض کنیم  $\{F_i \mid 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$  پوششی از مجموعه های  $\theta_{cl}$ -بسته برای  $X$  باشد که هر  $F_i$  در  $X_{\theta_{cl}}$  یک  $\theta_{cl}$ -نشاندگی است. اگر برای هر  $1 \leq i \leq n$ ،  $f|_{F_i}$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد، آن گاه  $f$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

**اثبات:** (۱) فرض کنیم  $V \subseteq Y$  باز باشد. چون هر  $f_\alpha$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است، پس بنا به قضیه ۱، هر  $f_\alpha^{-1}(V)$  یک مجموعه ی  $\theta_{cl}$ -باز در  $U_\alpha$  است و از آنجا که  $U_\alpha$  یک مجموعه ی  $\theta_{cl}$ -باز و  $\theta_{cl}$ -نشاندگی در  $X$  است، پس  $f_\alpha^{-1}(V)$  در  $X_{\theta_{cl}}$  باز خواهد بود. حال  $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha^{-1}(V)$  به صورت اجتماعی از مجموعه های  $\theta_{cl}$ -باز در  $X$  است و در نتیجه  $f^{-1}(V)$  در  $X_{\theta_{cl}}$  باز و بنا به قضیه ۱،  $f$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته می باشد.

(۲) اثبات مشابه قسمت (۱) است.

در ادامه شرایطی را بیان می کنیم که در آن، قضایای مربوط به حاصلضرب نگاشت های به طور قوی  $\theta$ -پیوسته در [۷] برای نگاشت های به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته نیز برقرار باشد.

**قضیه ۳:** فرض کنیم  $\{f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$  خانواده ای از نگاشت ها باشد و نگاشت

$$f: \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$$

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f((x_\alpha)) = (f_\alpha(x_\alpha))$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) اگر هر  $f_\alpha$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد، آن‌گاه  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

(۲) اگر  $f$  پیوسته و هر  $X_\alpha$  یک  $\theta_{cl}$ -فضا باشد، آن‌گاه هر  $f_\alpha$ ، به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

**اثبات:** (۱) فرض کنیم هر  $f_\alpha$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته و  $V$  یک عضو زیرپایه برای  $\prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$  باشد. در این صورت  $\beta \in \Lambda$  و مجموعه‌ی باز  $V_\beta$  در  $Y_\beta$  وجود دارند که  $V = V_\beta \times \prod_{\alpha \neq \beta} Y_\alpha$ . چون  $f_\beta$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است، بنا به قضیه ۱،  $f_\beta^{-1}(V_\beta)$  در  $X_\beta$ ،  $\theta_{cl}$ -باز خواهد بود. داریم  $f^{-1}(V) = f_\beta^{-1}(V_\beta) \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$ . بنابراین  $f^{-1}(V)$  یک مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز در  $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  می‌باشد و در نتیجه بنا به قضیه ۱،  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

(۲) از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

**نکته ۱:** بنا به قضیه ۲ در [۲]، اگر  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژی باشند که حداقل یکی از آنها فشرده است و  $C$  مجموعه‌ی بستبازی در  $X \times Y$  شامل  $(x, y)$  باشد، آن‌گاه مجموعه‌های بستباز  $U$  در  $X$  و  $V$  در  $Y$  وجود دارند که  $(x, y) \in U \times V \subseteq C$ .

حال به بیان قضیه‌ی زیر می‌پردازیم.

**قضیه ۴:** فرض کنیم  $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$  و  $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$  دو نگاشت باشند و نگاشت

$$f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$$

را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(X_1, X_2) = (f_1(X_1), f_2(X_2))$$

اگر حداقل یکی از فضاهای  $X_1$  و  $X_2$  فشرده و  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد، آن‌گاه  $f_1$  و  $f_2$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته هستند.

**اثبات:** برای اثبات، کفایت نشان دهیم که برای  $A \subseteq X_1$  و  $A_1 \subseteq X_2$ ، مجموعه  $A_1 \times A_2$  در  $X_1 \times X_2$ ،  $\theta_{cl}$ - باز است اگر و تنها اگر  $A_1$  و  $A_2$  به ترتیب در  $X_1$  و  $X_2$ ،  $\theta_{cl}$ - باز باشند. برای این منظور، فرض کنیم  $A_1$  در  $X_1$  و  $A_2$  در  $X_2$  هر دو  $\theta_{cl}$ - باز باشند. در این صورت  $A_1 \times A_2$  و  $X_1 \times X_2$  هر دو در  $\theta_{cl}$ - باز هستند. در نتیجه  $A_1 \times A_2$  که به صورت اشتراک دو مجموعه  $\theta_{cl}$ - باز است، در  $X_1 \times X_2$ ،  $\theta_{cl}$ - باز خواهد بود. حال فرض کنیم  $A_1 \times A_2$  در  $X_1 \times X_2$ ،  $\theta_{cl}$ - باز باشد. حال نشان می‌دهیم که برای هر  $U \subseteq X_1$  و  $V \subseteq X_2$ ،  $cl_s(U \times V) = cl_s U \times cl_s V$ . برای این منظور، فرض می‌کنیم که  $(x, y) \in cl_s(U \times V)$  و  $W$  مجموعه بستبازی شامل  $x$  در  $X$  باشد. در این صورت  $W \times Y$  مجموعه بستبازی شامل  $(x, y)$  در  $X_1 \times X_2$  خواهد بود و در نتیجه  $(W \times Y) \cap (U \times V) \neq \emptyset$  بنابراین  $W \cap U \neq \emptyset$  که نتیجه می‌شود.  $x \in cl_s U$  به صورت مشابه می‌توان ثابت کرد که  $y \in cl_s V$ . حال فرض کنیم  $(x, y) \in cl_s U \times cl_s V$  و  $C$  مجموعه بستبازی شامل  $(x, y)$  در  $X_1 \times X_2$  باشد. بنا به نکته ۱، مجموعه های بستباز  $W_1$  و  $W_2$  به ترتیب شامل  $x$  در  $X_1$  و  $y$  در  $X_2$  وجود دارند که  $(x, y) \in W_1 \times W_2 \subseteq C$ . چون  $x \in cl_s U$  و  $y \in cl_s V$  پس  $W_1 \cap U \neq \emptyset$  و  $W_2 \cap V \neq \emptyset$  و در نتیجه  $C \cap (U \times V) \neq \emptyset$  پس  $(x, y) \in cl_s(U \times V)$  که نشان می‌دهد  $cl_s(U \times V) = cl_s U \times cl_s V$ . با استفاده از این مطلب، نتیجه می‌گیریم که  $A_1$  و  $A_2$  به ترتیب در  $X_1$  و  $X_2$ ،  $\theta_{cl}$ - باز هستند.

**قضیه ۵:** فرض کنیم  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  خانواده‌ای از فضاهاى توپولوژى باشد و  $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ . نگاشت  $f: Y \rightarrow X$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر  $\alpha \in \Lambda$ ،  $\pi_\alpha \circ f$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد.

**اثبات:** با استفاده از نتیجه ۲ و همچنین خواص پیوستگی به آسانی قابل اثبات است.

حال نتیجه‌ی زیر را می‌توان به آسانی از قضیه‌ی فوق نتیجه گرفت.

**نتیجه ۳:** فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت باشد و نگاشت

$$g: X \rightarrow X \times Y$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = (x, f(x))$$

در این صورت  $g$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است اگر و تنها اگر  $f$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته و  $X$  یک  $\theta_{cl}$ -فضا باشد.

نگاشت  $g$  معرفی شده در نتیجه ۳ را نگاشت نموداری نگاشت  $f$  می‌نامیم.

نکته ۲: فرض  $\theta_{cl}$  - فضا بودن در نتیجه ۳ لازم است. به عنوان مثال، فرض کنیم  $X = Y = \{a, b, c\}$ ،  $\tau_X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$  و  $\tau_Y = \{\emptyset, \{c\}, Y\}$ . در این صورت نگاشت  $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  با ضابطه‌ی  $f(x) = c$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است، اما نگاشت نموداری آن به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته نمی‌باشد.

## ۲. حلقه‌ی $S_{cl}(X)$

در این بخش، ابتدا رفتار نگاشت‌های به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته را روی شبه مؤلفه‌های همبندی بررسی کرده و سپس با استفاده از آن نشان می‌دهیم که حلقه‌ی  $S_{cl}(X)$  با یک  $C(Y)$  یکرخت است. حال به بیان تعاریف و مفاهیم لازم می‌پردازیم. مؤلفه‌ی همبندی نقطه‌ی  $x$  در فضای توپولوژی  $X$  زیرمجموعه‌ی همبند ماکسیمال  $C_x$  شامل  $x$  در  $X$  تعریف می‌شود. اشتراک تمام مجموعه‌های بستباز در  $X$  شامل  $x$  را شبه‌مؤلفه‌ی همبندی  $x$  در  $X$  گوئیم و با  $Q_x$  نشان می‌دهیم. بدیهی است که  $C_x \subseteq Q_x$  و ممکن است تساوی برقرار نباشد، مثال ۶، ۱، ۲۴ در [۳] را ببینید. یک فضای توپولوژی را کاملاً ناهمبند گوئیم، اگر تنها مؤلفه‌های همبندی ناتهی آن، مجموعه‌های تک عضوی باشند. بر اساس [۶]، فضای توپولوژی  $X$  به‌طور ضعیف همبند موضعی خوانده می‌شود، اگر هر مؤلفه‌ی همبندی در  $X$  باز باشد.

قضیه ۶: گزاره‌های زیر برای نگاشت به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته‌ی  $f: X \rightarrow Y$  برقرارند.

$$(۱) \text{ برای هر } x \in X, f[Q_x] \subseteq Q_{f(x)}$$

$$(۲) \text{ اگر } Y \text{ یک } T_1\text{-فضا باشد، آن‌گاه برای هر } x \in X, f[Q_x] = \{f(x)\}$$

$$(۳) \text{ اگر } f \text{ یک به یک و } Y \text{ یک } T_1\text{-فضا باشد، آن‌گاه } X \text{ کاملاً ناهمبند است.}$$

اثبات: (۱) فرض کنیم  $x \in X$ ،  $z \in Q_x$  و  $f(z) \notin Q_{f(x)}$ . در این صورت مجموعه‌ی بستباز  $V$  شامل  $f(x)$  وجود دارد به طوری که  $f(z) \notin V$ . از آن‌جا که  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است، پس مجموعه‌ی باز  $U$  شامل  $x$  وجود دارد به طوری که  $f(cl_s U) \subseteq V$ . به این ترتیب با توجه به این که  $Q_x \subseteq cl_s U$  داریم  $f[Q_x] \subseteq f[cl_s U] \subseteq V$  که این یک تناقض است.

(۲) فرض کنیم  $y \in Q_x$  و  $f(x) \neq f(y)$ . در این صورت مجموعه‌ی باز  $V$  در  $Y$  وجود دارد که  $f(x) \in V$  و  $f(y) \notin V$ . از آن‌جا که  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است، مجموعه‌ی باز  $U$  شامل  $x$  در  $X$  وجود دارد که  $f[cl_s U] \subseteq V$  و در نتیجه  $f(y) \in V$  که تناقض است.

(۳) با استفاده از بند (۲)، اگر  $f$  یک به یک باشد، آن‌گاه برای هر  $x \in X$ ،  $Q_x = \{x\}$  و در نتیجه برای هر  $x \in X$ ،  $C_x = \{x\}$ ، کاملاً ناهمبند است.

**نتیجه ۴:** فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته و  $Y$  یک  $T_1$ -فضا باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱)  $f$  روی هر شبه‌مؤلفه‌ی همبندی در  $X$  ثابت است.

(۲) اگر  $X$  همبند باشد، آن‌گاه  $f$  روی  $X$  ثابت است.

**نتیجه ۵:** فرض کنیم  $X$  یک فضای توپولوژی باشد و  $f \in S_{cl}(X)$ . در این صورت برای هر  $x \in X$ ،

$$f[Q_x] = \{f(x)\}$$

حال به بیان نتیجه‌ی اصلی این بخش می‌پردازیم. قبل از آن مفهوم فضاهای فراهاسدورف را یادآوری می‌کنیم. فضای توپولوژی  $X$  را فراهاسدورف گوییم، هرگاه برای هر دو نقطه‌ی متمایز  $x, y \in X$  مجموعه‌ی بستباز  $U$  در  $X$  موجود باشد که  $x \in U$  و  $y \notin U$  [۱۱].

**قضیه ۷:** برای هر فضای توپولوژی  $X$ ، فضای فراهاسدورف  $Y$  وجود دارد که  $S_{cl}(X) \cong C(Y)$ .

**اثبات:** قرار می‌دهیم  $Y = \{Q_x \mid x \in X\}$  و توپولوژی  $\tau$  روی  $Y$  را گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌هایی مانند  $G$  در  $Y$  اختیار می‌کنیم که  $\bigcup_{Q_x \in G} Q_x$  یک مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز در  $X$  باشد. حال نشان می‌دهیم که  $(Y, \tau)$  یک فضای فراهاسدورف است. برای این منظور، فرض کنیم  $Q_x$  و  $Q_y$  در نقطه‌ی متمایز در  $Y$  باشند. در این صورت  $x \notin Q_y$  و در نتیجه مجموعه‌ی بستباز  $U$  در  $X$  وجود دارد که  $x \in U$  و  $y \notin U$ . حال قرار می‌دهیم  $G = \{Q_z : z \in U\}$ . در این صورت  $U = \bigcup_{Q_z \in G} Q_z$  در  $X$  بستباز و در نتیجه  $\theta_{cl}$ -باز و بسته است و در نتیجه  $G$  مجموعه‌ی بستبازی در  $Y$  است که  $Q_x \in G$  و  $Q_y \notin G$ . بنابراین  $Y$  فراهاسدورف خواهد بود.

حال ثابت می‌کنیم که حلقه‌های  $S_{cl}(X)$  و  $C(Y)$  یکرخت هستند. نگاشت  $\sigma: S_{cl}(X) \rightarrow C(Y)$  را به صورت  $\sigma(f) = f_c$  برای هر  $f \in S_{cl}(X)$  تعریف می‌کنیم که در آن  $f_c: Y \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت  $f_c(Q_x) = f(x)$  تعریف می‌شود. بنا به نتیجه ۵،  $f_c$  و  $\sigma$  خوش‌تعریف هستند. ابتدا نشان می‌دهیم که  $f_c \in C(Y)$ . برای این منظور، فرض کنیم  $Q_x \in Y$  و  $f_c(Q_x) = f(x) = r$ . از آن‌جا که  $f \in S_{cl}(X)$ ، برای هر  $\varepsilon > 0$  مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز  $U$  شامل  $x$  در  $X$  وجود دارد که  $f(U) \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ . حال قرار می‌دهیم  $G = \{Q_z : Q_z \subseteq U\}$ . چون  $U$  یک مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز در  $X$  است، پس برای هر  $y \in U$ ، مجموعه‌ی  $V$  در  $X$  وجود دارد که  $y \in V \subseteq cl_s V \subseteq U$  و از آن‌جا که  $cl_s V$  یک مجموعه‌ی  $cl$ -بسته‌ی شامل  $y$  و  $Q_y$  کوچکترین مجموعه‌ی  $cl$ -بسته‌ی شامل  $y$  است، پس  $Q_y \subseteq cl_s V$  و در نتیجه  $Q_y \in G$ . پس  $U = \bigcup_{Q_z \in G} Q_z$ . بنابراین  $G$  مجموعه‌ی بستبازی در  $Y$  شامل  $Q_x$  است که  $f_c(G) \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$  و در نتیجه  $f_c$  پیوسته می‌باشد. بدیهی است که  $\sigma$  یک هم‌ریختی

یک به یک است. برای اثبات پوشا بودن  $\sigma$ ، فرض کنیم  $f \in C(Y)$  و نگاشت  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $g(x) = f(Q_x)$  تعریف می‌کنیم. به آسانی می‌توان دید که  $g \in S_{cl}(X)$  و  $\sigma(g) = f$ .

یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژی  $X$  صفر-بعدی نامیده می‌شود، اگر هاسدورف باشد و دارای پایه‌ای شامل مجموعه‌های بستباز باشد.

**نتیجه ۶:** اگر  $X$  یک فضای فشرده باشد، آنگاه فضای صفر-بعدی  $Z$  وجود دارد که  $S_{cl}(X) \cong C(Z)$ .

**اثبات:** قرار می‌دهیم  $Z = Y$  که همان فضای توپولوژی معرفی شده در قضیه ۷ است. بنا به قضیه ۷،  $Z$  فراهاسدورف و در نتیجه هاسدورف است. حال فرض کنیم  $F$  یک مجموعه‌ی بسته در  $Y$  باشد و  $Q_x \notin F$ . برای هر  $z \in X$  که  $Q_z \in F$  و از آنجا که  $Q_z \neq Q_x$  و  $Q_z \in V_z$  در  $Z$  بستباز وجود دارد که  $Q_x \notin V_z$  و  $Q_z \in V_z$ . حال قرار می‌دهیم  $A = \bigcup_{Q_z \in F} Q_z$  و  $G_z = \bigcup_{Q_y \in V_z} Q_y$ . چون  $A$  فشرده است،  $n \in \mathbb{N}$  و  $z_1, \dots, z_n \in A$  وجود دارند که  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{z_i}$ . حال قرار می‌دهیم  $G = \bigcup_{i=1}^n G_{z_i}$ . در این صورت  $G$  مجموعه‌ی بستبازی در  $X$  است که  $A \subseteq G$  و  $x \notin G$ . حال قرار می‌دهیم  $H = \{Q_z : Q_z \subseteq G\}$ . در این صورت  $H$  مجموعه‌ی بستبازی در  $Z$  است که  $F \subseteq H$  و  $Q_x \notin H$  و در نتیجه  $Z$  صفر-بعدی است.

**نتیجه ۷:** اگر  $X$  یک فضای به‌طور ضعیف همبند موضعی باشد، آنگاه فضای گسسته‌ی  $Z$  وجود دارد که  $S_{cl}(X) \cong C(Z)$ .

**اثبات:** قرار می‌دهیم  $Z = Y$  که همان فضای توپولوژی معرفی شده در قضیه ۷ است. چون  $X$  به‌طور ضعیف همبند موضعی است، برای هر  $x \in X$  داریم  $C_x = Q_x$  و در نتیجه  $Q_x$  یک مجموعه‌ی بستباز در  $X$  می‌باشد. بنابراین  $Q_x$  در  $X$ ،  $\theta_{cl}$ -باز و در نتیجه  $\{Q_x\}$  در  $Z$  باز می‌باشد که نشان می‌دهد  $Z$  گسسته است.

### ۳. ویژگی‌های توپولوژیکی و نگاشت‌های به‌طور قوی $\theta_{cl}$ -پیوسته

در این بخش ارتباط میان ویژگی‌های توپولوژیکی و نگاشت‌های به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

**گزاره ۴:** فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت دوسویی، باز و به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد. در این صورت  $X$  و  $Y$  دو  $\theta_{cl}$ -فضای همسانریخت هستند.

**اثبات:** آسان است.

**گزاره ۵:** فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت پیوسته باشد. اگر  $Y$  یک  $\theta_{cl}$ -فضا باشد، آنگاه  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

**اثبات:** فرض کنیم  $x \in X$  و  $V$  مجموعه‌ی بازی در  $Y$  شامل  $f(x)$  باشد. از آنجا که  $Y$  یک  $\theta_{cl}$ -فضاست، مجموعه‌ی باز  $W$  در  $Y$  وجود دارد که  $f(x) \in W \subseteq cl_s W \subseteq V$ . به راحتی ثابت می‌شود اگر  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد، آن گاه برای هر مجموعه‌ی باز  $W$  در  $Y$  داریم  $cl_s f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(cl_s W)$ . با استفاده از این گزاره نتیجه می‌شود  $f^{-1}(V) \subseteq cl_s f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(V)$  که نشان می‌دهد  $f^{-1}(V)$  یک مجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -باز در  $X$  است و در نتیجه  $f$  به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته می‌باشد.

**گزاره ۶:** فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت یک به یک و به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد. اگر  $Y$  یک  $T_0$ -فضا باشد، آن گاه  $X$  فراهاسدورف است.

**اثبات:** فرض کنیم  $x_1$  و  $x_2$  دو نقطه‌ی متمایز در  $X$  باشند. در این صورت  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . چون  $Y$  یک  $T_0$ -فضاست، مجموعه‌ی باز  $V$  در  $Y$  وجود دارد که شامل یکی از نقاط  $f(x_1)$  یا  $f(x_2)$  و نه هر دو باشد. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنیم  $f(x_1) \in V$  و  $f(x_2) \notin V$ . در این صورت مجموعه‌ی باز  $U$  در  $X$  شامل  $x_1$  وجود دارد که  $f(cl_s U) \subseteq V$ . بنابراین  $x_2 \notin cl_s U$  و در نتیجه مجموعه‌ی بست باز  $W$  در  $X$  وجود دارد که  $x_1 \in W$  و  $x_2 \notin W$  که نشان می‌دهد  $X$  فراهاسدورف است.

در ادامه‌ی این بخش، ارتباط میان نگاشت‌های به طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته و ویژگی  $cl$ -بستار فشردگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا به معرفی این مفهوم می‌پردازیم. فضای توپولوژی  $X$  را  $cl$ -بستار فشرده گوئیم، اگر برای هر پوشش باز  $X$  مانند  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  یک  $n \in \mathbb{N}$  و  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$  موجود باشند که  $X = \bigcup_{i=1}^n cl_s U_{\alpha_i}$ . گفته می‌شود مجموعه‌ی  $A$  نسبت به  $cl$ -بستار فشرده است، هرگاه برای هر پوشش  $A$  از زیرمجموعه‌های باز  $X$ ، زیرخانواده‌ی متناهی موجود باشد که  $cl$ -بستارهای اعضای آن پوششی برای  $A$  باشد [۴].

**نکته ۳:** یادآوری می‌کنیم که  $X$  یک فضای  $H$ -بسته نامیده می‌شود، اگر هر پوشش باز  $X$  دارای زیرخانواده‌ی متناهی باشد که بستارهای اعضای آن پوششی برای  $X$  باشد. بدیهی است که هر فضای  $H$ -بسته،  $cl$ -بستار فشرده است، اما عکس این گزاره لزوماً درست نیست. به عنوان مثال،  $\mathbb{R}$  با توپولوژی معمولی، فضای  $cl$ -بستار فشرده‌ای است که  $H$ -بسته نمی‌باشد. افزون بر آن، هر زیرفضای  $cl$ -بستار فشرده‌ی  $X$ ، نسبت به  $cl$ -بستار فشرده است. همچنین، اگر  $A \subseteq Y \subseteq X$  و  $A$  نسبت به  $cl$ -بستار فشرده باشد، آن گاه  $A$  نسبت به  $cl$ -بستار فشرده است. به آسانی می‌توان مشاهده نمود که هر زیرمجموعه‌ی  $\theta_{cl}$ -بسته‌ی فضای  $cl$ -بستار فشرده‌ی  $X$ ، نسبت به  $cl$ -بستار فشرده است.

نتیجه‌ی بعد نشان می‌دهد که  $cl$ -بستار فشردگی یک ویژگی توپولوژیکی است.

**قضیه ۸:** نگاره‌ی یک فضای  $cl$ -بستار فشرده تحت یک نگاشت پیوسته،  $cl$ -بستار فشرده است.

**اثبات:** فرض کنیم  $X$  یک فضای  $cl$ -بستار فشرده و  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت پیوسته و پوشا باشد. همچنین فرض کنیم  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  پوشش بازی برای  $Y$  باشد. در این صورت  $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  پوشش بازی برای  $X$  است و بنا به  $cl$ -بستار فشرده‌گی  $X$ ، مجموعه‌ی متناهی  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq I$  وجود دارد که  $X = \bigcup_{i=1}^n cl_s f^{-1}(V_{\alpha_i})$ . بنابراین

$$Y = \bigcup_{i=1}^n f(cl_s f^{-1}(V_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^n cl_s V_{\alpha_i}$$

که نشان می‌دهد  $Y$  یک فضای  $cl$ -بستار فشرده است.

**قضیه ۹:** نگاره‌ی یک فضای  $cl$ -بستار فشرده تحت یک نگاشت به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته، فشرده است.

**اثبات:** فرض کنیم  $X$  یک فضای  $cl$ -بستار فشرده و  $f: X \rightarrow Y$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته و پوشا باشد. همچنین فرض کنیم  $V$  پوشش بازی برای  $Y$  باشد. در این صورت برای هر  $x \in X$ ، مجموعه‌ی باز  $V_x \in V$  وجود دارد که  $f(x) \in V_x$ . پس مجموعه‌ی باز  $U_x$  در  $X$  شامل  $x$  وجود دارد که  $f(cl_s U_x) \subseteq V_x$ . حال خانواده‌ی  $U = \{U_x\}_{x \in X}$  پوشش بازی برای  $X$  است که بنا به  $cl$ -بستار فشرده‌گی  $X$ ، مجموعه‌ی متناهی  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\} \subseteq U$  وجود دارد که  $X = \bigcup_{i=1}^n cl_s U_{x_i}$ . از این رو  $Y = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$  که نشان می‌دهد  $Y$  فشرده است.

نتیجه‌ی زیر به‌طور مستقیم از قضیه ۹ حاصل می‌شود.

**نتیجه ۸:** فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد و  $A \subseteq X$ . اگر  $A$  نسبت به  $cl$ ،  $X$  - بستار فشرده باشد، آن‌گاه  $f(A)$  فشرده است.

#### ۴. نمودارهای $\theta_{cl}$ -بسته

نمودار نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  با  $G(f)$  نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

**تعریف ۲:** گوییم  $G(f)$  یک نمودار  $\theta_{cl}$ -بسته است، اگر برای هر  $(x, y) \notin G(f)$ ، مجموعه‌های باز  $U$  در  $X$  و  $V$  در  $Y$  به ترتیب شامل  $x$  و  $y$  موجود باشند که  $(cl_s U \times cl_s V) \cap G(f) = \emptyset$ . گوییم  $G(f)$  نسبت به  $X$ ،  $\theta_{cl}$ -بسته است، اگر برای هر  $(x, y) \notin G(f)$  مجموعه‌های باز  $U$  در  $X$  شامل  $x$  و  $V$  در  $Y$  شامل  $y$  موجود باشند که  $f(cl_s U) \cap V = \emptyset$ .

**گزاره ۷:** فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت با نمودار  $\theta_{cl}$ -بسته نسبت به  $X$  باشد. اگر  $Y$  فشرده باشد، آن‌گاه  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.



**اثبات:** فرض کنیم  $x \in X$  و  $W$  مجموعه‌ی بازی در  $Y$  شامل  $f(x)$  باشد. اگر  $y \in Y \setminus W$ ، آن‌گاه  $(x, y) \notin G(f)$  و در نتیجه مجموعه‌های باز  $U_y$  در  $X$  و  $V_y$  در  $Y$  به ترتیب شامل  $x$  و  $y$  وجود دارند که  $f(cl_s U_y) \cap V_y = \emptyset$ . حال خانواده‌ی  $\{V_y : y \in Y \setminus W\}$  پوشش بازی برای  $Y \setminus W$  است که بنا به فشردگی  $Y \setminus W$  مجموعه‌ی متناهی  $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq Y \setminus W$  وجود دارد که  $Y \setminus W \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ . قرار می‌دهیم  $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ . در این صورت  $U$  مجموعه‌ی بازی در  $X$  شامل  $x$  است که  $f(cl_s U) \subseteq W$ ؛ یعنی،  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است.

**گزاره ۸:** فرض کنیم  $f : X \rightarrow Y$  یک نگاشت به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته باشد. اگر  $Y$  هاسدورف باشد، آن‌گاه  $G(f)$  نسبت به  $X$ ،  $\theta_{cl}$ -بسته است.

**اثبات:** آسان است.

حال نتیجه‌ی زیر را بیان می‌کنیم که به‌طور مستقیم از گزاره ۷ و گزاره ۸ به‌دست می‌آید.

**نتیجه ۹:** فرض کنیم  $f : X \rightarrow Y$  یک نگاشت و  $Y$  فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت  $f$  به‌طور قوی  $\theta_{cl}$ -پیوسته است اگر و تنها اگر  $G(f)$  نسبت به  $X$ ،  $\theta_{cl}$ -بسته باشد.

**سیاس‌گزاری:**

نویسنده از داوران محترم که نظراتشان باعث بهبود مقاله شد و همچنین از دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل حمایت مالی این تحقیق، کمال تشکر را دارد. شماره گرنت: (SCU. MM1400. 776)

## References

1. S. Afrooz, F. Azarpanah and M. Etebar, Rings of real valued clopen continuous functions, Appl. Gen. Topol., **19** (2018), 203-216.
2. R. Z. Buzyakova, On clopen sets in cartesian products, Comment. Math. Univ. Carolinae, **42** (2001), 357-362.
3. R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
4. M. Etebar,  $\theta_{cl}$ -continuity and topological properties, Far East Journal of Mathematical Sciences, **107** (2018), 221-229.
5. L. Gillman and M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Springer, 1976.
6. J. K. Kohli, A class of spaces containing all connected and all locally connected spaces, Math.

- 
- Nachr., **82** (1978), 121-129.
7. P. E. Long and L. Herrington, Strongly  $\theta$ -continuous functions, J. Korean. Math. Soc., **18** (1981), 21-28.
  8. T. Noiri, On  $\delta$ -continuous functions, J. Korean. Math. Soc., **18** (1980), 161-166.
  9. I. L. Reilly and M. K. Vamanamurthy, On super-continuous mappings, Indian J. Pure. Appl. Math., **14** (1983), 767-772.
  10. D. Singh,  $cl$ -supercontinuous functions, Applied Gen. Top., **8** (2007), 293-300.
  11. R. Staum, The algebra of bounded continuous functions into a nonarchimedean field, Pac. J. Math., **50** (1974), 169-185.
  12. L. A. Steen and J. A. Jr. Seebach, Counterexamples in Topology, Springer Verlag, New York 1978.
  13. B. K. Tyagi, J. K. Kohli and D. Singh,  $R_{cl}$ -supercontinuous functions, Demonstratio Math., **46** (2013), 229-244.
  14. N. V. Velichko,  $H$ -closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Trans., **78** (1968), 103-118.
  15. S. Willard, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company Inc., London, 1970.