Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

On soluble-by-finite subgroups of valued division algebras

Mehran Motiee[1]

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran.

E-mail: motiee@nit.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 28 August 2021
Accepted: 4 October 2023
Published online:
6 February 2024

Keywords:
Division algebra,
Soluble-by-finite group,
Valuation.

ABSTRACT

Introduction

Let D be a division ring and let F be its center. If the dimension of D over F, as a vector space, is finite then D is called an F-central division algebra. Recall that in this case $[D:F]=n^2$ for some positive integer n, which is called the *degree* of D and is denoted by $\deg(D)$. Studying the structure of subgroups of the multiplicative group of $D^*=D-\{0\}$ is one of the oldest research areas in the theory of division rings. But, in general, the structure of D^* is unknown. One of the most important class of subgroups of D^* are soluble-by-finite subgroups, because they are in relation to Galois groups of maximal subfields of D. One of the most remarkable results about the structure of soluble-by-finite subgroups, obtained by Shirvani in 2005, shows that if G is a soluble-by-finite subgroup of an F-central division algebra D, then G contains a normal abelian subgroup A of finite index such that $|G:A|$ divides $60\deg(D)^2$. It is also known that if $\deg(D)$ is odd, then every soluble-by-finite subgroup of D^* is soluble itself. At the other extreme, the derived length of soluble subgroups of D^* were studied by Wehrfritz in 2006. One of the marginal results of his work is that, in general, soluble subgroups of D^* may have arbitrary large derived length. In this paper, we consider the soluble-by-finite subgroups of a division algebra D equipped with a valuation. We show that if its residue division ring is a field, then every soluble-by-finite subgroup of D^* is soluble and its derived length is at most 3. Moreover, we prove that in some special cases the above bound for the derived length can be replaced by 2.

Material and Methods

Let D be a division ring (commutative or noncommutative). Let Γ be a totally ordered abelian group. A valuation on D with values in Γ is a map $v: D^* \to \Gamma$ such that, for all $a, b \in D^*$,

1) $v(ab)=v(a)+v(b)$
2) $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

A division ring equipped with a valuation is called a *valued division ring*. In this case, it is easy to observe that $V_D=\{a \in D^* | v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$ is a subring of D which is called the *valuation ring*. Furthermore, it immediately follows that V_D is a local ring with the unique maximal ideal $M_D=\{a \in D^* | v(a)>0\} \cup \{0\}$. The quotient division ring $\bar{D}=V_D/M_D$ is called the *residue division ring*. In the special case that D is an F-central division algebra, then the restriction of v to F^* is a valuation on F. V_F, M_F and $\bar{F}$ are defined similarly. A valued F-central division algebra is called *strongly tame* if $char\ F = char\ \bar{F}$ and $char\ \bar{F} \nmid \deg(D)$. A strongly tame valued

division algebra is said to be *totally ramified* if $\overline{D} = \overline{F}$. We say that a valued field F is *Henselian* if its valuation has a unique extension to each algebraic extension of F.
In this paper, our general strategy is that we first prove our results for a valued division algebra D whose center is Henselian. Then, using the embedding map from D to its Henselization, we upgrade our results to the general cases.

Results and discussion
The following theorems are the main results of this paper.

Theorem 1. Let D be a valued F-central division algebra of degree n. If D is strongly tame and $\overline{D}$ is a field, then every soluble-by-finite subgroup of D^* is soluble with derived length at most 3.

Theorem 2. Let D be a valued F-central division algebra of degree n. If D is strongly tame and totally ramified, then every soluble-by-finite subgroup of D^* is soluble with derived length at most 2.

Theorem 3. Let D be a valued F-central division algebra of degree p^n, where p is a prime. If D is strongly tame and F does not contain a primitive p-th root of unity, then every soluble-by-finite subgroup of D^* is soluble with derived length at most 2.

Conclusion
The main result of this paper shows that every soluble-by-finite subgroup of the multiplicative group of a valued division algebra whose residue division algebra is a field is soluble with derived length at most 3. Furthermore, in two special cases, it is shown that this bound for derived length is 2. Nevertheless, the author's conjecture is that the bound 3 for the derived length can always be replaced by 2.

How to cite: Motiee, Mehran. (2023). On soluble-by-finite subgroups of valued division algebras. *Mathematical Researches*, 9 (3), 251 – 266.

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

بحثی پیرامون زیرگروه‌های حلپذیر-بوسیله-متناهی جبرهای تقسیم ارزیابی شده

مهران مطیعی[1] ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران. رایانامه: motiee@nit.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

در این مقاله نشان خواهیم داد که اگر D یک F-جبر تقسیم مرکزی ارزیابی شده (مجهز به یک ارزیابی) باشد بطوریکه حلقه تقسیم مانده‌ای آن یک میدان است، آنگاه هر زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی گروه یکال‌های D، خود گروهی حلپذیر با طول سری مشتق حداکثر 3 است. همچنین ثابت خواهیم کرد که در برخی حالت‌های خاص این کران بالا برای طول سری مشتق 2 می‌باشد. در نهایت با ارایه مثال‌هایی نشان خواهیم داد که اگر حلقه تقسیم مانده‌ای تعویض‌پذیر نباشد، نتایج فوق معتبر نیستند.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۶/۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷

واژه‌های کلیدی:
جبر تقسیم،
گروه حلپذیر-بوسیله-متناهی،
ارزیابی.

استناد: مطیعی، مهران (۱۴۰۲). بحثی پیرامون زیرگروه‌های حلپذیر-بوسیله-متناهی جبرهای تقسیم ارزیابی شده. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۳)، ۲۵۱ – ۲۶۶.

CC BY NC

© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

فرض کنید که D یک حلقه تقسیم و میدان F مرکز آن باشد. هرگاه بعد D روی F به عنوان یک فضای برداری متناهی باشد، آن‌را یک F- جبر تقسیم مرکزی می‌نامیم. بنا بر نتیجه ۵ در فصل ۵ از [۱]، بعد D روی F به عنوان یک فضای برداری همواره یک مربع کامل است، به عبارت دیگر $[D:F] = n^2$ به ازای یک عدد صحیح مثبت n. دراینصورت n را درجه D نامیده و با $\deg(D)$ نمایش می‌دهیم. مطالعه ساختار زیرگروه‌های $D^* = D - \{0\}$ (تحت عمل ضرب) از دیرباز مورد توجه بوده است، با این وجود ساختار D^* در حالت کلی همچنان ناشناخته است. برای مشاهده یک تاریخچه مفصل و همچنین برخی نتایج ارایه شده در دهه‌های اخیر در این زمینه [۲] را ببینید. در این میان مطالعه زیرگروه‌های حلپذیر-بوسیله-متناهی[1](یعنی گروهی که شامل یک زیرگروه حلپذیر نرمال از شاخص متناهی است) D^* از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، چرا که این زیرگروه‌ها ارتباطی خاص با گروه‌های گالوایی زیرمیدان‌های ماکسیمال D دارند که شناخت ساختار این گروه‌های گالوایی به نوبه خود می‌تواند در تعیین ساختار کلی D تعیین کننده باشد (به بخش ۲ از [۲] رجوع کنید). یکی از کامل‌ترین نتایج بدست آمده در خصوص ساختار زیرگروه‌های حلپذیر-بوسیله- متناهی D^* در [۳] ارایه شده است که بیان می‌کند هر زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی G از D^* خود شامل یک زیرگروه آبلی A از شاخص متناهی است که این شاخص، A را $60\deg(D)^2$ را می‌شمارد. از طرف دیگر در بخش ۲ از [۲] و نیز [۴] ثابت شده است که این کران بالا برای شاخص A در G را می‌توان با $30\deg(D)^2$ جایگزین کرد. علاوه بر این در [۴] با ارایه مثال‌هایی نشان داده شده است $30\deg(D)^2$ بهترین کران ممکن برای این شاخص می‌باشد. در این میان، در قضیه ۲۱,۲ از [۲]، نگارندگان ثابت کرده‌اند که اگر $\deg(D)$ فرد باشد، آنگاه G حلپذیر است. هر چند نتایج فوق می‌تواند برای تعیین یک کران بالا برای طول سری مشتق زیرگروه‌های حلپذیر D^* مورد استفاده قرار گیرد، با این وجود کران‌های حاصل از این روش بهترین کران‌های ممکن نخواهند بود. تعیین کران‌های بالای بهینه برای طول سری‌های مشتق زیرگروه‌های حلپذیر D^* در [۵] انجام شده است. به عنوان یک نتیجه فرعی، در مقاله ذکر شده ثابت شده است که هیچ محدودیتی برای طول سری‌های مشتق زیرگروه‌های حلپذیر D^* وجود ندارد. به بیان دقیق‌تر، برای هر عدد صحیح نامنفی d یک جبر تقسیم D و یک زیرگروه حلپذیر G از D^* وجود دارند بطوریکه طول سری مشتق G برابر $d+1$ است (اثبات لم ۴ از [۵] را ببینید).

در این مقاله قصد داریم تا ساختار زیرگروه‌های حلپذیر-بوسیله-متناهی یک جبر تقسیم D مجهز به یک ارزیابی را مورد مطالعه قرار دهیم. نشان خواهیم داد که هرگاه $\overline{D}$، حلقه تقسیم مانده‌ای D، یک میدان و D بطور قوی اَهلی باشد، آنگاه هر زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی D^* گروهی حلپذیر با طول سری مشتق حداکثر 3 است. همچنین ثابت می‌کنیم که در برخی حالت‌های خاص، این حداکثر طول ممکن برابر 2 است و لذا زیرگروه مورد نظر فوق آبلی[2] است.

لازم به ذکر است که گروه ضربی جبرهای تقسیم مجهز به یک ارزیابی در مقالاتی مانند [۶] و [۷] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

---

[1] Soluble-by-finite
[2] Metabelian

۱. جبرهای تقسیم ارزیابی شده

در این بخش پیشنیازهای لازم در خصوص ویژگی‌های حلقه‌های تقسیم مجهز به یک ارزیابی که در اثبات قضایای این نوشتار مورد استفاده قرار می‌گیرند را ارایه می‌کنیم.

فرض کنید که $(\Gamma, +)$ یک *گروه آبلی مرتب کلی*[۱] و D یک حلقه تقسیم (یا یک میدان) باشند. نگاشتی چون $v: D^* \to \Gamma$ را یک ارزیابی می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in D^*$ داشته باشیم:

۱) $v(ab) = v(a) + v(b)$؛

۲) $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

توجه داشته باشید که شرط اول در تعریف فوق نشان می‌دهد که v یک همریختی گروهی است و از آنجاییکه Γ آبلی است، لذا $D' \subseteq \ker v$، که در آن D' گروه مشتق D^* است. برای ارزیابی v از D، گروه ارزیابی آن با $\Gamma_D = v(D^*)$ تعریف می‌شود. به سادگی از تعریف نتیجه می‌شود که $V_D = \{a \in D^* | v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$ زیرحلقه‌ای از D است. این زیرحلقه را *حلقه ارزیابی*[۲] D می‌نامیم. همچنین سخت نیست که ببینیم V_D یک حلقه موضعی است که ایده‌آل ماکسیمال منحصربفرد آن عبارت است از $M_D = \{a \in D^* | v(a) > 0\} \cup \{0\}$. در نتیجه $U_D = \{a \in D^* | v(a) = 0\}$ گروه یکال‌های V_D است. حلقه خارج قسمتی $\overline{D} = V_D/M_D$ را که خود یک حلقه تقسیم است، *حلقه تقسیم مانده‌ای*[۳] D می‌نامیم. در صورتیکه D یک F-جبر تقسیم مرکزی باشد، آنگاه تحدید v به F^* یک ارزیابی روی F است. برای این ارزیابی Γ_F، V_F، M_F، U_F و $\overline{F}$ بطور مشابه تعریف می‌شوند. توجه داشته باشید که نگاشت $f \mapsto \overline{f}$ از V_F به $\overline{D}$ یک همریختی حلقه‌ای با هسته M_F است. لذا این نگاشت یک نشانندهٔ $\overline{F} \hookrightarrow \overline{D}$ تعریف می‌کند. بنابراین می‌توان $\overline{F}$ را به عنوان یک زیرحلقه $\overline{D}$ و در نتیجه $\overline{D}$ را به عنوان یک $\overline{F}$-جبر در نظر گرفت. در این وضعیت، بنابر قضیه ۳ در [۸] اگر $char\ \overline{F} = p$ (اگر $p = 1$ $char\ \overline{F} = 0$) آنگاه

$$[D:F] = [\overline{D}:\overline{F}]|\Gamma_D:\Gamma_F|p^a \qquad (۱)$$

برای یک عدد صحیح و نامنفی a. کمیت $|\Gamma_D:\Gamma_F|$ را *شاخص انشعاب*[۴] D می‌نامیم. D را *بطور قوی اهلی*[۵] می‌نامیم اگر داشته باشیم $char\ \overline{F} = char\ F$ و علاوه بر این $char\ \overline{F} \nmid \deg(D)$. بدیهی است که در چنین وضعیتی، از (۱) نتیجه می‌شود

$$[D:F] = [\overline{D}:\overline{F}]|\Gamma_D:\Gamma_F|. \qquad (۲)$$

---

[1] Totally ordered abelian group
[2] Valuation ring
[3] Residue division ring
[4] Ramification index
[5] Strongly tame

از این جا به بعد فرض می‌کنیم که D بطور قوی اهلی است. D را *لَخت*[۱] یا *غیر انشعابی*[۲] می‌نامیم اگر $\Gamma_D = \Gamma_F$. همچنین آن را *کاملاً انشعابی*[۳] می‌نامیم اگر داشته باشیم $\bar{D} = \bar{F}$. ارزیابی v روی میدان F را *هنزلی*[۴] می‌گوییم هرگاه در لم هنزل صدق کند. بدین معنی که اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای در $V_F[x]$ باشد و α یک ریشه ساده $\bar{f}(x)$ در $\bar{F}$، آنگاه $a \in V_F$ای وجود داشته باشد بطوریکه $f(a) = 0$ و $\bar{a} = \alpha$. میدانی که مجهز به یک ارزیابی هنزلی باشد را یک میدان هنزلی می‌نامیم. می‌توان نشان داد اگر F هنزلی باشد، آنگاه ارزیابی آن بطور یکتایی به هر توسیع جبری F قابل توسعه است (برای دیدن شرایط معادل هنزلی بودن به صفحه ۵۹۶ از [۹] رجوع کنید). در انتها، ذکر این نکته نیز اهمیت دارد که نگاشت $a \mapsto \bar{a}$ از U_D به $\bar{D}^*$ یک بروریختی گروه‌ها با هسته $1 + M_D$ است. بدین ترتیب داریم $U_D/1 + M_D \cong \bar{D}^*$.

۲. نتایج اصلی

برای اثبات نتیجه اصلی این بخش به لم ساده زیر نیاز داریم. پیش از بیان آن یادآوری می‌کنیم که اگر $char\ F \neq 2$ آنگاه یک جبر *چهارگانی*[۵] روی F عبارت است از یک F-جبر چهار بعدی با پایه‌ای چون 1، i، jو k (i، j و k نمادهای صوری هستند) که در روابط زیر صدق می‌کنند

$$i^2 = -1, j^2 = -1, ij = -ji = k. \qquad (۳)$$

چنین جبری را با $\left(\frac{-1,-1}{F}\right)$ نمایش می‌دهیم. با یک محاسبه سرراست دیده می‌شود که مرکز این جبر برابر F است. توجه کنید که یک جبر چهارگانی لزوما یک حلقه تقسیم نیست. در واقع چنین جبری یک حلقه تقسیم است اگر برای هر $a, b, c, d \in F$ داشته باشیم $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. در چنین وضعیتی داریم

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - ai - bj - ck}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

لم ۱. *اگر $D = \left(\frac{-1,-1}{F}\right)$ یک جبر تقسیم ارزیابی شده با ارزیابی v و بطور قوی اهلی باشد آنگاه غیرانشعابی است و بعلاوه داریم $\bar{D} = \left(\frac{-\bar{1},-\bar{1}}{\bar{F}}\right)$. در حالت خاص $\bar{D}$ تعویض‌ناپذیر است.*

برهان. ابتدا توجه کنید که $2v(i) = v(i^2) = v(-1) = 0$. حال از آنجاییکه Γ_D مرتب کلی است، لذا بدون تاب است و در نتیجه داریم $v(i) = 0$. بطور مشابه $v(j) = v(k) = 0$. پس $i, j, k \in V_D$ و لذا $\bar{\imath}$، $\bar{\jmath}$ و $\bar{k}$ در $\bar{D}$ تعریف شده‌اند. حال فرض کنید که Ω، $\bar{F}$-زیرفضای برداری تولید شده توسط $\bar{1}$، $\bar{\imath}$، $\bar{\jmath}$ و $\bar{k}$ از $\bar{D}$ باشد. سخت نیست که ببینیم Ω تحت عمل ضرب $\bar{D}$ بسته و در نتیجه یک $\bar{F}$-زیرجبر $\bar{D}$ است. همچنین بنابر (۲)، $[\bar{D}:\bar{F}] < \infty$ ، لذا $[\Omega:\bar{F}] < \infty$. از

[۱] Inertial
[۲] Unramified
[۳] Totally ramified
[۴] Henselian
[۵] Quaternion algebra

طرف دیگر $\overline{D}$ یک حلقه تقسیم است. پس Ω مقسوم‌علیه صفر ندارد و از این به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که Ω هم یک حلقه تقسیم است. اما طبق فرض D بطور قوی اهلی است. این نتیجه می‌دهد که $char\ \overline{F} \neq 2$ و در نتیجه $\bar{\imath}$، $\bar{\jmath}$ و $\bar{k}$ در روابط (۳) صدق می‌کنند. از برقراری روابط (۳) برای $\bar{\imath}$، $\bar{\jmath}$ و $\bar{k}$ به سادگی مشاهده می‌شود که $\overline{F}$ مرکز Ω است. حال بار دیگر استفاده از (۲) ثابت می‌کند که

$$1 < [\Omega : \overline{F}] \leq [\overline{D} : \overline{F}] \leq [D : F] = 4$$

و از آنجاییکه $[\Omega : \overline{F}]$ یک مربع کامل است نتیجه می‌گیریم که $[\overline{D} : \overline{F}] = [\Omega : \overline{F}] = 4$ و لذا

$$\overline{D} = \Omega = \{\alpha + \beta\bar{\imath} + \gamma\bar{\jmath} + \delta\bar{k} \,|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \overline{F}\}.$$

حال برقراری روابط (۳) نشان می‌دهد که $\overline{D} = \left(\frac{-\bar{1},-\bar{1}}{\overline{F}}\right)$. همچنین استفاده مجدد از (۲) ثابت می‌کند که $\Gamma_D = \Gamma_F$ و در نتیجه می‌بینیم که D غیر انشعابی است. ■

قضیه ۲. *فرض کنید که D یک F-جبر تقسیم مرکزی مجهز به یک ارزیابی v باشد. همچنین فرض کنید که تحدید v به F هنزلی است. فرض کنید $\mathcal{L} \subseteq \overline{D}$ یک توسیع جدایی‌پذیر $\overline{F}$ باشد. در اینصورت داریم:*

(۱) یک توسیع غیرانشعابی از F چون $L \subseteq D$ وجود دارد بطوریکه $\overline{L} = \mathcal{L}$. بعلاوه این توسیع در حد یکریختی منحصربفرد است.

(۲) اگر L همان زیرمیدان D در قسمت (۱) باشد، آنگاه $\mathcal{L}/\overline{F}$ گالوا است اگر و تنها اگر L/F گالوا باشد. در این وضعیت، نگاشت $\sigma \mapsto \bar{\sigma}(\bar{a} \mapsto \overline{\sigma(a)})$ یک یکریختی از $Gal(L/F)$ به روی $Gal(\mathcal{L}/\overline{F})$ می‌باشد.

برهان. اثبات (۱) کاملاً مشابه اثبات گزاره ۱۷ در پیوست A از [۹] است. با این توضیح که در گزاره ارجاع داده شده حالتی بررسی شده است که در آن D یک میدان است. با این حال همان اثبات نعل به نعل در اینجا هم به نتیجه مطلوب خواهد رسید. برای اثبات (۲) قضیه ۲۳ در پیوست A از [۹] را ببینید. ■

توسیع L در قضیه ۲ را *بالابر لَخت*[۱] $\mathcal{L}$ در D می‌نامیم. قضیه زیر نیز برای اثبات قضیه اصلی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. پیش از بیان آن یادآوری می‌کنیم که هرگاه D یک F-جبر تقسیم مرکزی و G زیرگروهی از D^* باشد، آنگاه *پوشش خطی*[۲] G در D با ضرایب در F را با $F[G]$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر $F[G]$ برابر است با مجموعه تمام ترکیبات خطی بصورت $\sum_{a_g \in F} a_g g$ که در آن a_gها به F تعلق دارند و به‌جز تعدادی متناهی از آن‌ها داریم $a_g = 0$. ذکر این نکته ضروری است که چون D روی F متناهی‌البعد است، لذا $F[G]$ هم روی F متناهی‌البعد بوده و از آنجاییکه دارای مقسوم

[1] Inertial lift
[2] Linear hull

علیه صفر نیست خود یک حلقه تقسیم است. توجه داشته باشید که لزوماً مرکز $F[G]$ برابر F نمی‌باشد. اگر $D = F[G]$ آنگاه G را یک زیرگروه *اکیداً تحویل‌ناپذیر*[1] می‌نامیم.

قضیه ۳. *فرض کنید که D یک F-جبر تقسیم مرکزی و G یک زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی و اکیداً تحویل‌ناپذیر D^* باشد. اگر G شامل یک زیرگروه نرمال یکریخت با Q_8 (Q_8 گروه چهارگان‌ها است) نباشد، آنگاه شامل یک زیرگروه آبلی نرمال از شاخص متناهی است که شاخص این زیرگروه در G، $\deg(D)^2$ را می‌شمارد.*

برهان. به قضیه ۱۴٫۲ از [۲] رجوع شود. ■

توجه کنید که هرگاه در قضیه ۳، G اکیداً تحویل‌ناپذیر هم نباشد باز حکم قضیه درست است. چرا که در این حالت $F[G]$ یک زیرحلقه تقسیم از D است و اگر L مرکز $F[G]$ باشد آنگاه $F[G] = L[G]$ و در نتیجه G در $L[G]$ اکیداً تحویل‌ناپذیر است. حال چون $\deg(L[G])$ درجه D را عاد می‌کند، می‌بینیم که G دارای یک زیرگروه آبلی نرمال است که شاخص آن، $\deg(L[G])^2$ و در نتیجه $\deg(D)^2$ را می‌شمارد. حال در موقعیتی قرار داریم که می‌توانیم نتیجه اصلی این مقاله را بیان و اثبات کنیم.

قضیه ۴. *فرض کنید که D یک F-جبر تقسیم مرکزی ارزیابی شده با ارزیابی v و از درجه n باشد. اگر D بطور قوی اهلی و $\overline{D}$ یک میدان باشد، آنگاه هر زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی D^* گروهی حلپذیر با طول سری مشتق حداکثر 3 است.*

برهان. فرض کنید که G یک زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی D^* باشد. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن تحدید v به F هنزلی است. اگر G شامل زیرگروهی چون $Q \cong Q_8$ باشد، آنگاه زیرجبر $F[Q] = \left(\frac{-1,-1}{F}\right)$ زیرحلقه تقسیمی از D است. اما بنا بر لم ۱ داریم $\overline{F[Q]} = \left(\frac{\overline{-1},\overline{-1}}{\overline{F}}\right) \subseteq \overline{D}$ که خلاف فرض تعویض‌پذیر بودن $\overline{D}$ است. در نتیجه G شامل زیرگروهی یکریخت با Q_8 نیست و لذا بنا بر قضیه ۳، دارای زیرگروه آبلی نرمالی چون A است با این ویژگی که شاخص A در G، n^2 را می‌شمارد.

در این مرحله ادعا می‌کنیم که $G \cap (1 + M_D)$ آبلی است. برای اثبات این ادعا ابتدا توجه کنید که چون A در G نرمال است پس داریم $G \subseteq N_{D^*}(F[A]^*)$. در نتیجه $\mathcal{G} = F[A]^*G$ زیرگروهی از D^* است. اما بنا بر قضیه اول یکریختی گروه‌ها داریم $\mathcal{G}/F[A]^* \cong G/G \cap F[A]^*$. حال از آنجاییکه $A \subseteq G \cap F[A]^*$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{G}/F[A]^*$ تصویر همریختی از G/A بوده و لذا $m = |\mathcal{G}: F[A]^*|$، n^2 را می‌شمارد. فرض کنید $1 + g \in \mathcal{G} \cap (1 + M_D)$ که در آن $g \in M_D$. دراینصورت $(1+g)^m \in F[A]^*$. اما $(1+g)^m \in 1 + M_D$، پس

$$(1+g)^m \in F[A] \cap (1 + M_D) = 1 + M_{F[A]}.$$

[1] Absolutely irreducible

لذا خواهیم داشت $(1+g)^m = 1+h$ به ازای عضوی چون $h \in M_{F[A]}$. چند جمله‌ای $f(x) = x^m - (1+h)$ در $V_{F[A]}[x]$ را در نظر بگیرید. چون $\overline{1+h} = \bar{1}$، پس در $\overline{F[A]}$ داریم $\bar{f}(x) = x^m - \bar{1}$. از اینکه D بطور قوی اهلی است نتیجه می‌شود $char\ \bar{F} \nmid n$ و لذا $char\ \bar{F} \nmid m$، زیرا $m|n^2$. این نتیجه می‌دهد که $\bar{1}$ یک ریشه ساده $\bar{f}$ در $\overline{F[A]}$ است. از طرف دیگر $F[A]/F$ یک توسیع متناهی و در نتیجه جبری است. بنابراین $F[A]$ یک میدان هنزلی است. لذا یک $k \in V_{F[A]}$ وجود دارد بطوریکه $f(k) = 0$ و $\bar{k} = \bar{1}$. اما $f(k) = 0$ نتیجه می‌دهد که $k^m = 1+h$ و همچنین $\bar{k} = \bar{1}$ نتیجه می‌دهد که $k = 1+s$ برای یک $s \in M_{F[A]}$. خلاصه اینکه داریم $(1+g)^m = (1+s)^m$. حال ثابت می‌کنیم $g = s$. فرض (خلف) کنید که $g \neq s$. آنگاه خواهیم داشت $g - s \neq 0$. لذا $g - s \in D^*$ و بنابراین $v(g-s)$ تعریف شده است. اما از برابری $(1+g)^m = (1+s)^m$ نتیجه می‌شود

$$m(g-s) = \frac{m(m-1)}{2}(s^2 - g^2) + \cdots + (s^m - g^m).$$

حال اگر قرار دهیم $t = g - s$ آنگاه رابطه فوق بصورت

$$mt = \frac{m(m-1)}{2}(s^2 - (t+s)^2) + \cdots + (s^m - (t+s)^m) \qquad (۴)$$

در می‌آید. اما $s^2 - (t+s)^2 = -t^2 - st - ts$. از طرف دیگر $v(-t^2) = v(t^2) = 2v(t) > v(t)$ چرا که داریم $v(t) > 0$. همچنین، از آنجاییکه $v(s) > 0$ نتیجه می‌شود $v(-st) > v(t)$ و $v(-ts) > v(t)$. در نتیجه بنا بر شرط دوم تعریف ارزیابی داریم $v(s^2 - (t+s)^2) > v(t)$. به روشی مشابه اثبات می‌شود که برای هر $3 \leq j \leq m$ داریم $v\left(s^j - (t+s)^j\right) > v(t)$. حال استفاده مجدد از شرط دوم در تعریف ارزیابی‌ها نشان می‌دهد که

$$v\left(\frac{m(m-1)}{2}(s^2 - (t+s)^2) + \cdots + (s^m - (t+s)^m)\right) > v(t) \qquad (۵)$$

از طرف دیگر $v(m) = v\left(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ تا}}\right) \geq v(1) = 0$. این یعنی $m \in V_F$. حال اگر داشته باشیم $v(m) > 0$ آنگاه در $\bar{F}$ داریم $\bar{m} = 0$ که با $char\ \bar{F} \nmid m$ در تناقض است. نتیجه اینکه $v(m) = 0$ و بنابراین

$$v(mt) = v(m) + v(t) = v(t) \qquad (۶)$$

حال از (۴)، (۵) و (۶) نتیجه می‌شود $v(t) < v(t)$ که تناقض است. بنابراین $g = s$ و لذا $1 + g = 1 + s \in F[A]^*$. این نشان می‌دهد $\mathcal{G} \cap (1 + M_D) \subseteq F[A]^*$. از طرف دیگر $G \subseteq \mathcal{G}$. در نتیجه $G \cap (1 + M_D) \subseteq F[A]^*$ که ادعای ما را اثبات می‌کند.

حال به استناد قضیه ۲ فرض کنید که L بالابر لخت $\overline{D}$ باشد (به یاد بیاورید که طبق فرض $\overline{D}$ یک میدان است) و دنباله زیر از همریختی‌های گروهی را در نظر بگیرید

$$\frac{U_L}{1+M_L} \xrightarrow{u(1+M_L)\mapsto \bar{u}} \overline{L}^* \xrightarrow{\bar{l}\mapsto \bar{l}} \overline{D}^* \xrightarrow{\bar{d}\mapsto d(1+M_D)} \frac{U_D}{1+M_D}.$$

نگاشت‌های اول و سوم (از چپ به راست) در دنباله فوق یکریختی هستند. بعلاوه، چون $\overline{L}=\overline{D}$ نگاشت وسط هم پوشا است. در نتیجه ترکیب نگاشت‌های فوق پوشا بوده و در حالت خاص داریم $U_D = U_L(1+M_D)$. اما از آنجاییکه $D' \subseteq \ker v = U_D$ نتیجه می‌شود که $G' \subseteq U_L(1+M_D)$ و لذا $G'' \subseteq (U_L(1+M_D))'$. اما $U_L \subseteq N_{D^*}(1+M_D)$ و علاوه بر این $U_L(1+M_D)/1+M_D$ آبلی است، چرا که U_L آبلی است. این نتیجه می‌دهد که $\big(U_L(1+M_D)\big)' \subseteq 1+M_D$ و لذا خواهیم داشت $G'' \subseteq 1+M_D$. بنابراین $G'' \subseteq G \cap (1+M_D)$ و از آنچه که در بالا ثابت شد نتیجه می‌گیریم که G'' آبلی است. در نتیجه $G'''=1$ و حکم در حالتی که F هنزلی است اثبات می‌شود.

اکنون فرض کنید که F هنزلی نیست. گیریم F^h هنزلی شده F باشد که بنا بر تعریف عبارت است از کوچکترین توسیع هنزلی میدان F (به قضیه ۲۷ در پیوست A از [۹] رجوع کنید). بنابر قضیه ۲ از [۸]، $D^h = D\otimes_F F^h$ یک F^h-جبر تقسیم مرکزی است. اما نگاشت $a\mapsto a\otimes 1$ از D به D^h یک نشاننده است. بنابراین تصویر G تحت این نگاشت در D^h با G یکریخت است. حال بنابر آنچه اثبات کردیم این تصویر حلپذیر با طول سری مشتق حداکثر 3 می‌باشد. لذا G حلپذیر با طول سری مشتق حداکثر 3 است. ■

ملاحظه. در خصوص کران بالای بدست آمده برای طول سری مشتق در قضیه ۳ ذکر این نکته ضروری است که متاسفانه نگارنده اطلاعی در مورد بهینه بودن این کران ندارد. با این وجود حدس نگارنده بر این است که این کران باید حداکثر 2 باشد. این مطلب را در ادامه و در دو حالت خاص اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۵. *فرض کنید که D یک F-جبر تقسیم مرکزی ارزیابی شده با ارزیابی v باشد. اگر D بطور قوی اهلی و کاملاً انشعابی باشد آنگاه هر زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی D^* گروهی حلپذیر با طول سری مشتق حداکثر 2 است.*

برهان. فرض کنید که G یک زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی D^* باشد. ابتدا فرض می‌کنیم که تحدید v روی F هنزلی است. چون $F^* \subseteq C_{D^*}(G)$ پس $N = F^*G$ یک زیر گروه D^* است. بعلاوه اگر A زیرگروهی نرمال و حلپذیر از شاخص متناهی در G باشد، آنگاه F^*A زیرگروهی نرمال و حلپذیر از شاخص متناهی در N است و در نتیجه N هم حلپذیر-بوسیله-متناهی است. حال چون طبق فرض $\overline{D}=\overline{F}$، پس بالابر لخت $\overline{D}$ عبارت است از F. اکنون مشابه اثبات قضیه ۴ داریم $U_D = U_F(1+M_D)$ و از آنجاییکه $N' \subseteq U_D$ خواهیم داشت $N' \subseteq U_F(1+M_D)$. حال قرار دهید $B = N\cap(1+M_D)$. از اثبات قضیه ۴ به یاد بیاورید که B آبلی است. از طرف دیگر از اینکه $U_F \subseteq N$ نتیجه می‌شود

$$U_F(1+M_D)\cap N = U_F\big(N\cap(1+M_D)\big) = U_F B.$$

اما $U_F \subseteq C_{D^*}(B)$، در نتیجه $U_F B$ آبلی است. حال چون $N' \subseteq U_F(1+M_D) \cap N = U_F B$، پس N' آبلی است. لذا $N'' = 1$ که خود نتیجه می‌دهد $G'' = 1$. در انتها، توسعه اثبات به حال غیرهنزلی مشابه اثبات قضیه ۴ انجام می‌شود. ■

برای اثبات نتیجه بعدی به قضیه زیر نیاز داریم. برای اثبات آن لم ۷,۲ در [۲] را ببینید.

لم ۶. *فرض کنید که D یک F-جبر تقسیم مرکزی و G زیرگروهی از D^* باشد با این ویژگی که $D = F[G]$. اگر A یک زیرگروه آبلی نرمال G باشد، آنگاه $[D: F[C_G(A)]] = |G: C_G(A)|$. در حالت خاصی که $C_G(A) = A$، آنگاه $F[A]$ یک زیرمیدان ماکسیمال D است و همچنین $F[A]/F$ یک توسیع گالوا با $Gal(F[A]/F) \cong G/A$ خواهد بود.*

قضیه ۷. *فرض کنید که D یک F-جبر تقسیم مرکزی ارزیابی شده با ارزیابی v باشد. بعلاوه فرض کنید $\deg(D) = p^n$ که در آن p عددی اول است. اگر D بطور قوی اهلی بوده، $\overline{D}$ یک میدان و F شامل هیچ ریشه اولیه p-ام واحدی نباشد، آنگاه هر زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی D^* گروهی حلپذیر با طول سری مشتق حداکثر 2است.*

برهان. همانند اثبات قضایای قبل کافی است تا قضیه را در حالتی که F هنزلی است ثابت کنیم. پس فرض می‌کنیم که تحدید v روی F هنزلی بوده و G یک زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی غیرآبلیD^* باشد. قرار دهید $K = F[G]$ و $L = Z(K)$. دراینصورت K یک L-جبر تقسیم مرکزی است و بعلاوه داریم $K = L[G]$ و $\deg K = p^m$ برای یک $m \geq 1$. بنابر لم ۳,۲ در [۲] (یا قضیه ۳ در بالا)، G دارای یک زیرگروه آبلی نرمال A از شاخص متناهی است. فرض کنید که A در بین زیرگروه‌های آبلی نرمال با شاخص متناهی در G ماکسیمال باشد. نشان می‌دهیم که $L[A]$ یک زیرمیدان ماکسیمال K است. اگر چنین نباشد، آنگاه بنا بر قضیه ۴ از فصل ۷ در [۱]، $[L[A]: L] < \deg K$ و بعلاوه از لم ۶ داریم $C_G(A) \neq A$. قرار دهید $H = C_G(A)$. با این فرض H غیر آبلی خواهد بود، چرا که A ماکسیمال فرض شده است. از آنجاییکه G، بنا بر قضیه ۴، حلپذیر با طول سری مشتق حداکثر 3 است، پس H حلپذیر است. فرض کنید t کوچکترین عدد صحیح و نامفی باشد که $H^t = 1$ (توجه کنید که 3 یا $t = 2$). در اینصورت H^{t-1} آبلی و غیربدیهی است و با توجه به اینکه $H^{t-1} \subseteq C_G(A)$ نتیجه می‌گیریم که AH^{t-1} یک زیرگروه آبلی نرمال G است. حال ماکسیمال بودن A نتیجه می‌دهد که $H^{t-1} \subseteq A$. قرار دهید $N = C_K(L[A])$. بنا بر قضیه مرکزساز (صفحه ۴۲ از [۱] را ببینید)، N یک $L[A]$-جبر ساده مرکزی است و همچنین داریم $[N: L] = [K: L]/[L[A]: L]$. از طرف دیگر داریم $[N: L] = \left[N: L[A]\right][L[A]: L]$. بنابراین $\left[N: L[A]\right] = [K: L]/[L[A]: L]^2$. در نتیجه

$$\deg N = \sqrt{[N: L[A]]} = \frac{\sqrt{[K: L]}}{[L[A]: L]} = \frac{\deg K}{[L[A]: L]} > 1.$$

پس $\deg N = p^r$ برای یک $r \geq 1$. حال اگر $1 \neq a \in H^{t-1}$، آنگاه با توجه به اینکه $H^{t-1} \subseteq L[A]$ خواهیم داشت $Nrd_N(a) = a^{p^r}$ که در آن Nrd_N نرم کاهش یافته از N^* به $L[A]^*$ است (به فصل ۲۲ از [۱] رجوع کنید). از طرف

دیگر چون $H \subseteq N$ پس $H^{t-1} \subseteq N'$ و لذا $Nrd_N(a) = 1$. خلاصه اینکه $a^{p^r} = 1$. این نتیجه می‌دهد که به ازای عضوی چون $b \neq 1$ از D^* داریم $b^p = 1$. اما طبق فرض F دارای هیچ ریشه اولیه p-ام واحدی نیست. پس $b \notin F$. از طرف دیگر $p \nmid [F[b]:F]$. این در حالی است که $[F[b]:F]$ باید توانی از p باشد، زیرا $[F(b):F] | \deg D$ که این یک تناقض است. در نتیجه $L[A]$ یک زیرمیدان ماکسیمال K بوده و بعلاوه داریم $C_G(A) = A$.

اکنون از لم ۶ نتیجه می‌گیریم $L[A]/L$ گالوا است و $Gal(L[A]/L) \cong G/A$. حال ادعا می‌کنیم که $L[A]/L$ غیر انشعابی است. برای اثبات ادعا فرض کنید که S *بستار لخت*[1] L در $L[A]$ باشد که طبق تعریف عبارت است زیرمیدان تولید شده توسط تمام توسیع‌های غیرانشعابی از L که مشمول در $L[A]$ هستند. توجه کنید که S/L غیر انشعابی و $L[A]/S$ بطور کلی انشعابی است (به تعریف ۲۰ و قضیه ۲۴ در پیوست A از [۹] رجوع کنید). حال چون $L[A]/L$ گالوا است، پس $L[A]/S$ هم گالوا است. از طرف دیگر بنا بر گزاره ۲۲ در پیوست A از [۹]، $L[A]/S$ یک توسیع آبلی رادیکال است. در حالت خاص اگر داشته باشیم $L[A] \neq S$ آنگاه باید S شامل یک ریشه اولیه p-ام واحد باشد که باز هم مثل بالا به تناقض می‌انجامد. در نتیجه $S = L[A]$ و ادعا اثبات می‌شود. حال اگر قسمت دوم قضیه ۲ را برای L-جبر تقسیم مرکزی K مورد استفاده قرار دهیم، آنگاه نتیجه خواهد شد که نگاشت کانونی $\sigma \mapsto \bar{\sigma}(\bar{a} \mapsto \overline{\sigma(a)})$ یک یکریختی از $Gal(L[A]/L)$ به روی $Gal\left(\bar{L}[\bar{A}]/\bar{L}\right)$ است. بدین ترتیب داریم $Gal\left(\bar{L}[\bar{A}]/\bar{L}\right) \cong G/A$. از طرف دیگر بنا بر گزاره ۱۷،۸ از [۹]، چون $\bar{K}$ یک میدان است، $\bar{K}/\bar{L}$ یک توسیع آبلی گالوا است. حال چون این توسیع آبلی است، نظریه گالوا نتیجه می‌دهد که توسیع میانی $\bar{L}[\bar{A}]/\bar{L}$ هم آبلی است. در نتیجه G/A آبلی است که این نشان می‌دهد که G حلپذیر با طول سری مشتق 2 می‌باشد. ■

۳. مثال‌ها

در این بخش قصد داریم تا با ارایه مثال‌هایی نشان دهیم که احکام ارایه شده در بخش قبل وقتی که $\bar{D}$ یک میدان نیست برقرار نیستند. پیش از بیان این مثال‌ها لازم است تا مطالبی را در خصوص *حلقه تقسیم سری‌های لوران مکرر*[2] یادآوری کنیم. فرض کنید که D یک حلقه تقسیم (احتمالاً یک میدان) و x یک متغیر صوری باشد که با اعضای D جابه‌جا می‌شود. یک سری صوری بصورت

$$\sum_{i \geq k} a_i x^i = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots \qquad (a_i \in D, a_k \neq 0, k \in \mathbb{Z}) \tag{۷}$$

را یک سری لوران بر حسب متغیر x و با ضرایب در D می‌نامیم. مجموعه متشکل از تمام این سری‌ها را با $D\big((x)\big)$ نمایش می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود که $D\big((x)\big)$ همراه با عمل جمع و ضرب سری‌ها یک حلقه تقسیم است. این حلقه تقسیم را حلقه تقسیم سری‌های لوران صوری با ضرایب در D می‌نامیم (در صورتیکه D یک میدان باشد، آن‌را میدان سری‌های

[1] Inertial closure
[2] Iterated Laurent series division ring

لوران صوری می‌نامیم). هرگاه D یک F-جبر تقسیم مرکزی باشد، آنگاه $D\big((x)\big)$ یک $F\big((x)\big)$-جبر تقسیم مرکزی است و بعلاوه داریم $\deg\Big(D\big((x)\big)\Big) = \deg(D)$. حال متغیرهای صوری x_1، . . . ، x_n را در نظر بگیرید. برای این متغیرها حلقه تقسیم $D\big((x_1)\big)\dots\big((x_n)\big)$ بطور مکرر و با قرار دادن $D_0 = D$، $D_1 = D_0\big((x_1)\big)$، . . . ، $D_i = D_{i-1}\big((x_i)\big)$، . . . و در نهایت

$$D\big((x_1)\big)\dots\big((x_n)\big) = D_n = D_{n-1}\big((x_n)\big)$$

تعریف می‌شود. در اینصورت می‌توان دید که هر عضو این میدان دارای نمایشی بصورت

$$\sum_{-\infty<i_1}\dots\sum_{-\infty<i_n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} \qquad (a_{i_1\dots i_n}\in D)$$

است. این میدان مجهز به یک ارزیابی استاندارد $v\colon D\big((x_1)\big)\dots\big((x_n)\big)^* \to \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z}$ است که با

$$v\left(\sum_{i_1}\dots\sum_{i_n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\right) = \min\{(i_1,\dots,i_n)\,|\,a_{i_1\dots i_n}\neq 0\} \qquad (۸)$$

تعریف می‌شود، که در آن ترتیب روی $\bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z}$ *ترتیب قاموسی از راست به چپ*[۱] است. با توجه به تعریف بالا، سخت نیست که ببینیم $\overline{D\big((x_1)\big)\dots\big((x_n)\big)} \cong D$. علاوه بر این، در حالتی‌که D یک F-جبر تقسیم مرکزی باشد، آنگاه $D\big((x_1)\big)\dots\big((x_n)\big)$ روی $F\big((x_1)\big)\dots\big((x_n)\big)$ غیرانشعابی است، چرا که استفاده از (۸) نشان می‌دهد $\Gamma_D = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z} = \Gamma_F$.

برای ادامه بحث همچنین نیاز داریم تا مفهوم *جبرهای نمادین*[۲] را یاد آوری کنیم. فرض کنید که F یک میدان باشد که شامل یک ریشه n-ام اولیه واحد ω_n است (و در نتیجه $char\ F \nmid n$). فرض کنید که α و β دو نماد صوری و همچنین a و b دو عضو F^* باشند. در اینصورت جبر نمادین $\left(\frac{a,b}{F,\omega_n}\right)$ عبارت است از F-فضای برداری با پایه $\{\alpha^r\beta^s|0\leq r,s\leq n-1\}$ همرا با عمل ضربی که با ویژگی توزیعپذیری و روابط $\alpha^n = a$، $\beta^n = b$ و $\alpha\beta = \omega_n\beta\alpha$ تعریف می‌شود. توجه داشته باشید در حالتی که $a = b = -1$ و $n = 2$ این جبر چیزی نیست جز جبر چهارگان‌ها روی F. همانند چهارگان‌ها این جبر لزوماً یک حلقه تقسیم نیست. با این حال می‌توان نشان داد که یک جبر ساده با مرکز F است (قضیه ۱ در فصل ۱۱ از [۱] را ببینید). اما در یک حالت خاص که در ادامه آن را بیان می‌کنیم، $\left(\frac{a,b}{F,\omega_n}\right)$ یک حلقه تقسیم خواهد بود.

---

[1] Right-to-left lexicographical ordering
[2] Symbol algebra

فرض کنید k یک میدان دلخواه و n_1، . . . ،n_r اعداد صحیح نامنفی باشند بطوریکه $n_i \geq 2$، برای هر i. قرار دهید $n = n_1 \dots n_r$ و ک.م.م $m = (n_1, \dots, n_r)$. بعلاوه فرض کنید که k شامل یک ریشه m-ام اولیه واحد ω_m است. قرار دهید $\omega_{n_i} = \omega_m^{m/n_i}$. بدین ترتیب ω_{n_i} یک ریشه n_i-ام اولیه واحد است. حال میدان

$$F = k((x_1))((y_1)) \dots ((x_r))((y_r))$$

را در نظر بگیرید و تعریف کنید

$$\mathcal{T}(k; n_1, \dots, n_r) = \left(\frac{x_1, y_1}{F, \omega_{n_1}}\right) \otimes_F \dots \otimes_F \left(\frac{x_r, y_r}{F, \omega_{n_r}}\right)$$

دراینصورت $\mathcal{T}(k; n_1, \dots, n_r)$ یک F-جبر تقسیم مرکزی ارزیابی شده از درجه n است. بعلاوه نسبت به این ارزیابی بطور کلی اهلی و کاملاً انشعابی است که گروه ارزیابی آن عبارت است از $\bigoplus_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{n_i}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{n_i}\mathbb{Z}\right)$ (رجوع کنید به گزاره ۸،۹ از [۹]).

مثال زیر نشان می‌دهد که اگر حلقه تقسیم مانده‌ای، یک میدان نباشد، آنگاه یک زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی لزوماً حلپذیر نیست.

مثال ۱. حلقه تقسیم چهارگان‌ها روی اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ را در نظر بگیرید. بنا بر آنچه که در بحث پیش از این مثال دیدیم، $D_1 = \mathbb{H}((x_1))((y_1))$ یک جبر تقسیم ارزیابی شده با مرکز $F = \mathbb{R}((x_1))((y_1))$، گروه ارزیابی $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ و حلقه تقسیم مانده‌ای $\mathbb{H}$ است. از طرف دیگر، باز هم از بحث پیش از این مثال نتیجه می‌شود که $\mathcal{T}(\mathbb{R}; 2)$ هم یک F-جبر تقسیم مرکزی کاملاً انشعابی با گروه ارزیابی $\frac{1}{2}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ و حلقه تقسیم مانده‌ای $\mathbb{R}$ است. بنابراین از قضیه ۱ در [۸] می‌توان نتیجه گرفت که $D = D_1 \otimes_F \mathcal{T}(\mathbb{R}; 2)$ خود یک F-جبر تقسیم مرکزی است و $\bar{D} = \mathbb{H}$. لذا $\bar{D}$ یک میدان نیست. از طرف دیگر واضح است که D زیرحلقه تقسیمی یکریخت با $\mathbb{H}$ دارد. اما بنا بر قضیه ۱۱،۱،۲ از [۱۰]، $\mathbb{H}^*$ دارای زیرگروهی یکریخت با $SL_2(\mathbb{Z}_5)$ است. بوضوح این گروه حلپذیر-بوسیله-متناهی است (زیرا خود گروهی متناهی است) اما حلپذیر نیست. لذا $\mathbb{H}^*$ و در نتیجه D^* شامل یک زیرگروه حلپذیر-بوسیله-متناهی غیر حلپذیر است.

فرض کنید که D یک F-جبر تقسیم مرکزی ارزیابی شده و بطور قوی اهلی باشد. اگر D تعویضپذیر نباشد، آنگاه با توجه به اینکه $\bar{F} \subseteq Z(\bar{D})$ خواهیم داشت $\deg(\bar{D})^2 \leq [\bar{D}:\bar{F}]$. بنابراین طبق (۲) داریم $\deg(D)^2 \geq \deg(\bar{D})^2 |\Gamma_D:\Gamma_F|$. این نشان می‌دهد که هرچقدر شاخص انشعاب بزرگ باشد، آنگاه $\deg(\bar{D})$ نسبت به آن کوچک است. در مثال زیر قصد داریم تا نشان دهیم که بین این نسبت و طول سری مشتق زیرگروه‌های حلپذیر D^* ارتباط معنی‌داری وجود ندارد. به عبارت

دیگر خواهیم دید در صورتیکه $\overline{D}$ میدان نباشد، با بزرگتر کردن شاخص انشعاب نمی‌توان طول سری مشتق زیرگروه‌های حلپذیر D^* را کنترل کرد.

برای عدد صحیح و نامنفی d فرض کنید که $dl(d)$ بیشترین طول ممکن برای سری مشتق یک گروه حلپذیر از مرتبه d باشد. از آنجاییکه گروه‌های حلپذیر متناهی با طول سری مشتق به دلخواه بزرگ وجود دارند، پس می‌توان نتیجه گرفت که در مثال بعد $dl(d)$ می‌تواند به قدر دلخواه بزرگ باشد.

مثال ۲. فرض کنید که d یک عدد صحیح نامنفی باشد. در اثبات لم ۴ از [۵] نشان داده شده است که یک k-جبر تقسیم مرکزی D از درجه d وجود دارد که D^* شامل یک زیرگروه حلپذیر با طول سری مشتق $dl(d)+1$ است. توجه به روند این اثبات نشان می‌دهد که می‌توان D را طوری در نظر گرفت که k شامل یک ریشه m-ام اولیه واحد ω_m برای هر m دلخواه باشد. حال فرض کنید که $\mathcal{D}=D\big((x_1)\big)\big((y_1)\big)\dots\big((x_r)\big)\big((y_r)\big)$. دراینصورت $\mathcal{D}$ یک جبر تقسیم غیر انشعابی از درجه d و همچنین با مرکز $F=k\big((x_1)\big)\big((y_1)\big)\dots\big((x_r)\big)\big((y_r)\big)$ است. علاوه بر این داریم $\Gamma_{\mathcal{D}}=\Gamma_F=\bigoplus_{j=1}^{2r}\mathbb{Z}$. حال تعریف کنید

$$\mathcal{M}=\mathcal{D}\otimes_F\mathcal{T}(k;\underbrace{m,\dots,m}_{r\ \text{تا}}).$$

بنابر قضیه ۱ در [۸]، $\mathcal{M}$ یک F-جبر تقسیم مرکزی از درجه dm^r است و همچنین داریم $\Gamma_{\mathcal{M}}=\bigoplus_{j=1}^{2r}\frac{1}{m}\mathbb{Z}$. پس $|\Gamma_{\mathcal{M}}:\Gamma_F|=m^{2r}$. علاوه بر این $\overline{\mathcal{M}}=D$ و لذا $\deg(\overline{\mathcal{M}})=d$. اما واضح است که $\mathcal{M}$ شامل زیرحلقه تقسیمی یکریخت با D است. بنابراین $\mathcal{M}^*$ شامل زیرگروه حلپذیری با طول سری مشتق $dl(d)+1$ است. توجه داشته باشید که می‌توانیم m^{2r} را در مقایسه با $dl(d)$ به قدر دلخواه بزرگ در نظر بگیریم.

در مثال زیر وجود یک جبر تقسیم از نوع مطالعه شده در قضیه ۷ را نشان می‌دهیم.

مثال ۳. فرض کنید که F یک میدان باشد که شامل هیچ ریشه p-ام اولیه واحدی نیست. همچنین فرض کنید که L/F یک توسیع دوری از درجه $m=p^n$ با $Gal(L/F)=\langle\sigma\rangle$ باشد. به عنوان مثال می‌توانید فرض کنید که $F=\mathbb{F}_q$ یک میدان متناهی با q عضو باشد با این ویژگی که $p\neq char\ F$ و $p\nmid q-1$ و L/F یک توسیع از درجه m باشد. فرض کنید که D مجموعه تمام سری‌های لوران صوری با ضرایب در L باشد، یعنی $D=L\big((x)\big)$. عمل جمع روی D را جمع معمولی سری‌ها در نظر گرفته و عمل ضرب را با رابطه $xa=\sigma(a)x$ تعریف کنید. دراینصورت D یک جبر تقسیم مرکزی با مرکز $F\big((x^m)\big)$ و از درجه m است (لم‌های ۳ و ۴ در فصل ۱ از [۱] را ببینید). اگر v ارزیابی استاندارد تعریف شده در بالا برای D باشد، آنگاه $\overline{D}\cong L$ و لذا $\overline{D}$ یک میدان است. حال از آنجاییکه برای هر $a\in L^*\subset D^*$ داریم $xax^{-1}=\sigma(a)\in L^*$ پس $x\in N_{D^*}(L^*)$. این نشان می‌دهد که $G=L^*\langle x\rangle$ یک زیرگروه D^* است که برای آن داریم $L^*\lhd G$. حال چون $G/L^*=\langle xL^*\rangle$ گروهی دوری است، پس G گروهی حلپذیر با طول سری مشتق 2 است.

تشکر و قدردانی. نگارنده بر خود لازم می‌داند که از داوران محترم که نظرات اصلاحی آنها در بهبود کیفیت علمی و نگارشی مقاله نقش مهمی داشته‌اند تشکر و قدردانی نماید.

References

1. P. K. Draxl, Skew fields, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 81, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
2. R. Hazrat, M. Mahdavi-Hezavehi and M. Motiee, Multiplicative groups of division rings, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, **114A** (1) (2014), 37-114.
3. M. Shirvani, On soluble-by-finite subgroups of division algebras, Journal of Algebra, **294** (1) (2005), 255-277.
4. B. A. F. Wehrfritz, On a recent theorem of M. Shirvani on subgroups of division algebras, Journal of Algebra, **300** (1) (2006), 25-34.
5. B. A. F. Wehrfritz, The derived length of a soluble subgroup of a finite-dimensional division algebra, Glasgow Mathematical Journal, **48** (2006), 119-124.
6. T. Hewett, Finite subgroups of division algebras over local fields, Journal of Algebra, **173** (1995), 518-548.
7. M. Motiee, On torsion subgroups of Whitehead groups of division algebras, Manuscripta Mathematica, **141** (2013), 717-726.
8. P. Morandi, The henselization of a valued division algebra, Journal of Algebra, **122** (1989), 232-243.
9. J. -P, Tignol, A. Wadsworth, Value functions on simple algebras, and associated graded rings, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2015.
10. M. Shirvani, B. A. F. Wehrfritz, Skew linear groups, London Mathematical Society Lecture note series, vol. 118, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.