



Kharazmi University

# The Meshless Local Petrov-Galerkin Method with Moving Kriging Interpolation for Pricing European Options under Time-Fractional Black-Scholes Equation

Maryam Rezaei<sup>1</sup> , Ahmad Reza Yazdanian<sup>2</sup>

1. Department of Financial Mathematics, Faculty of Finance Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran.  
E-mail: [rezaei.mirar@yahoo.com](mailto:rezaei.mirar@yahoo.com)
2. Department of Financial Mathematics, Faculty of Finance Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran.  
 E-mail: [yazdanian@khu.ac.ir](mailto:yazdanian@khu.ac.ir)

---

---

**Article Info****ABSTRACT**

---

---

**Article type:**

Research Article

**Article history:**

Received:  
28 August 2021  
Received in revised form:  
8 January 2023  
Accepted: 15 April 2023  
Published online:  
22 September 2023

**Keywords:**

European option,  
Time-fractional Black-Scholes equation,  
Meshless Local Petrov-Galerkin method,  
Moving Kriging interpolation.

**Introduction**

An important topic in options is its valuation. There are various mathematical models for option pricing, the most common and famous of which is the classical Black-Scholes model. But this model fails to show some market phenomena such as heavy tails, leptokurtic, volatility clustering, volatility skew, volatility smile and long memory. For this reason, in this work we intend to use the CEV model, which is used to show the implied volatility smile phenomenon in the market. Empirical evidence shows that in the market, as the volatility of the stock price increases, the stock price decreases. In 1975, Cox first introduced the following CEV model to show this inverse relationship between stock price and volatility

$$dS_t = rS_t dt + \delta S_t^{\beta+1} dW(t). \quad (1)$$

Using Ito's lemma, the following partial differential equation results from the stochastic differential equation (1):

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0. \quad (2)$$

Equation (2) cannot show the memory effect in financial markets and can only show the inverse relationship between the stock price and its volatility. Therefore, we replace the time derivative  $\frac{\partial V}{\partial t}$  with the fractional derivative  $\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha}$  in equation (2) under the assumption that the change in the option value follows a fractal transmission system. So that both the effect of the memory process and the inverse relationship between the stock price and its volatility, which are two important phenomena in financial markets, are considered simultaneously. Finally, the following fractional differential equation is obtained:

$$\frac{\partial^\alpha V(S, t)}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0. \quad (5)$$

Equation (5) does not have a closed form solution. Therefore, we seek to determine the option price using a numerical method. In this paper, we intend to use a numerical method based on MLPG to solve the time-fractional Black-Scholes equation (5).

---

---

---

### Material and methods

In this paper, we first use the MLPG method to discretize space. Then, we use implicit finite difference method to discretize time. In the following, we analyze the stability of the implicit finite difference method and MLPG2 using the matrix method.

### Results and discussion

We present various numerical results to evaluate the proposed MLPG approach. Then we compare the proposed method with other methods such as finite differences, binomial, and closed form solution for European options. The reported results demonstrate that there is a good agreement between approximate solution and exact solution.

### Conclusion

In this paper, we numerically valued a European option whose stock price dynamics follows the CEV model and the change in option value follows a fractal transmission system. To numerically solve the time-fractional Black-Scholes equation, we used the MLPG2 and implicit finite differences methods to discretize the option value and the time variable, respectively. The shape functions in the MLPG2 method are selected based on the moving kriging interpolation approach, which have the Kronecker delta property, and the Kronecker delta function is the test function. Also, we checked the stability of the proposed method using the matrix method and the stability analysis provides the relationship between the largest eigenvalue of the matrix and different parameters. The method proposed in the article can be used to value other options, including American and barrier options with time-dependent parameters which, for their numerical solution, it is enough to implement the theory proposed in the spatial discretization and time discretization section on equation (9). The only difference in the valuation of different options is in the boundary conditions (3) that each option has its own boundary conditions.

---

**How to cite:** Rezaei, M., Yazdanian, A. (2023). The Meshless Local Petrov-Galerkin Method with Moving Kriging Interpolation for Pricing European Options under Time-Fractional Black-Scholes Equation. *Mathematical Researches*, 9 (2), 220 - 242.



© The Author(s)

Publisher: Kharazmi University

---



## روش پترو-گالرکین موضعی بدون شبکه‌بندی با درونیابی کریگینگ متحرک برای ارزش‌گذاری اختیار اروپایی تحت معادله بلک-شولز زمان-کسری

مریم رضایی<sup>۱</sup>، احمد رضا یزدانیان<sup>۲</sup>✉

۱. گروه ریاضیات مالی، دانشکده علوم مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. پست الکترونیکی: [rezaei.mirar@yahoo.com](mailto:rezaei.mirar@yahoo.com)  
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضیات مالی، دانشکده علوم مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. پست الکترونیکی: [yazdanian@khu.ac.ir](mailto:yazdanian@khu.ac.ir)

| چکیده  | اطلاعات مقاله   |
|--|---|
| <p>در بازارهای مالی با افزایش قیمت سهام، نوسانات آن کاهش می‌یابد. مدل الاستیسیته ثابت واریانس<sup>۱</sup> (CEV)، یک مدل مناسب برای نشان دادن این رابطه معکوس بین قیمت سهام و نوسانات آن در بازارهای مالی است. در این مقاله فرض می‌کنیم که دینامیک قیمت سهام از مدل CEV تبعیت می‌کند. اما این مدل نمی‌تواند اثر روند حافظه<sup>۲</sup> را در بازارهای مالی نشان دهد. با توجه به اینکه مشتقات کسری، ابزارهای مناسبی برای توصیف اثر حافظه هستند، ویژگی‌های وراثتی موجود در اختیارهای معامله را می‌توانند به خوبی تفسیر و بیان کنند. بنابراین، تحت این فرض که تغییر در ارزش اختیار معامله از یک دستگاه انتقال فرکتال<sup>۳</sup> پیروی کند، ارزش‌گذاری اختیار اروپایی را بررسی می‌کنیم. هدف اصلی این مقاله، حل عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری مبتنی بر روش‌های پترو-گالرکین موضعی بدون شبکه‌بندی<sup>۴</sup> (MLPG) و تفاضلات متناهی غیرصریح، به ترتیب، برای گسسته‌سازی ارزش اختیار و متغیر زمان است. در این مطالعه، MLPG نوع دو (MLPG2) براساس روش درونیابی کریگینگ متحرک<sup>۵</sup> برای ساخت توابع شکل که دارای خاصیت دلتای کرونکر هستند، توسعه یافته است و دلتای کرونکر، تابع آزمون است. همچنین، پایداری روش پیشنهاد شده را با استفاده از روش ماتریسی بررسی می‌کنیم. مثال‌های عددی، دقت و کارایی روش را نشان می‌دهند.</p> | <p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۰۶</p> <p>تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۰/۱۸</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۱/۲۶</p> <p>تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۶/۳۱</p> <p>واژه‌های کلیدی:<br/>اختیار اروپایی، معادله بلک-شولز زمان-کسری، روش پترو-گالرکین موضعی بدون شبکه‌بندی، درونیابی کریگینگ متحرک.</p> |

استناد: رضایی، مریم؛ یزدانیان، احمدرضا؛ (۱۴۰۲). روش پترو-گالرکین موضعی بدون شبکه‌بندی با درونیابی کریگینگ متحرک برای ارزش‌گذاری اختیار اروپایی تحت معادله بلک-شولز زمان-کسری. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۲۲۰ - ۲۴۲.



© نویسندگان

ناشر: دانشگاه خوارزمی

<sup>1</sup> Constant elasticity of variance  
<sup>2</sup> Trend memory effect  
<sup>3</sup> Fractal transmission system  
<sup>4</sup> Meshless local Petrov-Galerkin  
<sup>5</sup> Moving Kriging interpolation

## مقدمه

اختیار معامله یکی از گسترده‌ترین مشتقات در بازار مالی هست و به خاطر خاصیت اهرمی که دارد هم در بازار صعودی و هم در بازار نزولی برای کاهش ریسک پرتفو استفاده می‌شود. از جمله این اختیارهای معامله می‌توان اختیار اروپایی، اختیار آمریکایی، اختیار آسیایی، اختیار مانع<sup>۶</sup>، و اختیار گذشته‌نگر<sup>۷</sup> را نام برد. یک مبحث مهم در اختیار معامله، بحث ارزش‌گذاری آن است. مدل‌های ریاضی مختلفی برای ارزش‌گذاری اختیار معامله وجود دارد که متداول‌ترین و معروف‌ترین آنها، مدل بلک-شولز کلاسیک هست. اما این مدل در نشان دادن برخی از پدیده‌های بازار مانند خصوصیات دم‌های سنگین<sup>۸</sup> [۸]، لپتوکورتیک<sup>۹</sup> [۲۳]، خوشه‌ای بودن نوسان‌پذیری<sup>۱۰</sup> [۴]، انحراف نوسان‌پذیری<sup>۱۱</sup> [۱۰]، لبخند نوسان‌پذیری<sup>۱۲</sup> [۷] و حافظه طولانی<sup>۱۳</sup> [۶] ناتوان است. از این جهت، در این کار قصد داریم از مدل CEV استفاده کنیم که برای نشان دادن پدیده لبخند نوسان‌پذیری ضمنی در بازار استفاده می‌شود. شواهد تجربی نشان می‌دهد که در بازار با افزایش نوسان‌پذیری قیمت سهام، قیمت سهام کاهش می‌یابد. در سال ۱۹۷۵، کاکس<sup>۱۴</sup> برای اولین بار مدل CEV را معرفی کرد تا این رابطه معکوس را بین قیمت سهام و نوسان‌پذیری آن نشان دهد [۷]

$$dS_t = rS_t dt + \delta S_t^{\beta+1} dW(t), \quad (1)$$

جایی که  $r$  نرخ بهره بدون ریسک و  $W(t)$  حرکت براونی استاندارد است.  $dS_t$  تغییر در قیمت سهام  $S_t$  در سرتاسر نمونه‌های کوچک زمان  $dt$  است.  $\sigma(S_t) = \delta S_t^\beta$  تابع نوسان‌پذیری محلی<sup>۱۵</sup>،  $\beta$  الاستیسیته نوسان‌پذیری و  $\delta$  پارامتر مقیاس ثابت نوسان اولیه لحظه‌ای<sup>۱۶</sup> در زمان  $t = 0$  را نشان می‌دهد ( $\sigma(0) = \sigma(S(0)) = \delta S^\beta(0)$ ). پارامتر مهم مدل فوق، الاستیسیته نوسان‌پذیری است که رابطه بین نوسان‌پذیری و قیمت سهام را کنترل می‌کند. توجه کنید که در حالت  $\beta > 0$ ، تابع نوسان‌پذیری محلی زمانی که  $S \rightarrow +\infty$ ، کراندار باقی نمی‌ماند. بنابراین،  $\beta < 0$  در نظر می‌گیریم که  $\sigma(S)$  کراندار باقی می‌ماند و هنگامی که قیمت سهام افزایش پیدا می‌کند،  $\sigma(S)$  کاهش می‌یابد. مدل فوق به‌طور گسترده در بسیاری از زمینه‌ها استفاده شده است از جمله: تعیین ارزش اختیارهای آمریکایی [۱۲]، [۲۸]، اختیارهای آسیایی [۱۹]، [۱۳]، اختیارهای مانع [۲۴]، [۲]، و اختیارهای گذشته‌نگر [۵]. علاوه بر این، در [۲۶] یک مدل تعمیم‌یافته CEV برای تعیین ارزش اختیار مانع دوگانه اروپایی به کار گرفته شده است. در این مقاله، دینامیک ارزش دارایی پایه به

<sup>6</sup> Barrier option

<sup>7</sup> Lookback option

<sup>8</sup> Heavy tails

<sup>9</sup> Leptokurtic

<sup>10</sup> Volatility clustering

<sup>11</sup> Volatility skew

<sup>12</sup> Volatility smile

<sup>13</sup> Long memory

<sup>14</sup> Cox

<sup>15</sup> Local volatility function

<sup>16</sup> Scale parameter fixing the initial instantaneous volatility

کمک مدل (۱) در نظر گرفته می‌شود. در حالت خاص، وقتی که  $\beta = 0$  باشد تابع نوسان‌پذیری  $\sigma(S) = \delta S^\beta$  ثابت است و معادله دیفرانسیل تصادفی (۱) همان مدل حرکت براونی هندسی خواهد بود که به کمک لم ایتو<sup>۱۷</sup> منتج به معادله دیفرانسیل بلک-شولز استاندارد می‌شود در غیر این صورت، معادله دیفرانسیل جزئی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0, \quad (۲)$$

جایی که  $V(S, t)$  بیانگر ارزش اختیار اروپایی با قیمت دارایی پایه  $S$  در لحظه  $t$  است. شرایط نهایی و مرزی برای اختیار خرید و فروش اروپایی، به ترتیب، عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} V(S, T) = \max(S - K, 0), & 0 < S < +\infty, \\ V(0, t) = 0, & \lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)}, & 0 < t < T, \end{cases} \quad (۳)$$

و

$$\begin{cases} V(S, T) = \max(K - S, 0), & 0 < S < +\infty, \\ V(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, & \lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (۴)$$

$K$  در روابط فوق بیانگر قیمت توافقی<sup>۱۸</sup> است. معادله‌ی (۲) نمی‌تواند اثر حافظه را در بازارهای مالی نشان دهد و فقط می‌تواند رابطه معکوس بین قیمت سهام و نوسانات آن را نشان دهد. اثر حافظه شامل اختلال و روند حافظه<sup>۱۹</sup> است که معادله دیفرانسیل تصادفی با حرکت براونی کسری<sup>۲۰</sup>، اختلال حافظه را توصیف می‌کند و نمی‌تواند برای مطالعه روند حافظه قیمت سهام استفاده شود. بنابراین، فرآیند روند حافظه را با استفاده از مشتق کسری توصیف خواهیم کرد که از دیگر ابزارهای مؤثر برای توصیف اثر حافظه است [۲۷]، [۲۵]. بنابراین، در معادله‌ی (۲)، مشتق زمان  $\frac{\partial V}{\partial t}$  با مشتق کسری  $\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha}$ ، تحت این فرض که تغییر در ارزش اختیار معامله از یک دستگاه انتقال فرکتال پیروی کند، جایگزین می‌کنیم (۱۴) را ببینید)، تا هم اثر روند حافظه و هم رابطه معکوس بین قیمت سهام و نوسانات آن که دو پدیده مهم در بازارهای مالی هستند، همزمان با هم در نظر گرفته شوند. در نهایت، معادله دیفرانسیل کسری زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^\alpha V(S, t)}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0, \quad (۵)$$

جایی که  $\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha}$ ، مشتق ریمان-لیوویل اصلاح شده<sup>۲۱</sup> است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

<sup>17</sup> Itô Lemma

<sup>18</sup> Strike price

<sup>19</sup> Noise and trend memory

<sup>20</sup> Fractional Brownian motion

<sup>21</sup> Modified Riemann-Liouville derivative

$$\frac{\partial^\alpha V(S, t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{V(S, \xi) - V(S, T)}{(\xi - t)^\alpha} d\xi, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{\partial V(S, t)}{\partial t}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

به کمک تغییر متغیر  $t = T - \tau$ ، معادله‌ی (۵) با شرایط نهایی و مرزی (۳) و (۴) به ترتیب برای اختیار خرید و فروش اروپایی، به مسأله مقدار اولیه<sup>۲۲</sup> تبدیل می‌شود. هر یک از مشتقات جزئی ظاهر شده در معادله‌ی (۵) با به کارگیری تغییر متغیر  $x = \ln(S)$  و  $V(S, t) = U(x, \tau)$  به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha V(S, t)}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{V(S, \xi) - V(S, T)}{(\xi - t)^\alpha} d\xi = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \frac{1}{(\tau - \zeta)^\alpha} \frac{\partial U(x, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta \quad (۶) \\ &= -{}_0^C D_\tau^\alpha U(x, \tau), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} = e^{-2x} \left( \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad (۷)$$

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial S} = e^{-x} \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x}. \quad (۸)$$

${}_0^C D_\tau^\alpha U(x, \tau)$  مشتق کسری کاپوتوی<sup>۲۳</sup> تابع  $U(x, \tau)$  است. اکنون مشتقات جزئی (۶)، (۷) و (۸) را در معادله‌ی (۵) جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$-{}_0^C D_\tau^\alpha U(x, \tau) + \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x} \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x} \right) \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x} - rU(x, \tau) = 0, \quad (۹)$$

با شرایط اولیه و مرزی زیر، به ترتیب برای اختیار خرید و فروش اروپایی

$$\begin{cases} U(x, 0) = \max(e^x - K, 0), & x_{\min} < x < x_{\max}, \\ U(x_{\min}, \tau) = 0, & \lim_{S \rightarrow x_{\max}} U(x_{\max}, \tau) = e^x - Ke^{-r\tau}, \quad 0 < \tau < T, \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(x, 0) = \max(K - e^x, 0), & x_{\min} < x < x_{\max}, \\ U(x_{\min}, \tau) = Ke^{-r\tau}, & \lim_{S \rightarrow x_{\max}} U(x_{\max}, \tau) = 0, \quad 0 < \tau < T. \end{cases} \quad 9$$

<sup>22</sup> Initial value problem

<sup>23</sup> Caputo fractional derivative

از یک روش عددی به دنبال تعیین ارزش اختیار معامله هستیم. پیشتر معادله‌ی (۹) برای ارزش‌گذاری اختیار مانع دوگانه اروپایی به کمک طرح تفاضلی غیرصریح در حالتی که سود تقسیمی پرداخته می‌شود و پارامترها به صورت وابسته به زمان هستند، بکار برده شده است [۲۴]. در این مقاله، قصد داریم از یک روش عددی مبتنی بر MLPG برای حل معادله بلک-شولز زمان-کسری (۹) استفاده کنیم. در دهه‌های اخیر، روش بدون شبکه‌بندی، به دلیل انعطاف‌پذیری آنها در حل مسائل علوم کاربردی و مهندسی، مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. این روش نیازی به شبکه‌بندی ندارد و می‌تواند دقت بالایی ایجاد کند، زیرا در ناحیه‌هایی که اصلاح بیشتری لازم است، گره‌ها به راحتی می‌توانند اضافه شوند. علاوه بر این، روش بدون شبکه‌بندی می‌تواند توابع شکل مرتبه بالا را بسازد. براساس فرم دستگاه معادله، روش‌های بدون شبکه در سه دسته طبقه‌بندی می‌شوند. دسته اول شامل روش‌های بدون شبکه‌بندی مبتنی بر فرم قوی دستگاه معادلات است که در آنها گسسته‌سازی مستقیماً از معادلات دیفرانسیل حاکم انجام می‌شود، مانند روش تفاضلات متناهی کلی [۱۵]، روش هیدرودینامیکی ذرات روان [۱۷] و سایر روش‌های هم‌محلی بدون شبکه‌بندی. دسته دوم شامل روش‌های بدون شبکه‌بندی مبتنی بر فرم ضعیف دستگاه معادلات مانند روش گالرکین بدون عنصر [۳]، روش MLPG [۱]، روش درونیایی نقطه‌ای [۱۶] و غیره است. دسته سوم مربوط به روش‌های بدون شبکه‌بندی مبتنی بر ترکیب فرم‌های ضعیف و قوی است، مانند روش فرم ضعیف-قوی بدون شبکه‌بندی. تفاوت عمده در این روش‌های بدون شبکه‌بندی در انتخاب تکنیک درونیایی است. روش MLPG برای اولین بار توسط آتلوری و زو<sup>۲۴</sup> کشف شده است [۱]. این روش، یک روش بدون شبکه‌بندی و براساس فرم ضعیف محاسبه شده در سرتاسر یک زیر-دامنه موضعی و تقریب کمترین مربعات متحرک<sup>۲۵</sup> (MLS) است. روش MLPG یکی از مناسب‌ترین روش‌هایی است که در آن از روش MLS برای ساخت توابع شکل استفاده می‌شود. اگرچه روش MLPG برای بسیاری از مسائل به کار رفته است، اما یک ضعف در هنگام استفاده از این روش به دلیل اشکال در اجرای شرایط مرزی ضروری وجود دارد زیرا توابع شکل MLS فاقد خاصیت دلتای کرونکر هستند. بنابراین برای غلبه بر این مشکل، رویکرد درونیایی کریگینگ متحرک پیشنهاد شده است [۳۲]. این رویکرد از مقادیر گره‌ای در دامنه پشتیبانی محلی برای ساخت توابع شکل با خاصیت دلتای کرونکر استفاده می‌کند. همچنین، رویکرد درونیایی کریگینگ برای مسائل کاربردی به خوبی کار می‌کند. برخی مطالعات انجام شده به کمک روش MLPG مبنی بر درونیایی کریگینگ متحرک برای تعیین ارزش اختیار معامله در [۲۱] و [۲۲] می‌بینید.

سازمان‌دهی مقاله بدین شرح است: در بخش ۲، به تشریح توابع شکل کریگینگ متحرک و خاصیت‌های آن می‌پردازیم. سپس، گسسته‌سازی معادله حاکم را در بخش‌های ۳ و ۴، به ترتیب، نسبت به متغیر  $S$  و  $t$  انجام خواهیم داد. در بخش ۵، پایداری روش را بررسی خواهیم کرد. در بخش ۶، نتایج عددی حاصل از به کارگیری روش را ارائه می‌دهیم. سرانجام، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی ارائه خواهد شد.

<sup>24</sup> Atluri and Zhu<sup>25</sup> Moving least squares

## توابع شکل کریگینگ متحرک

## درونیایی کریگینگ متحرک

درونیایی کریگینگ، یک تکنیک زمین آماری<sup>۲۶</sup> شناخته شده برای درونیایی فضائی در زمین‌شناسی<sup>۲۷</sup> و استخراج معدن<sup>۲۸</sup> است [۲۸]. مشابه با MLS، رویکرد کریگینگ متحرک می‌تواند برای هر زیر-دامنه  $\Omega_x \subseteq \Omega$  توسعه داده شود. تحت [۹]، تابع  $u(x)$  در دامنه مسأله  $\Omega$  می‌تواند با  $u^h(x)$  تقریب زده شود. برای هر زیر-دامنه، تقریب موضعی به صورت زیر می‌تواند تعریف شود:

$$u^h(x) = [p^T(x)A + r^T(x)B]\hat{U}, \quad \forall x \in \Omega_x, \quad (10)$$

یا

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x)\hat{u}_j = \Phi(x)\hat{U}, \quad \forall x \in \Omega_x,$$

که  $\hat{U} = [\hat{u}(x_1), \hat{u}(x_2), \dots, \hat{u}(x_N)]^T$  یک مقدار برداری از تابع در دامنه  $\Omega$  است.  $\Phi(x)$  یک بردار  $1 \times N$  از توابع شکل کریگینگ متحرک<sup>۲۹</sup> است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_j(x) = \sum_{l=1}^m p_l(x)A_{lj} + \sum_{w=1}^N r_w(x)B_{wj}. \quad (11)$$

ماتریس‌های  $A$  و  $B$  به صورت‌های زیر تعیین می‌شود:

$$A = (P^T R^{-1} P)^{-1} P^T R^{-1}, \quad B = R^{-1} (I - PA) \quad (12)$$

که  $I$  ماتریس واحد  $N \times N$  است و  $p(x)$  یک بردار چندجمله‌ای با  $m$  تابع پایه‌ای داده شده زیر است ( $m$  بیانگر تعداد توابع پایه‌ای است):

$$p(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]^T. \quad (13)$$

توابع پایه‌ای که مورد استفاده قرار می‌گیرند به صورت زیر است.

پایه خطی در فضای یک‌بعدی:

$$p^T(x) = \{1, x\}, \quad m = 2,$$

<sup>26</sup> Geostatic technique

<sup>27</sup> Geology

<sup>28</sup> Mining

<sup>29</sup> Moving Kriging shape function



پایه خطی در فضای دوبعدی:

$$p^T(x) = \{1, x, y\}, \quad m = 3,$$

پایه چندجمله‌ای درجه دوم در فضای یک‌بعدی:

$$p^T(x) = \{1, x, x^2\}, \quad m = 3, \quad (14)$$

پایه چندجمله‌ای درجه دوم در فضای دوبعدی:

$$p^T(x) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}, \quad m = 6,$$

پایه چندجمله‌ای مکعبی در فضای یک‌بعدی:

$$p^T(x) = \{1, x, x^2, x^3\}, \quad m = 4,$$

پایه چندجمله‌ای مکعبی در فضای دوبعدی:

$$p^T(x) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}, \quad m = 10.$$

بعد ماتریس  $P$ ،  $N \times m$  است و مقادیر جمع‌آوری شده توابع پایه‌ای چندجمله‌ای (13) را به صورت زیر نشان می‌دهد:

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

$r(x)$  در معادله‌ی (۱۰) فرم زیر را دارد:

$$r(x) = [\gamma(x, x_1), \gamma(x, x_2), \dots, \gamma(x, x_N)]^T,$$

که  $\gamma(x_i, x_j)$  تابع همبستگی<sup>۳۰</sup> بین هر جفت از نقاط  $x_i$  و  $x_j$  است و به کواریانس<sup>۳۱</sup> مقدار تابع  $u(x)$  تعلق دارد، یعنی،

$$\gamma(x_i, x_j) = \text{cov}[u(x_i), u(x_j)], \quad \gamma(x, x_j) = \text{cov}[u(x), u(x_j)].$$

همچنین، ماتریس همبستگی  $R[\gamma(x_i, x_j)]_{N \times N}$  در فرم صریح زیر داده شده است:

$$R = \begin{bmatrix} \gamma(x_1, x_1) & \cdots & \gamma(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(x_N, x_1) & \cdots & \gamma(x_N, x_N) \end{bmatrix}.$$

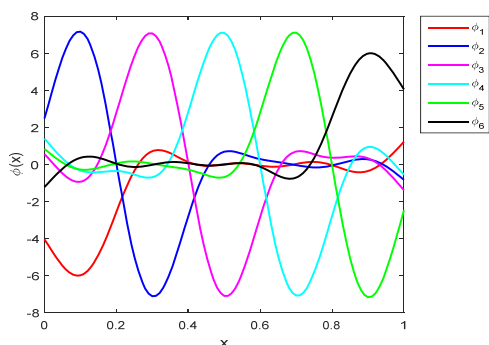
<sup>30</sup> Correlation function

<sup>31</sup> Covariance

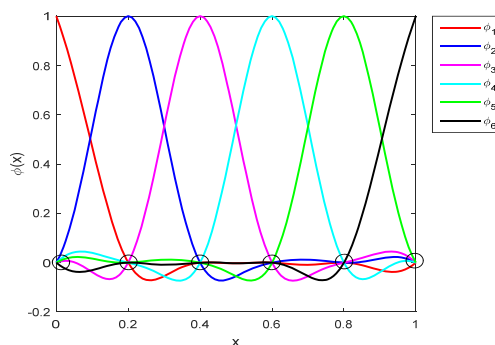
توابع همبستگی مختلف زیادی می‌تواند برای  $R$  استفاده شود اما تابع گاوسی<sup>۳۲</sup> با پارامتر همبستگی<sup>۳۳</sup>  $\theta$  اغلب و به‌طور گسترده مناسب‌ترین مدل است زیرا این مدل دارای پیوستگی بالاست،

$$\gamma(x_i, x_j) = e^{-\theta r_{ij}^2}, \quad (16)$$

جایی که  $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$  و  $\theta > 0$  به ترتیب تابع همبستگی و پارامتر همبستگی (پارامتر شکل<sup>۳۴</sup>) هستند و با دقت برای مناسب کردن مدل انتخاب می‌شود. همچنان که مطالعه روی کارهای گذشته نشان می‌دهد که پارامتر همبستگی، تأثیر مهمی روی جواب دارد ([۱۲]، [۱۳] - [۲۹] را ببینید). در این کار، توابع پایه درجه دوم (۱۴) برای همه محاسبات عددی استفاده شده است. بعلاوه، تابع شکل کریگینگ متحرک در یک‌بعدی، مشتق مرتبه اول و دوم آن، و تابع شکل کریگینگ متحرک برای پارامترهای همبستگی مختلف، در شکل ۱ نشان داده شدند.

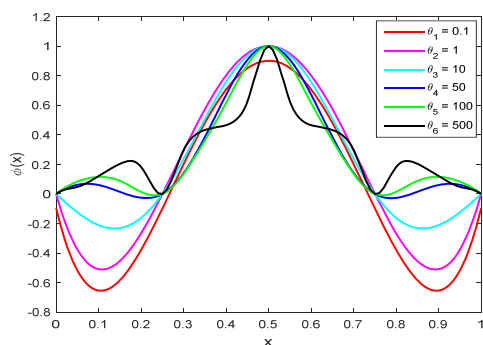


(ب) مشتق مرتبه اول تابع شکل کریگینگ متحرک برای  $N = 6$



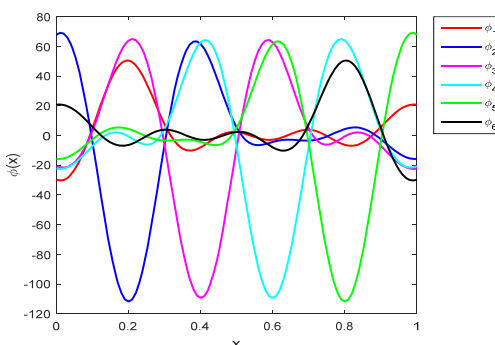
(الف) تابع شکل کریگینگ متحرک برای  $N = 6$  و  $\theta = 50$

$\theta = 50$  , 6



(د) تابع شکل کریگینگ متحرک برای پارامترهای همبستگی

مختلف با  $N = 5$



(ج) مشتق مرتبه دوم تابع شکل کریگینگ متحرک برای  $N = 6$

و  $\theta = 50$

شکل ۱. تابع شکل کریگینگ متحرک یک‌بعدی و مشتقات آن به کمک توابع پایه درجه دوم ( $M = 3$ ).

<sup>32</sup> Gaussian function

<sup>33</sup> Correlation parameter

<sup>34</sup> Shape parameter

قرار دهید  $C^{k_1}(\Omega)$  فضای توابع  $k_1$ -م به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر روی  $\Omega$  باشد. اگر  $\gamma(x, x_i) = C^{k_1}(\Omega)$  و  $p_j(x) \in C^{k_2}(\Omega)$  که  $i = 1, 2, \dots, N$  و  $j = 1, 2, \dots, m$ ، آنگاه  $\phi_i(x) \in C^k(\Omega)$  با  $k = \min(k_1, k_2)$ . مشتقات جزئی تابع شکل  $\Phi(x)$  نسبت به  $x_i$  به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\Phi_{,i}(x) &= p_i^T(x)A + r_{,i}^T(x)B, \\ \Phi_{,ii}(x) &= p_{,ii}^T(x)A + r_{,ii}^T(x)B,\end{aligned}$$

که  $(\cdot)_{,i}$  و  $(\cdot)_{,ii}$ ، به‌ترتیب، نشان دهنده مشتق مرتبه اول و دوم مکان هستند. مشتقات جزئی تابع شکل را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\phi_{j,i}(x) = \sum_{l=1}^m p_{l,i}(x)A_{lj} + \sum_{w=1}^N r_{w,i}(x)B_{wj},$$

### پارامترهای همبستگی

تابع همبستگی گاوسی در معادله‌ی (۱۶) به شدت نسبت به پارامتر همبستگی حساس است که مشخص می‌شود مقدار آن با هیچ جنبه فیزیکی مسأله ارتباط ندارد. در عمل، به‌دست‌آوردن مقادیر بهینه پارامتر همبستگی برای همه مسائل بسیار دشوار است. این مقدار از یک مسأله به مسأله دیگر متفاوت است و از نظر تئوری هیچ قانون دقیقی برای بدست آوردن یک مقدار بهینه منفرد برای همه مسائل وجود ندارد. از این جهت، ارزیابی جایگزین پارامتر همبستگی به گونه‌ای جالب توجه است که باید دامنه قابل قبولی از نظر اندازه برای اطمینان از سازگاری در کیفیت نتایج وجود داشته باشد.

### خاصیت دلتای کرونکر

خاصیت دلتای کرونکر<sup>۲۵</sup> ویژگی ذاتی توابع شکل کریگینگ متحرک است که در تقریب‌های کلی MLS یافت نمی‌شود. بگذارید معادله‌ی (۱۱) را دوباره به شکل دیگری در گره مورد نظر با  $x = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) بنویسیم:

$$\phi_j(x_i) = \sum_{l=1}^m p_l(x_i)A_{lj} + \sum_{w=1}^N r_w(x_i)B_{wj},$$

یا

$$[\phi_j(x_i)] = PA + RB, \quad (17)$$

که  $A$ ،  $B$ ،  $P$  و  $R$  در بالا تعریف شده‌اند. با اضافه کردن معادله‌ی (۱۲) در معادله‌ی (۱۷) نتیجه می‌دهد:

$$[\phi_j(x_i)] = PA + RR^{-1}(I - PA) = I. \quad (18)$$

در نتیجه، معادله‌ی (۱۸) منجر به دلتای کرونکر شناخته شده می‌شود:

<sup>35</sup> Kronecker delta property

$$\phi_j(x_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}, \quad j, i = 1, 2, \dots, N.$$

### خاصیت سازگاری

سازگاری درون‌یابی کریگینگ متحرک این است که می‌تواند هر تابعی را بر اساس توابع پایه دقیقاً تولید کند. اگر این روش بتواند چند جمله‌ای‌ها تا مرتبه  $k$ -ام را تولید کند، گفته می‌شود که این روش دارای سازگاری مرتبه  $k$ -ام است. برای اطمینان از کامل بودن، این ویژگی به‌طور خلاصه در اینجا نقل شده است. اگر  $\hat{u}$  از چند جمله‌ای درجه کمتر یا برابر از  $m$  منتج شده باشد، یعنی

$$u = P\alpha,$$

جایی که  $P$  در (۱۵) داده شده است و  $\alpha$  ضرایب دلخواه هستند، تقریب دقیق است. تقریب  $u$  که در زیر به دست می‌آید (به‌عنوان مثال، برای جزئیات [۹] را ببینید)، داریم:

$$u^h(x) = p^T(x)\alpha = u(x).$$

به طور خاص، اگر پایه شامل تمام جملات ثابت و خطی باشد، دوباره چند جمله‌ای خطی کلی دقیقاً تولید می‌شود، به عنوان مثال

$$\sum_{j=1}^N \phi_j(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^N \phi_j(x)x_j = x, \quad \sum_{j=1}^N \phi_j(x)y_j = y.$$

### گسسته‌سازی مکانی

در این بخش از روش MLPG برای گسسته‌سازی مکان استفاده می‌کنیم. فرم موضعی ضعیف را در سرتاسر زیردامنه موضعی<sup>۳۶</sup> ایجاد می‌کنیم که ناحیه‌های کوچک در نظر گرفته شده برای هر گره در دامنه سراسری<sup>۳۷</sup> است. معادله بلک-شولز زمان-کسری (۹) را در نظر بگیرید. فرم موضعی ضعیف برای معادله‌ی (۹) در هر نقطه‌ی  $\Omega_x^i \in \mathcal{X}_i$  با تابع آزمون<sup>۳۸</sup>  $v_i(x)$  می‌تواند وزن دار شود و در سرتاسر یک زیر-دامنه موضعی انتگرال گرفته شود. بنابراین، معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega_x^i} \left( -\zeta D_\tau^\alpha U + \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x} \right) \frac{\partial U}{\partial x} - rU \right) v_i(x) d\Omega = 0, \quad (19)$$

که در آن یک تابع آزمون است که برای هر گره، قابل توجه است. با بازنویسی معادله‌ی (۱۹) داریم:

$$-\int_{\Omega_x^i} \zeta D_\tau^\alpha U(x, \tau) v_i(x) d\Omega + \int_{\Omega_x^i} \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x} U_{,xx}(x, \tau) v_i(x) d\Omega$$

<sup>36</sup> Local sub-domain

<sup>37</sup> Global domain

<sup>38</sup> Test function

$$+ \int_{\Omega_x^i} \left( r - \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x} \right) U_{,x}(x, \tau) v_i(x) d\Omega - \int_{\Omega_x^i} r U(x, \tau) v_i(x) d\Omega = 0,$$

جایی که  $U_{,x} = \frac{\partial U}{\partial x}$  و  $U_{,xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  با جایگذاری تابع آزمایش  $U^h(x, \tau) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \hat{u}_j(\tau)$  به جای  $U$  در معادله‌ی فوق داریم:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_x^i} v_i(x) \sum_{j=1}^N \phi_j(x) {}_0^C D_\tau^\alpha \hat{u}_j(\tau) d\Omega + \frac{\delta^2}{2} \int_{\Omega_x^i} e^{2\beta x} v_i(x) \sum_{j=1}^N \phi_{j,xx}(x) \hat{u}_j(\tau) d\Omega \\ & + \int_{\Omega_x^i} \left( r - \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x} \right) v_i(x) \sum_{j=1}^N \phi_{j,x}(x) \hat{u}_j(\tau) d\Omega - r \int_{\Omega_x^i} v_i(x) \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \hat{u}_j(\tau) d\Omega = 0, \quad (20) \end{aligned}$$

جایی که  $N$  تعداد گره‌های اطراف نقطه  $x$  است که روی  $U(x, \tau)$  تأثیر دارد و  $\hat{u}_j(\tau)$  مقدار اختیار در زمان  $\tau$  است. تابع شکل  $\phi_j(x)$  با درونیابی کریگینگ متحرک ساخته می‌شود که دارای خاصیت دلتای کرونکر است. در نتیجه باعث افزایش دقت ساخت شکل گره می‌شود. با بازنویسی معادله‌ی (۲۰) معادله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_x^i} \phi_j(x) {}_0^C D_\tau^\alpha \hat{u}_j(\tau) v_i(x) d\Omega + \frac{\delta^2}{2} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_x^i} e^{2\beta x} \phi_{j,xx}(x) \hat{u}_j(\tau) v_i(x) d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_x^i} \left( r - \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x} \right) \phi_{j,x}(x) \hat{u}_j(\tau) v_i(x) d\Omega - r \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_x^i} \phi_j(x) \hat{u}_j(\tau) v_i(x) d\Omega = 0. \quad (21) \end{aligned}$$

از آنجایی که در این کار از MLPG2 استفاده شد، پس تابع آزمون توسط تابع دلتای کرونکر انتخاب می‌شود:

$$v_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

تابع آزمون، اهمیت را برای هر گره در زیر-دامنه تعریف می‌کند. در این حالت، تابع آزمون  $v_i(x)$  را در معادله‌ی (۲۱) جایگزین می‌کنیم و سپس در سرتاسر زیر-دامنه  $\Omega_x^i$  انتگرال می‌گیریم، نتیجه زیر را می‌دهد:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^N \phi_j(x_i) {}_0^C D_\tau^\alpha \hat{u}_j(\tau) \\ & + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x_i} \phi_{j,xx}(x_i) + \left( r - \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x_i} \right) \phi_{j,x}(x_i) \right] \hat{u}_j(\tau) = 0 \quad (22) \end{aligned}$$

معادله‌ی (۲۲) به صورت فرم ماتریسی زیر می‌تواند نوشته شود:

$$-A_0^c D_\tau^\alpha \hat{U} + B\hat{U} = 0, \quad (23)$$

جایی که  $\hat{U} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_N]^T$ ,  $B = [B_{ij}]_{N \times N}$ ,  $A = [A_{ij}]_{N \times N}$

$$A_{ij} = \phi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

و

$$B_{ij} = \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x_i} \phi_{j,xx}(x_i) + \left( r - \frac{\delta^2}{2} e^{2\beta x_i} \right) \phi_{j,x}(x_i) - r \phi_j(x_i).$$

از آن جا که تابع شکلی که توسط درونیایی کریگینگ متحرک ساخته می‌شود، خاصیت دلتای کرونگر را برآورده می‌کند، پس  $A$  ماتریس همانی است. بنابراین، معادله‌ی (۲۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$-{}^c_0 D_\tau^\alpha \hat{U} + B\hat{U} = 0. \quad (24)$$

### گسسته‌سازی زمانی

برای حل عددی اختیار اروپایی از روش تفاضلات متناهی غیرصریح استفاده می‌کنیم. به جای مشتق زمان کسری در معادله‌ی (۲۴)، تقریب تفاضلی زیر را قرار می‌دهیم ([۲۰]):

$${}^c_0 D_\tau^\alpha \hat{U}(\tau_n) = \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \sum_{k=1}^n \psi_k^{(\alpha)} (\hat{U}^{n-k+1} - \hat{U}^{n-k}) + O((\Delta\tau)^{2-\alpha}), \quad (25)$$

با

$$\varphi_{\alpha, \Delta\tau} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)(\Delta\tau)^\alpha},$$

$$\psi_k^{(\alpha)} = k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

اکنون تقریب تفاضلی (۲۵) را در معادله‌ی (۲۴) جایگذاری می‌کنیم:

$$-\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \sum_{k=1}^n \psi_k^{(\alpha)} (\hat{U}^{n-k+1} - \hat{U}^{n-k}) + B\hat{U}^n = 0. \quad (27)$$

معادله‌ی (۲۷) را برای  $n = 1$  و  $n \geq 2$  مجدداً بازنویسی می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} (B - \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} I) \hat{U}^1 = -\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} \hat{U}^0, & n = 1, \\ (B - \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} I) \hat{U}^n = \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1}^{(\alpha)} - \psi_k^{(\alpha)}) \hat{U}^{n-k} - \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_n^{(\alpha)} \hat{U}^0, & n \geq 2. \end{cases}$$

با استفاده از فرم ماتریسی فوق، جواب تقریبی معادله‌ی (۵) در هر سطر زمانی به دست می‌آید.

### آنالیز پایداری

در این بخش، با استفاده از روش ماتریسی<sup>۴۰</sup> تجزیه و تحلیل پایداری روش تفاضلات متناهی غیرصریح و MLPG2 را بررسی می‌کنیم. یک تغییر کوچک در سطر زمانی  $n$ -ام،  $e^n = U^n - \tilde{U}^n$  است، جایی که  $U^n$  جواب دقیق و  $\tilde{U}^n$  جواب عددی معادله‌ی (۹) هستند. معادله‌ی خطا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} (\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} I - B)e^1 = -\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} e^0, & n = 1, \\ (\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} I - B)e^n = \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_n^{(\alpha)} e^0 - \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1}^{(\alpha)} - \psi_k^{(\alpha)}) e^{n-k}, & n \geq 2. \end{cases} \quad (28)$$

لم ۱. ضرایب  $\psi_n^{(\alpha)}$  در خواص زیر صدق می‌کنند

$$\psi_n^{(\alpha)} > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (I)$$

$$1 = \psi_1^{(\alpha)} > \psi_2^{(\alpha)} > \dots > \psi_n^{(\alpha)}, \quad \psi_n^{(\alpha)} \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow +\infty \quad (II)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k^{(\alpha)} - \psi_{k+1}^{(\alpha)}) + \psi_n^{(\alpha)} = 1 \quad (III)$$

اثبات. با توجه به (۲۶) به وضوح (I) و (II) برقرار هستند. اما برای اثبات (III) داریم:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k^{(\alpha)} - \psi_{k+1}^{(\alpha)}) + \psi_n^{(\alpha)} = [(1 - \psi_2^{(\alpha)}) + (\psi_2^{(\alpha)} - \psi_3^{(\alpha)}) + \dots + (\psi_{n-1}^{(\alpha)} - \psi_n^{(\alpha)})] + \psi_n^{(\alpha)} = 1.$$

اثبات کامل شد.

در حالت  $n = 1$ ، با ضرب دو طرف معادله‌ی خطای (۲۸) در  $(\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} I - B)^{-1}$  داریم:

$$e^1 = G e^0,$$

جایی که  $G = -\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} (\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} I - B)^{-1}$  می‌توان مشاهده کرد که اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس  $G$

شرط زیر را برآورده کند، پایداری روش اطمینان حاصل می‌شود:

$$\left| \frac{-\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)}}{\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} - \lambda} \right| \leq 1,$$

جایی که  $\lambda$  مقدار ویژه<sup>۴۱</sup> ماتریس  $B$  است. اگر  $\rho(G) < 1$  و  $\text{Re}(\lambda)_{\max} < 0$ ، در نتیجه  $e^1 < e^0$ ، شعاع

طیفی<sup>۴۲</sup> ماتریس  $G$  را نشان می‌دهد.

برای حالت  $n \geq 2$ ، به کمک استقراء ریاضی فرض می‌کنیم که

<sup>40</sup> Matrix method

<sup>41</sup> Eigenvalue

<sup>42</sup> Spectral radius

$$e^k \leq e^0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

و ثابت می‌کنیم  $e^n < e^0$ . با استفاده از لم ۱ و رابطه‌ی (۲۸) داریم:

$$\begin{aligned} (\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} I - B) e^n &= \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_n^{(\alpha)} e^0 - \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1}^{(\alpha)} - \psi_k^{(\alpha)}) e^{n-k} \\ &\leq \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_n^{(\alpha)} e^0 - \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1}^{(\alpha)} - \psi_k^{(\alpha)}) e^0 = \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \left( \psi_n^{(\alpha)} - \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1}^{(\alpha)} - \psi_k^{(\alpha)}) \right) e^0 \\ &= \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \left( \psi_n^{(\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k^{(\alpha)} - \psi_{k+1}^{(\alpha)}) \right) e^0 = \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} e^0. \end{aligned}$$

با تقسیم طرفین رابطه‌ی فوق بر  $(\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} I - B)^{-1}$  به‌دست می‌آوریم:

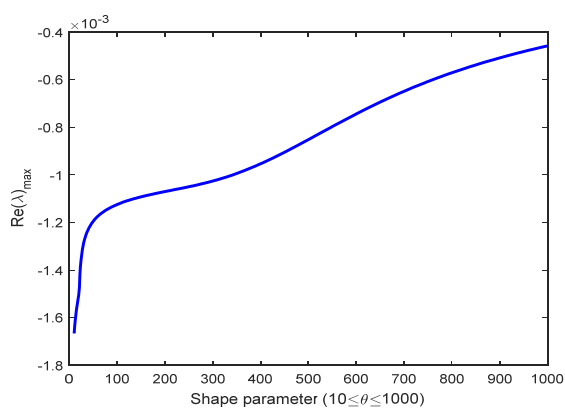
$$e^n \leq \varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} (\varphi_{\alpha, \Delta\tau} \psi_1^{(\alpha)} I - B)^{-1} e^0,$$

یا

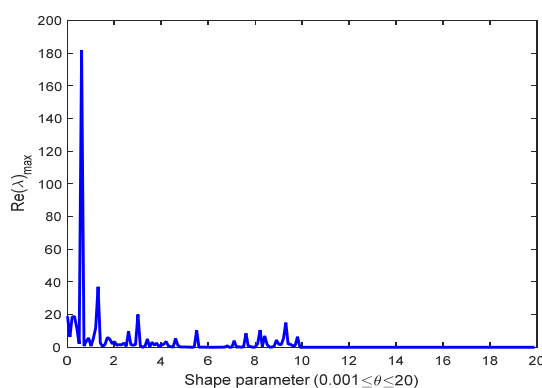
$$e^n \leq G e^0.$$

اگر  $\rho(G) < 1$  و  $\text{Re}(\lambda)_{\max} < 0$ ، در نتیجه  $e^n < e^0$ ، و روش عددی پایدار است.

مقادیر ویژه ماتریس  $B$  به پارامتر شکل  $\theta$  و پارامتر فاصله‌گذاری شبکه  $h$ ؛  $(h; h)$  حداقل فاصله بین هر دو نقطه در دامنه تعریف می‌شود (بستگی دارد). از آنجا که یافتن یک رابطه صریح بین مقدار ویژه ماتریس  $B$ ، پارامتر شکل  $\theta$  و تعداد گره‌ها امکان‌پذیر نیست، این وابستگی را به‌صورت عددی بررسی کردیم، همانطور که در شکل‌های ۲ و ۳ آورده شده است.



(ب)

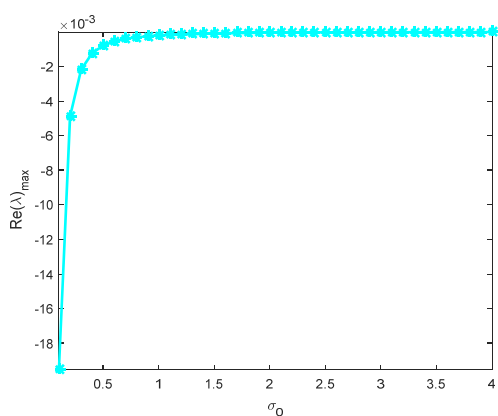


(الف)

شکل ۲. رابطه بین  $\text{Re}(\lambda)_{\max}$  و پارامتر شکل در دو حالت  $0.001 \leq \theta \leq 20$  و  $10 \leq \theta \leq 1000$  برای  $\sigma_0 = 0.4$ .

$$h = 0.1 \text{ و } \beta = -0.2 \text{ و } r = 0.1$$

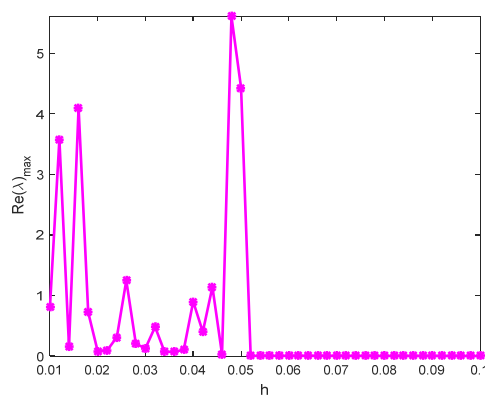




شکل ۲. رابطه بین  $\text{Re}(\lambda)_{\max}$  و نوسان‌پذیری اولیه

لحظه‌ای ( $\sigma_0$ ) برای  $\beta = r = 0.1$ ،  $h = 0.1$

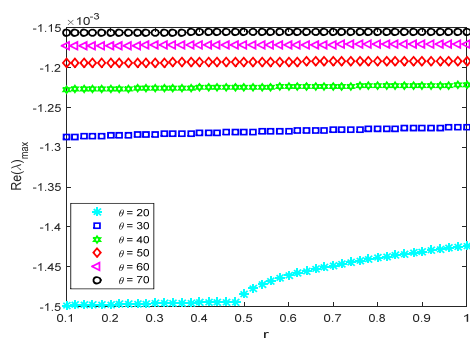
و  $\theta = 40$  و  $-0.2$ .



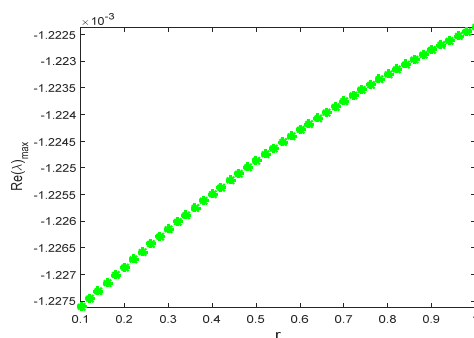
شکل ۳. رابطه بین  $\text{Re}(\lambda)_{\max}$  و طول شبکه‌بندی

مکان ( $h$ ) برای  $\beta = -0.2$ ،  $r = 0.1$ ،  $\sigma_0 = 0.4$

و  $\theta = 40$ .

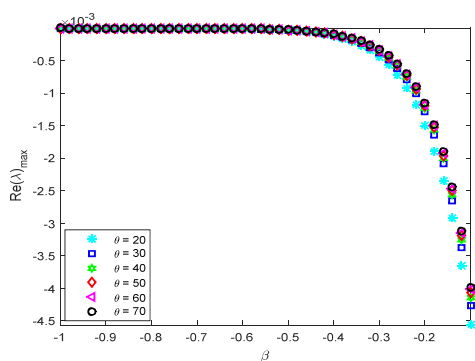


(ب)

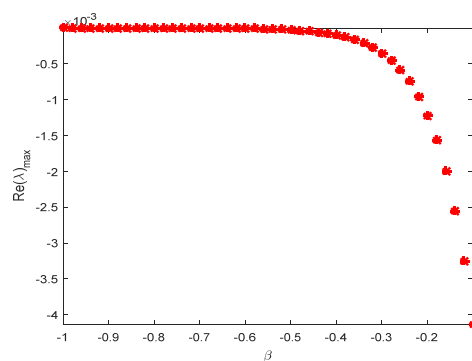


(الف)

شکل ۴. رابطه بین  $\text{Re}(\lambda)_{\max}$  و نرخ بهره بدون ریسک ( $r$ ) به ازای  $\theta$ -های مختلف.



(ب)



(الف)

شکل ۵. رابطه بین  $\text{Re}(\lambda)_{\max}$  و الاستیسیته نوسان‌پذیری ( $\beta$ ) به ازای  $\theta$ -های مختلف.

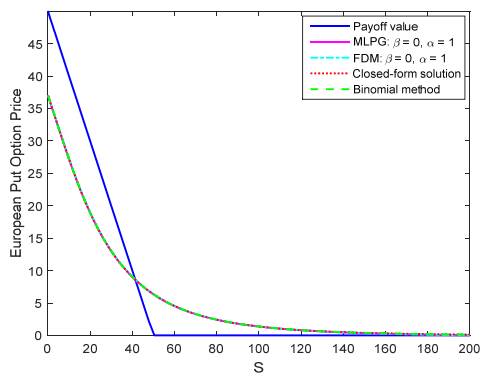
شکل ۲ نشان می‌دهد که حداکثر مقدار ویژه  $\text{Re}(\lambda)$  ماتریس  $B$  به صورت تابعی از پارامتر شکل  $\theta$ ، هنگامی که پارامتر فاصله‌گذاری شبکه ثابت باشد، متفاوت است. شکل ۳ اثر پارامتر فاصله‌گذاری شبکه،  $h$ ، را برای مقدار ویژه ماتریس  $B$  نشان می‌دهد، زمانی که پارامتر شکل  $\theta$  ثابت است. از شکل‌های ۲ و ۳ پیداست وقتی که  $\theta$  و  $h$  بسیار کوچک می‌شوند، عدد حالت ماتریس هم محلی<sup>۴۳</sup> بسیار بزرگ می‌شود و سیستم بد-وضع می‌شود. شکل ۴ نشان می‌دهد که افزایش نوسان‌پذیری اولیه لحظه‌ای دارایی ( $\sigma_0$ )، منجر به بد-وضع شدن سیستم می‌شود. شکل ۵ نشان می‌دهد که افزایش نرخ بهره بدون ریسک ( $r$ ) منجر به بد-وضع شدن سیستم می‌شود و اگر پارامتر شکل افزایش یابد، مقدار ویژه  $\text{Re}(\lambda)$  نیز افزایش می‌یابد. شکل ۶ نشان می‌دهد که کاهش الاستیسیته نوسان‌پذیری ( $\beta$ ) منجر به بد-وضع شدن سیستم می‌شود و اگر پارامتر شکل افزایش یابد، مقدار ویژه  $\text{Re}(\lambda)$  نیز افزایش می‌یابد.

### نتایج عددی

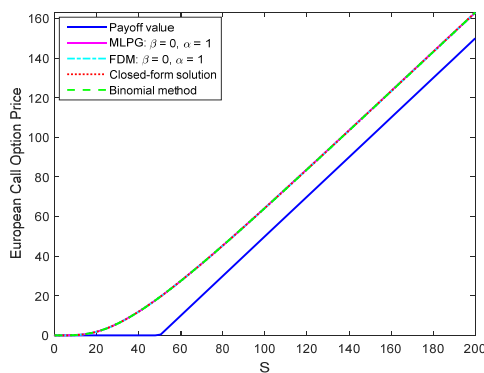
در این بخش نتایج عددی مختلفی برای ارزیابی رویکرد MLPG پیشنهاد شده، ارائه می‌گردد. مقدار هر یک از پارامترهای مسئله را به صورت  $\sigma_0 = 0.4$ ،  $r = 0.1$ ،  $\beta = -0.2$ ،  $\alpha = 0.9$ ،  $T = 3$ ،  $m = 3$ ،  $\theta = 40$  و  $N = M = 200$  در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که معادله بلک-شولز کلاسیک، جواب به فرم بسته دارد. از آنجایی که معادله‌ی (۵) جواب به فرم بسته ندارد، برای مقایسه روش MLPG با سایر روش‌ها، حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که اگر  $\beta = 0$  و  $\alpha = 1$  باشد، معادله‌ی (۵) همان معادله بلک-شولز کلاسیک می‌باشد. در این صورت می‌توانیم روش‌های MLPG، تفاضلات متناهی<sup>۴۴</sup> (FDM)، و دو جمله‌ای را با داشتن جواب دقیق معادله بلک-شولز کلاسیک با هم مقایسه کنیم (توجه داشته باشید که روش دو جمله‌ای برای معادله بلک-شولز کلاسیک نوشته شده است). این مقایسه در شکل ۷ آورده شده است. همان طور که انتظار می‌رفت نمودارهای ارزش اختیار خرید و فروش اروپایی برای هر چهار روش بکار برده شده بر هم منطبق هستند. شکل ۸، ارزش اختیارهای خرید و فروش اروپایی را براساس طول عمرهای مختلف تا تاریخ انقضاء (یعنی  $T = \{T, \frac{3T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{T}{4}\}$ ) نشان می‌دهد. با توجه به شکل، در اختیار خرید اروپایی هر چقدر عمر باقی‌مانده اختیار تا زمان سررسید بیشتر باشد، به دلیل وقوع احتمالات متعدد، ارزش اختیار معامله هم بیشتر خواهد بود. در اختیار فروش اروپایی، برای قیمت‌های پایین‌تر از قیمت توافقی، هر چقدر به زمان اعمال اختیار نزدیکتر می‌شویم، ارزش اختیار معامله هم بیشتر خواهد شد. لذا، وقتی عمر باقی‌مانده تا سررسید بالا باشد، خرید اختیار معامله از نوع اختیار خرید اروپایی ارزشمندتر از خرید اختیار معامله از نوع اختیار فروش اروپایی هست و زمانی که عمر باقی‌مانده تا سررسید کم باشد، قطعاً خرید اختیار معامله از نوع اختیار فروش اروپایی نسبت به اختیار خرید اروپایی در قیمت‌های پایین، ارزشمندتر خواهد بود.

<sup>43</sup> Collocation matrix

<sup>44</sup> Finite difference method

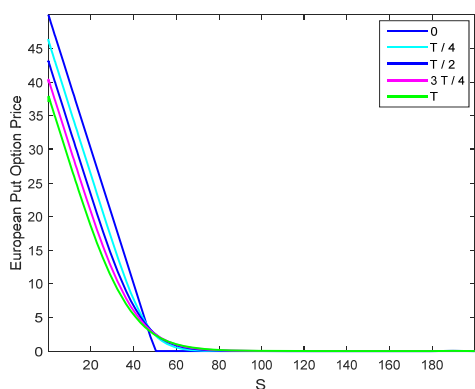


(ب) اختیار فروش

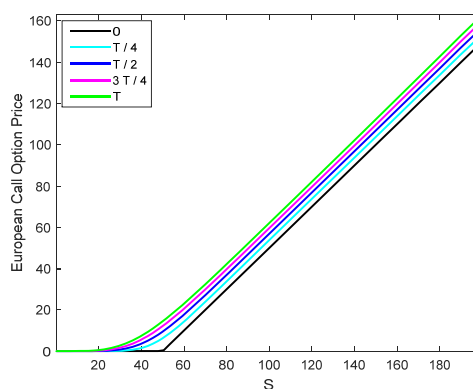


(الف) اختیار خرید

شکل ۷. مقایسه روش‌های MLPG، تفاضلات متناهی، دو جمله‌ای، و جواب به فرم بسته برای اختیارهای اروپایی.

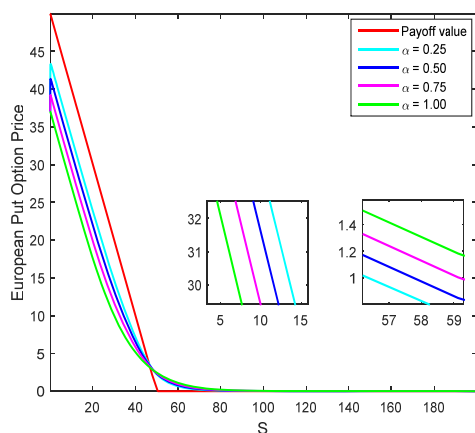


(ب) اختیار فروش

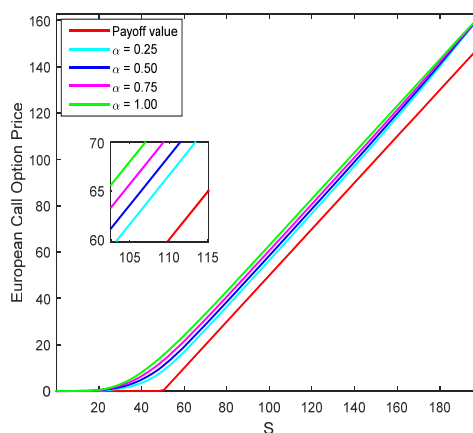


(الف) اختیار خرید

شکل ۸. ارزش اختیارهای اروپایی براساس زمان تا تاریخ انقضاء.

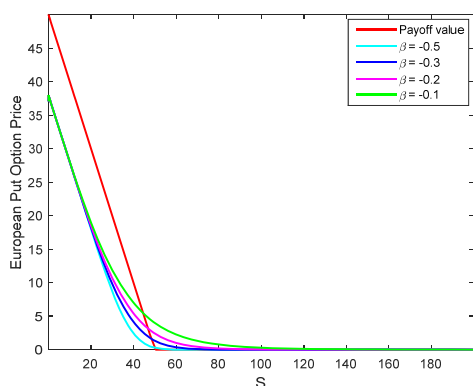


(ب) اختیار فروش

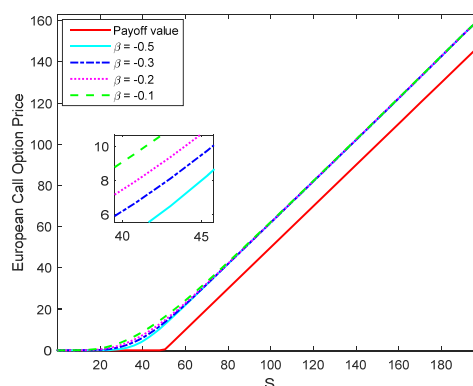


(الف) اختیار خرید

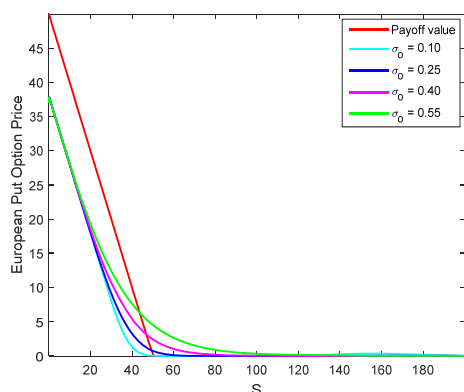
شکل ۹. ارزش اختیارهای اروپایی براساس  $\alpha$  -های مختلف در لحظه  $T - t = 3$ .



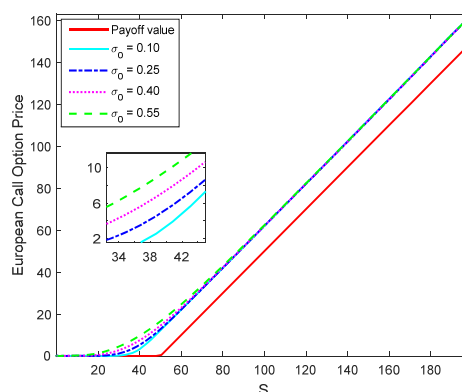
(ب) اختیار فروش



(الف) اختیار خرید

شکل ۱۰. ارزش اختیارهای اروپایی براساس  $\beta$  های مختلف در لحظه  $T - t = 3$ 

(ب) اختیار فروش



(الف) اختیار خرید

شکل ۱۱. ارزش اختیارهای اروپایی براساس  $\sigma_0$  های مختلف در لحظه  $T - t = 3$ 

شکل‌های ۹-۱۱، به ترتیب، ارزش اختیارهای خرید و فروش اروپایی را براساس  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\sigma_0$  های مختلف در لحظه  $T - t = 3$  نشان می‌دهند. هنگامی که  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\sigma_0$  افزایش یابد، ارزش اختیار خرید نیز افزایش می‌یابد، اما اختیار فروش در نزدیکی قیمت توافقی با افزایش این پارامترها، افزایش می‌یابد. بنابراین در خرید اختیار معامله از نوع اختیار خرید اروپایی، بهتر است اختیار معامله‌ای را انتخاب کنیم که پارامترهای مرتبه‌ی مشتق کسری و الاستیسیته نوسان‌پذیری از مقدار بالاتری برخوردار باشند و دارایی پایه، نوسان‌پذیری اولیه بالایی داشته باشد. اما در مورد اختیار فروش اروپایی، در صورتی که قیمت دارایی پایه نزدیک به قیمت توافقی باشد می‌توان اختیار را در  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\sigma_0$  بالاتری به جهت ارزشمندتر بودن اختیار معامله، خریداری کرد. از طرفی باید در نظر داشته باشیم که افزایش نوسان‌پذیری اولیه منجر به بد-وضع شدن سیستم می‌شود و ممکن است در این حالت، ارزش اختیار معامله به‌درستی برآورد نشود.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک اختیار اروپایی که دینامیک قیمت سهام از مدل CEV تبعیت می‌کند و تغییر در ارزش اختیار معامله از یک دستگاه انتقال فرکتال پیروی می‌کند، را به طور عددی ارزش‌گذاری کردیم. برای حل عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری، از روش‌های MLPG2 و تفاضلات متناهی غیرصریح، به ترتیب، برای گسسته‌سازی ارزش اختیار و متغیر زمان استفاده کردیم. توابع شکل در روش MLPG2 براساس رویکرد درونیابی کریگینگ متحرک انتخاب شده‌اند که دارای خاصیت دلتای کرونکر هستند و تابع دلتای کرونکر، تابع آزمون است. همچنین، پایداری روش پیشنهاد شده را با استفاده از روش ماتریسی بررسی کردیم و آنالیز پایداری، رابطه بین بزرگترین مقدار ویژه ماتریس و پارامترهای مختلف را ارائه می‌دهد. روش پیشنهاد شده در مقاله را می‌توان برای ارزش‌گذاری سایر اختیار معامله‌ها، از جمله اختیارهای آمریکایی و مانع با پارامترهای وابسته به زمان به کار برد که برای حل عددی آنها کافی است تئوری مطرح شده در بخش گسسته‌سازی مکانی و گسسته‌سازی زمانی روی معادله (۹) پیاده‌سازی شود. تنها تفاوت در ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های مختلف در شرایط مرزی (۳) می‌باشد که هر اختیار معامله، شرایط مرزی مختص به خود را دارد.

### References

1. Atluri S. N., Zhu T. L., "A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", *Computational Mechanics*, 22 (1998) 117-127.
2. Ballestra L. V., Pacelli G., "A boundary element method to price time-dependent double barrier options", *Applied Mathematics and Computation*, 218 (2011) 4192-4210.
3. Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L., "Element-free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 (1994), 229-256.
4. Bentes S. R., Menezes R., Mendes A. D., "Long memory and volatility clustering: is the empirical evidence consistent across stock markets?", *Physica A*, 387 (2008) 3826-3830.
5. Boyle P. P., "Pricing lookback and barrier options under the CEV process", *Journal of financial and quantitative analysis*, 34 (1999), 241-264.
6. Cajueiro D. O., Tabak B. M., "Long-range dependence and multifractality in the term structure of libor interest rates", *Physica A*, 373 (2007) 603-614.
7. Cox J., "Notes on option pricing I: constant elasticity of variance diffusions", *The Journal of Portfolio Management*, 22 (1996) 15-17.
8. Ding Z., Granger C., Engle R., "A long memory property of stock market returns and a new model", *Journal of Empirical Finance*, 1 (1993) 83-106.
9. Gu L., "Moving Kriging interpolation and element-free Galerkin method", *International Journal of Numerical Methods and Engineering*, 56 (2003) 1-11.
10. Heston S., "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options", *The Review of Financial Studies*. 6 (1993) 327-343.

11. Hidayat M. I. P., "Meshless thermal modeling and analysis of functionally graded materials using a meshless local moving kriging interpolation method", *An International Journal of Computation and Methodology*, 82 (2022) 210-242.
12. Lee J. K., "An efficient numerical method for pricing American put options under the CEV model", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 389 (2021) 113311.
13. Lee M. K., "Asymptotic approach to the pricing of geometric Asian options under the CEV model", *Chaos, Solitons & Fractals*, 91 (2016) 544-548.
14. Liang j. R., Wang J., Zhang W. J., Qiu W. Y., Ren F. Y., "The solution to a bifractional Black-Scholes-Merton differential equation", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 58 (2010) 99-112.
15. Liszka T., Orkisz J., "The finite difference method on arbitrary irregular grid and its application in applied mechanics", *Computers & Structures*, 11 (1980) 83-95.
16. Liu G. R., Gu Y. T., "A point interpolation method for twodimensional solid", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 (2001) 937-951.
17. Liu G. R., Liu M. B., "Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree practical method", *World Scientific*, Singapore, 2003.
18. Lucy L., "A numerical approach to testing the fission hypothesis", *The Astronomical Journal*, 82 (1977) 1013-1024.
19. Mehrdoust F., Babaei S., Fallah S., "Efficient Monte Carlo option pricing under CEV model", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46 (2017) 2254-2266.
20. Murio D. A., "Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations", *Computers and Mathematics with Applications*, 56 (2008) 1138-1145.
21. Phaochoo P., Luadsong A., Ascharyapho N., "A numerical study of the European option by the MLPG method with moving Kriging interpolation", *SpringerPlus*, 5 (2016) 1-14.
22. Phaochoo P., Luadsong A., Ascharyapho N., "The meshless local Petrov-Galerkin based on moving Kriging interpolation for solving fractional Black-Scholes model", *Journal of King Saud University-Science*, 28 (2016) 111-117.
23. Podobnik B., Wang D., Stanley H. E., "High-frequency trading model for a complex trading hierarchy", *Quantitative Finance*, 12 (2012) 559-566.
24. Rezaei M., Yazdani A. R., "Numerical solution of the time-fractional Black-Scholes equation for European double barrier option with time-dependent parameters under the CEV model", *Financial Engineering and Portfolio Management*, 10 (2019) 339-369.
25. Rezaei M., Yazdani A. R., "Pricing European double barrier option with moving barriers under a fractional Black-Scholes model", *Mediterranean Journal of Mathematics*, 19 (2022) 1-16.
26. Rezaei M., Yazdani A. R., Ashrafi A., Mahmoudi S. M., "Numerical pricing based on fractional Black-Scholes equation with time-dependent parameters under the CEV model: Double barrier options", *Computers and Mathematics with Applications*, 90 (2021) 104-111.
27. Rezaei M., Yazdani A. R., Ashrafi A., Mahmoudi S. M., "Numerically Pricing Nonlinear Time-Fractional Black-Scholes Equation with Time-Dependent Parameters under Transaction Costs", *Computational Economics*, 60 (2022) 243-280.

28. Rezaei M., Yazdanian A. R., Mahmoudi S. M., Ashrafi A., "A Compact Difference Scheme for Time-Fractional Black-Scholes Equation with Time-Dependent Parameters under the CEV Model: American Options", Computational Methods for Differential Equations, 9 (2021) 523-552.
29. Sayakoummane V., Kanok-Nukulchai W., "A meshless analysis of shells based on moving Kriging interpolation", International Journal of Computational Methods, 4 (2007) 543-565.
30. Tongsuk P., Kanok-Nukulchai W., "On the parametric refinement of moving Kriging interpolations for element free Galerkin method", computational mechanics WCCM VI in conjunction with APCOM'04, 2004 Sep: 5-10.
31. Tongsuk P., Kanok-Nukulchai W., "Further investigation of element-free Galerkin method using moving Kriging interpolation", International Journal of Computational Methods, 1 (2004) 345-365.
32. Yimnak K., Luadsong A., "A local integral equation formulation based on moving Kriging interpolation for solving coupled nonlinear reaction-diffusion equations", Advances in Mathematical Physics, 2014.