Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Inverse Weibull-Geometric Distribution and Estimation its Parameters under Type-II Censored Data

Parviz Nasiri [1], **Raouf Obeidi**[2], **Ali Shadrokh** [3]

1. Department of Statistics, Payame Noor University, 19395-4697, Tehran, Iran. E-mail: pnasiri@pnu.ac.ir
2. Department of Statistics, Payame Noor University, 19395-4697, Tehran, Iran. E-mail: obeidi.r@hotmail.com
3. Department of Statistics, Payame Noor University, 19395-4697, Tehran, Iran. E-mail: a.shadrokh@ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 18 October 2021
Received in revised form: 5 February 2022
Accepted: 16 March 2022
Published online: 22 September 2023

Keywords:
Compound Distribution, Inverse Weibull, Type-II Censoring, Bayesian Estimation, EM Algorithm.

ABSTRACT

Introduction

In lifetime studies the situation that the reason for the failure of the unit under study is caused from different components but of the same type that is not completely observed. In this case, the failure time of the unit is recorded and evaluated based on the information obtained from the observation and as the minimum value among other components affecting failure. Because the experimenter cannot identify the component that led to the failure of the unit, which is called latent or complementary risk. In the study of series systems in reliability, the minimum component lifetime among the effective components, leads to failure and is observed. In recent literature, Adamidis and Loukas (1998) used the geometric distribution function as the number of failure components and introduced a two-parameter exponential-geometric distribution with a descending failure rate. In the application of compounding distributions of lifetime studies, the experimenter may face the phenomenon of censoring. In this study, the type-II of censoring has been investigated. In recent years, the inverse Weibull distribution in censored data has been studied by Sultan *et al.* (2014), Shafiei *et al.* (2016), Ateya (2017), Singh and Tripathi (2018). Based on our knowledge the inverse Weibull-geometric distribution function in series system of type-II censored sample has not been studied so far.

Material and methods

In this paper, the classical and Bayesian estimation of parameters of inverse Weibull-geometric distribution function under the type-II censoring are considered. Since the normal equations are not an explicit function of the parameters in estimating the maximum likelihood methods, the EM algorithm is used.This algorithm is useful in estimating the parameters of model in censored data. In Bayesian estimation of parameters, the square error and LINEX loss functions are used. Since Bayesian estimation of parameters cannot be computed to closed form, samples are generated posterior distribution by Gibb's sampling via Metropolis-Hasting algorithm.Classical and Bayesian confidence intervals have been calculated using numerical methods.

Results and discussion

To evaluate the estimators by using the Monte Carlo simulations and real data, different estimators and their corresponding confidence intervals for different sample sizes have been compared in three censoring schemes.

Conclusion

The simulation results show for a fixed sample size, with decreasing number of censors, the estimation of the parameters is closer to the real values and MSE's and the length of the confidence intervals are reduced. For the 10% censoring scheme, the maximum likelihood estimators of the parameters have the minimum MSE, and for the other censoring schemes, Bayesian estimators of parameters under the LINEX loss function have the minimum MSE. Moreover, the classical confidence intervals have the shortest interval length for all censoring schemes.

How to cite: Nasiri, P., Obeidi, R., Shadrokh, A. (2023). Inverse Weibull-Geometric Distribution and EstimationIts parameters under Type-II Censored Data. *Mathematical Researches*, 9 (2), 198 - 219.

Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

توزیع وایبول معکوس-هندسی و برآورد پارامترهای آن تحت داده‌های سانسور شده نوع دوم

پرویز نصیری[1]✉، رئوف عبیدی[2]، علی شادرخ[3]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران. پست الکترونیکی: pnasiri@pnu.ac.ir
۲. گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران. پست الکترونیکی: obeidi.r@hotmail.com
۳. گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران. پست الکترونیکی: a.shadrokh@ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت:
۱۴۰۰/۰۷/۲۶
تاریخ بازنگری:
۱۴۰۰/۱۱/۱۶
تاریخ پذیرش:
۱۴۰۰/۱۲/۲۵
تاریخ انتشار:
۱۴۰۲/۰۶/۳۱

واژه‌های کلیدی:
توزیع مرکب،
وایبول معکوس،
سانسور نوع دوم،
برآورد بیزی،
الگوریتم EM.

چکیده

با توجه به کاربرد توزیع‌های مرکب در مطالعات داده‌های طول عمر، در این مقاله توزیع مرکب وایبول معکوس-هندسی بررسی می‌شود. حضور پارامترهای مقیاس، شکل و پارامتر نرخ شکست در این توزیع، بررسی آنها از حیث برآورد و آزمون فرضیه از اهمیت خاصی برخوردار است. اما از آنجایی که در مطالعات داده‌های طول عمر، پدیده سانسور نیز مد نظر است، لذا پارامترها تحت سانسور نوع دوم با استفاده از روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بیزی برآورد می‌شوند. در برآورد بیزی پارامترها تحت توابع زیان مختلف براساس توزیع‌های پیشین مناسب برآورد می‌شوند. در ادامه فاصله اطمینان متقارن و HPD به کمک شبیه‌سازی ارائه و برآوردگرها با استفاده از معیارهای آماری مقایسه می‌شود. در پایان نیکویی برازش مدل با استفاده از یک مجموعه داده واقعی گزارش شده است.

استناد: نصیری؛ عبیدی، رئوف؛ شادرخ، علی؛ (۱۴۰۲). توزیع وایبول معکوس-هندسی و برآورد پارامترهای آن تحت داده‌های سانسور شده نوع دوم. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۱۹۸ – ۲۱۹.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

در مطالعات مربوط به طول عمر[1]، شرایطی را درنظر بگیرید که دلیل شکست[2] واحد مورد مطالعه معلول مؤلفه‌های[3] مختلف ولی از نوع یکسان است که به طور کامل قابل مشاهده نمی‌باشد. در این حالت زمان شکست واحد بر اساس اطلاعات حاصل از مشاهده و به عنوان کمترین مقدار در بین دیگر مؤلفه‌های مؤثر در شکست، مورد ثبت و بررسی قرار می‌گیرد. از آنجا که آزمایشگر نمی‌تواند مؤلفه‌ای را که منجر به شکست واحد گردیده مشخص کند، آن را پنهان یا ریسک مکمل[4] می‌نامند. در بررسی سیستم‌های سری[5] در قابلیت اعتماد[6]، کمترین مقدار طول عمر یک مؤلفه از بین مؤلفه‌های مؤثر، منجر به شکست شده و قابل رؤیت است. برای مطالعه بیشتر به [۸]، [۹] و [۱۷] مراجعه شود.

آدامیدیس[7] و لوکاس[8] [۱] در کارهای تحقیقاتی تابع توزیع تعداد مؤلفه‌های شکست را توزیع هندسی[9] قرار داده و به معرفی توزیع دو پارامتری مرکب نمایی[10]-هندسی با نرخ شکست نزولی پرداختند. همچنین کاس[11][۱۶] به ترکیب دو توزیع نمایی و پواسن[12] پرداخت و توزیعی با دو پارامتر که نرخ شکست آن نزولی است را معرفی نمود. در سال ۲۰۰۸ طهماسبی و رضایی [۲۸] توزیع نمایی را با توزیع لگاریتمی[13] ترکیب نموده و به معرفی توزیع دو پارامتری با نرخ شکست نزولی اقدام نمودند. چهکندی و گنجعلی [۵] با ترکیب توزیع‌های نمایی و سری‌های توانی[14] به یک توزیع دوپارامتری و نرخ شکست نزولی دست یافتند. همچنین مطالعاتی مشابه به ترتیب در [۳]، [۲۴]، [۴]، [۱۲]، [۱۹] و [۲۳] انجام شده است.

در کاربرد توزیع‌های مرکب، یکی از مواردی که آزمایشگر درخصوص مطالعات طول عمر با آن مواجه است، پدیده سانسور[15] است. زیرا مواردی پیش می‌آیند که در آن واحدهای آزمایش علیرغم سالم بودن، گم شده و یا از آزمایش خارج می شوند. در این پژوهش، سانسور نوع دوم مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت آزمایش تا زمان وقوع شکست r-امین واحد ادامه می‌یابد، که مقدار r ثابت و از پیش تعیین شده می‌باشد. در این صورت تابع درستنمایی مشاهدات $y_1 < y_2 < \cdots < y_r$ برای تابع چگالی مفروض برابر است با

1. Lifetime
2. Failure
3. Components
4. Complementary Risk
5. Series System
6. Reliability
7. Adamidis
8. Loukas
9. Geometric
10. Exponential
11. Kuş
12. Poisson
13. Logarithmic
14. Power Series
15. Censoring

(۱)

$$L(\eta;y)=\frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r} f(y_i;\eta)\left[1-F(y_r;\eta)\right]^{n-r},$$

که در آن η نشان‌دهنده پارامتر تابع توزیع در حالت کلی و y_r، زمان شکست r-امین واحد آزمایش می‌باشد.

در سال‌های اخیر توزیع وایبول معکوس[۱۶] برای انواع داده‌های سانسور شده توسط محققان مورد بررسی قرار گرفته است. سلطان[۱۷] و همکاران [۲۷] به بررسی برآورد پارامترهای توزیع وایبول معکوس در داده‌های سانسور فزاینده پرداختند. عطیه[۱۸] [۲] توزیع وایبول معکوس برای بررسی قدرت کشش فیبرهای کربن به کار برد و سینگ[۱۹] و تریپاتی[۲۰] [۲۵] آن را برای داده‌های به‌دست آمده از مطالعات بیماران HIV برازش دادند. در مورد دیگر مدل‌های سانسورشده نیز سینگ و همکاران[۲۶]، کومار[۲۱] و همکاران [۱۳] و [۱۴] و پتک[۲۲] و همکاران [۲۲] به ترتیب در توزیع‌های نمایی، گامای نمایی[۲۳] شده، توزیع مرکب نمایی معکوس-پواسن و توزیع مرکب وایبول-پواسن مورد بررسی قرار دادند. بر اساس بررسی‌هایی که انجام دادیم تاکنون پژوهشی در خصوص برآورد پارامترهای توزیع مرکب وایبول معکوس-هندسی در داده‌های سانسور نوع دوم صورت نگرفته است. بنابراین در این مقاله به برآورد ماکسیمم درستنمایی[۲۴] پارامترها با استفاده از الگوریتم EM[۲۵] و برآوردهای بیزی[۲۶] پارامترهای مدل تحت توابع زیان[۲۷] مختلف پرداخته شده است.

ادامه مقاله به این صورت است،که در بخش ۲ ضمن معرفی تابع توزیع مرکب وایبول معکوس-هندسی، ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار می‌گیرید. در بخش ۳، به برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها با استفاده از الگوریتم EM پرداخته می‌شود. در بخش ۴ برآورد بیزی پارامترها بر اساس توزیع‌های پیشین[۲۸] گاما و بتا انجام گرفته است. در بخش ۵ مطالعه شبیه‌سازی، در بخش ۶ مطالعه داده‌های واقعی و در بخش ۷ به ارائه خلاصه و نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

۲. توزیع وایبول معکوس-هندسی

در این بخش با توجه به کاربرد توزیع‌های مرکب، توزیع مرکب وایبول معکوس-هندسی معرفی می‌شود. این تابع توزیع حالت خاصی از توزیع مرکب سری‌های توانی وایبول معکوس تعمیم‌یافته (حسن و همکاران[۱۱]) می‌باشد که

16. Inverse Weibull
17. Sultan
18. Ateya
19. Singh
20. Tripathi
21. Kumar
22. Pathak
23. Exponentiated Gamma
24. Maximum Likelihood
25. Expectation Maximization
26. Bayesian
27. Loss Functions
28. Prior

چاکرابارتی[۲۹] و چودهوری[۳۰][۶] به برر سی آن پرداخته ا ست، به طوری که تابع توزیع وایبول معکوس-هند سی، از دو تابع توزیع پرکاربرد پیوسته وایبول معکوس و گسسته هندسی تشکیل شده است. برای این منظور فرض کنید متغیر تصادفی N نشان‌دهنده تعداد مؤلفه‌های شکست با تابع احتمال هندسی به صورت

(۲)

$$P(N=n)=p(1-p)^{n-1}\ ,\ n=1,2,\ldots,$$

باشد. همچنین فرض کنید نمونه تصادفی $X_i\ ,i=1,2,\ldots,N$ دارای تابع توزیع وایبول معکوس با پارامتر شکل[۳۱] $\alpha>0$ و پارامتر مقیاس[۳۲] $\lambda>0$، نشان‌دهنده زمان‌های مؤلفه‌های شکست سیستم با تابع چگالی $f(.)$ و تابع توزیع تجمعی $F(.)$ به صورت زیر باشد

(۳)

$$f(x;\alpha,\lambda)=\alpha\lambda x^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda x^{-\alpha}},\ \ x>0,\alpha,\lambda>0,$$

(۴)

$$F(x;\alpha,\lambda)=e^{-\lambda x^{-\alpha}},\ \ x>0,\alpha,\lambda>0.$$

اگر متغیر تصادفی $Y=\min\{X_i,1\le i\le N\}$ به طوری که مستقل از N باشد، آنگاه توابع توزیع و چگالی شرطی آن به ترتیب برابرند با

(۵)

$$F_{Y|N=n}(y;\alpha,\lambda)=1-\left(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}}\right)^n,\ \ y>0,\alpha,\lambda>0,$$

و

(۶)

$$f_{Y|N=n}(y;\alpha,\lambda)=n\alpha\lambda e^{-\lambda x^{-\alpha}}y^{-(\alpha+1)}\left(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}}\right)^{n-1},\ \ y>0,\alpha,\lambda>0.$$

---

29. Chakrabarty
30. Chowdhury
31. Shape
32. Scale

در این حالت با توجه به رابطه (۶)، توابع چگالی و توزیع متغیر تصادفی Y به ترتیب برابرند با

(۷)

$$f\left(y;\alpha,\lambda,p\right)=\frac{\alpha\lambda p y^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda y^{-\alpha}}}{\left(1-\left(1-p\right)\left(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}}\right)\right)^{2}}\quad y>0,\ \alpha,\lambda>0,\ 0<p<1$$

(۸)

$$F\left(y;\alpha,\lambda,p\right)=\frac{e^{-\lambda y^{-\alpha}}}{1-\left(1-p\right)\left(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}}\right)}\quad y>0,\ \alpha,\lambda>0,\ 0<p<1$$

در حالت خاص، اگر $\alpha=1$ و $\alpha=2$، در نظر گرفته شـــود، به ترتیب توزیع نمایی معکوس-هندســـی و توزیع رایلی معکوس[33]-هندسی به دست می‌آید. و برای $\lambda=1$ توزیع فرچت[34]-هندسی و $p\to 1$ توزیع وایبول معکوس بدست می‌آید.

با قرار دادن روابط (۷) و (۸) در رابطه (۱)، تابع درستنمایی وایبول معکوس-هندسی با داده‌های سانسور نوع دوم به صورت

(۹)

$$L\left(\alpha,\lambda,p\right)=\frac{n!}{(n-r)!}\left(\alpha\lambda p\right)^{r}\frac{\left(\prod_{i=1}^{r}y_i\right)^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha}}}{\prod_{i=1}^{r}\left(1-\left(1-p\right)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^{2}}\times\left[1-\frac{e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}{1-\left(1-p\right)\left(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)}\right]^{n-r},$$

می‌باشد، که در بخش بعد برآورد پارامترهای رابطه (۹) به روش ماکسیمم درستنمایی محاسبه می‌شود.

۳. برآورد ماکسیمم درستنمایی

در این بخش برآورد پارامترهای توزیع وایبول معکوس-هندســـی تحت ســـانســـور نوع دوم به روش ماکســـیمم درستنمایی مورد بحث قرار می‌گیرد. فرض کنید $y_1<y_2<\ldots<y_r$ داده‌های سانسور شده حاصل از تابع چگالی وایبول معکوس-هندسی باشد، در این صورت لگاریتم درستنمایی رابطه (۹) برابر است با

---

[33]. Inverse Rayleigh
[34]. Frechet

(۱۰)

$$l(\alpha,\lambda,p)=\ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)+r\ln(\alpha\lambda p)-(\alpha+۱)\sum_{i=۱}^{r}\ln(y_i)$$
$$-\lambda\sum_{i=۱}^{r}y_i^{-\alpha}-۲\sum_{i=۱}^{r}\ln(B_i)+(n-r)\ln\left[\frac{p\left(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)}{B_r}\right],$$

که در آن که در آن $B_i=۱-(۱-p)\left(۱-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)$ و $B_r=۱-(۱-p)\left(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)$ است. برای برآوردهای پارامترها از رابطه (۱۰) نسبت به پارامترهای آن مشتق گرفته و برابر با صفر قرار می‌دهیم. به این طریق معادلات نرمال به صورت زیر بدست می‌آیند

(۱۱)

$$\frac{\partial l(\alpha,\lambda,p)}{\partial\alpha}=\frac{r}{\alpha}-\sum_{i=۱}^{r}\ln(y_i)+\lambda\sum_{i=۱}^{r}\ln(y_i)y_i^{-\alpha}-۲\sum_{i=۱}^{r}\frac{\lambda(۱-p)y_i^{-\alpha}\ln(y_i)e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}}{B_i}$$
$$-\ (n-r)\frac{\lambda y_r^{-\alpha}\ln(y_r)e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}{\left(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)(B_r)}=۰,$$

(۱۲)

$$\frac{\partial l(\alpha,\lambda,p)}{\partial\lambda}=\frac{r}{\lambda}-\sum_{i=۱}^{r}y_i^{-\alpha}+۲\sum_{i=۱}^{r}\frac{(۱-p)y_i^{-\alpha}e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}}{B_i}+(n-r)\frac{y_r^{-\alpha}e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}{\left(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)(B_r)}=۰,$$

(۱۳)

$$\frac{\partial l(\alpha,\lambda,p)}{\partial p}=\frac{n}{p}-۲\sum_{i=۱}^{r}\frac{۱-e^{-\lambda y_j^{-\alpha}}}{B_i}-(n-r)\frac{۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}{B_r}=۰.$$

با حل همزمان معادلات (۱۱)، (۱۲) و (۱۳)، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها بد ست می‌آید. اما از آنجا که این معادلات تابع صریحی از پارامترها نبوده و باید معادلات غیرخطی را به صورت همزمان حل کرد و این کار از نظر تحلیلی امکان‌پذیر نیست، از روش‌های عددی از جمله می‌توان از الگوریتم EM که یک روش بهینه است استفاده نمود. این روش به وسیله دمپستر[۳۵] و همکاران [۱۰] معرفی شده است. لیتل[۳۶] و روبین[۳۷] [۱۸] نشان دادند که این الگوریتم بر خلاف روش نیوتن-رافسون[۳۸] در شرایطی که داده‌ها گم شده‌اند، مقادیر بهتری را نتیجه می‌دهند. نظر به

[35]. Dempster
[36]. Little
[37]. Rubin
[38]. Newton-Raphson

اینکه الگوریتم EM دارای دو گام اســت به طوری که در گام اول که گام-E نامیده می‌شــود اقدام به محاســبه امید ریا ضی تابع شبه‌لگاریتم درستنمایی نموده و در گام دوم که گام-M نام دارد، نسبت به پارامترهای مدل، ماکسیمم می‌شــود، برای اطلاع بیشــتر به [۲۰] مراجعه شــود. برای اســتفاده از الگوریتم EM تابع توزیع توأم احتمال برای هر (y_i, n_i)، $i = 1, \ldots, n$ به صورت زیر نوشته می‌شود

(۱۴)

$$f\left(y_i, n_i; \eta\right) = n_i \alpha \lambda p y_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda y_i^{-\alpha}} \left(\left(1-p\right)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^{n_i - 1}, \quad y_i > 0, \alpha, \lambda > 0, n_i = 1, \ldots n,$$

که در آن n_iها، $i = 1, \ldots, n$ نشان‌دهنده تعداد مؤلفه‌های شکست در هر مشاهده می‌باشد.

حال اگر (y_i, n_i)، $i = 1, \ldots, n$ دارای تابع چگالی توأم رابطه (۱۴) باشند، لگاریتم تابع درستنمایی برابر است با:

(۱۵)

$$\begin{aligned} l_c\left(\alpha, \lambda, p\right) = &\sum_{i=1}^{n} \ln\left(n_i\right) + n \ln\left(\alpha \lambda p\right) - \left(\alpha+1\right) \sum_{i=1}^{r} \ln\left(y_i\right) - \lambda \sum_{i=1}^{r} y_i^{-\alpha} \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \left(n_i - 1\right) \ln\left(1 - B_i\right) - \left(\alpha+1\right) \sum_{i=r+1}^{n} \ln\left(y_i\right) - \lambda \sum_{i=r+1}^{n} y_i^{-\alpha} \\ &+ \sum_{i=r+1}^{n} \left(n_i - 1\right) \ln\left(1 - B_i\right). \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۱۵) در گام E، امیدریاضی یا $E\left(l_c\left(\alpha, \lambda, p\right)\right)$ برای داده‌های سانسور شده با حذف مقادیر ثابت به صورت زیر می‌باشد؛

(۱۶)

$$\begin{aligned} E\left(l_c\left(\alpha, \lambda, p\right)\right) \propto &\, n \ln\left(\alpha \lambda \theta\right) - \left(\alpha+1\right) \sum_{i=1}^{r} \ln\left(y_i\right) - \lambda \sum_{i=1}^{r} y_i^{-\alpha} \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \left(E\left(N_i \mid y_i\right) - 1\right) \ln\left(1 - B_i\right) - \left(\alpha+1\right) \sum_{i=r+1}^{n} E\left(\ln\left(Y_i\right) \mid Y_i \ge y_r\right) \\ &- \lambda \sum_{i=r+1}^{n} E\left(Y_i^{-\alpha} \mid Y_i \ge y_r\right) + \ln\left(1-p\right) \sum_{i=r+1}^{n} \left(E\left(N_i \mid Y_i \ge y_r\right) - 1\right). \end{aligned}$$

برای محاســبه امید ریاضــی ها در رابطه (۱۶) نیاز هســـت که برای $i = 1, \ldots, r$، $E\left(N_i | y_i\right)$ و برای $i = r+1, \ldots, n$، روابط $E\left(\ln(Y) | Y \ge y_r\right)$، $E\left(Y^{-\alpha} | Y \ge y_r\right)$ و $E\left(N_i | Y_i \ge y_r\right)$ محاســبه شوند. برای این منظور لم‌های زیر ارائه می‌شود.

لم ۳-۱: اگر متغیر تصـــادفی $N_i|Y_i,\ i=1,\ldots,r$ دارای تابع چگالی شـــرطی $f(n_i|y_i)$ باشـــد، آنگاه $E(N_i|y_i)$ برابر است با

(۱۷)

$$E(N_i|y_i)=\frac{2-B_i}{B_i}\quad i=1,\ldots,r.$$

اثبات: با توجه به توزیع توأم رابطه (۱۴)،

$$\begin{aligned}
E(N_i|y_i)&=\sum_{n_i=1}^{\infty}n_i f(n_i|y_i)\\
&=\sum_{n_i=1}^{\infty}n_i^2\left((1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^{n_i-1}\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^2\\
&=\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^2\left\{\sum_{n_i=1}^{\infty}n_i\left((1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^{n_i-1}\right.\\
&\left.+(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\sum_{n_i=1}^{\infty}n_i(n_i-1)\left((1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^{n_i-2}\right\}\\
&=\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^2\left\{\frac{-1}{1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}}\frac{\partial}{\partial p}\sum_{n_i=1}^{\infty}\left((1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^{n_i}\right.\\
&\left.+(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\frac{1}{\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\sum_{n_i=1}^{\infty}\left((1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^{n_i}\right\}\\
&=\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^2\left\{\frac{-1}{1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}}\times\frac{-\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)}{\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^2}\right.\\
&\left.+\frac{(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)}{\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)^2}\times\frac{2\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)^2}{\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)\right)^3}\right\}\\
&=\frac{1+(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)}{1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\right)}.
\end{aligned}$$

لم ۳-۲: اگر متغیر تصادفی Y دارای تابع چگالی $f\left(y|Y \ge y_r\right),\ i=r+1,\ldots,n$ باشد، آنگاه $E\left(\ln(Y)|Y \ge y_r\right)$ برابر است با

(۱۸)

$$\mathcal{C}(\eta)=E\left(\ln(Y)|Y \ge y_r\right)$$

اثبات: با توجه به توزیع رابطه (۷)،

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\eta)&=\int_{y_r}^{\infty}\ln(y)\, f(y\,|\,Y\ge y_r)dy=\int_{y_r}^{\infty}\ln(y)\frac{f(y;\eta)}{P(Y\ge y_r)}dy\\&=\int_{y_r}^{\infty}\ln(y)\frac{\alpha\lambda y^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda y^{-\alpha}}}{\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}}\right)\right)^{2}}\times\frac{1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)}{1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}dy\\&=\frac{\alpha\lambda B_r}{1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}\int_{y_r}^{\infty}\ln y\frac{y^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda y^{-\alpha}}}{\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}}\right)\right)^{2}}dy.\end{aligned}$$

با درنظر گرفتن $v=\dfrac{y_r}{y}$، می‌توان نوشت

$$\mathcal{C}(\eta)=\frac{\alpha\lambda B_r y_r^{-\alpha}}{1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}\int_{0}^{1}\ln\left(\frac{y_r}{v}\right)\frac{v^{\alpha-1}e^{-\lambda\left(\frac{y_r}{v}\right)^{-\alpha}}}{\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda\left(\frac{y_r}{v}\right)^{-\alpha}}\right)\right)^{2}}dv.$$

لم ۳-۳: اگر متغیر تصادفی Y دارای تابع چگالی $f\left(y|Y \ge y_r\right),\ i=r+1,\ldots,n$ باشد، آنگاه $E\left(Y^{-\alpha}|Y \ge y_r\right)$ برابر است با

(۱۹)

$$\mathcal{D}(\eta)=E\left(Y^{-\alpha}\,|\,Y\ge y_r\right).$$

اثبات: با توجه به توزیع رابطه (۷)،

$$\mathcal{D}(\eta)=\int_{y_r}^{\infty} y^{-\alpha}\frac{f(y;\eta)}{P(Y\geq y_r)}dy=\frac{\alpha\lambda B_r}{1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}\int_{y_r}^{\infty} y^{-\alpha}\frac{y^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda y^{-\alpha}}}{\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}}\right)\right)^2}dy$$

با درنظر گرفتن $v=\frac{y_r}{y}$، می‌توان نوشت

$$\mathcal{D}(\eta)=\frac{\alpha\lambda B_r y_r^{-2\alpha}}{1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}\int_0^1\frac{v^{2\alpha-1}e^{-\lambda\left(\frac{y_r}{v}\right)^{-\alpha}}}{\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda\left(\frac{y_r}{v}\right)^{-\alpha}}\right)\right)^2}dv.$$

لم ۳ -۴: اگر متغیر تصادفی Y دارای تابع چگالی $f(n|Y\geq y_r),\ i=r+1,\ldots,n$ باشد، آن‌گاه $E(N_i|Y_i\geq y_r)$ برابر است با

(۲۰)

$$E(N_i|Y_i\geq y_r)=\frac{1}{B_r},\ i=r+1,\ldots,n.$$

اثبات: با توجه به توزیع توام رابطه (۱۴)،

$$\begin{aligned}(n|Y\geq y_r)&=\int f(y,n|Y\geq y_r)dy=\int_{y_r}^{\infty}\frac{f(y,n)}{P(Y\geq y_r)}dy\\&=\left((1-p)\left(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)\right)^{n-1}\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)\right).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}E(N|Y\geq y_r)&=\sum_{n=1}^{\infty}n\left((1-p)\left(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)\right)^{n-1}\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)\right)\\&=\frac{-1}{1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}\frac{\partial}{\partial p}\sum_{n=1}^{\infty}\left((1-p)\left(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)\right)^{n}=\frac{1}{\left(1-(1-p)\left(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)\right)}.\end{aligned}$$

پس از جایگذاری روابط (۱۷) تا (۲۰) در رابطه (۱۶)، در گام M نسبت به پارامترها ماکسیمم شده و با حل معادلات نرمال

(۲۱)

$$\frac{\partial l_c(\alpha,\lambda,p)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha^{(t+1)}}-\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)+\lambda^{(t+1)}\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)\,y_i^{-\alpha^{(t+1)}}-\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}\ln(y_i)e^{-\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}}}{1-e^{-\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}}}\frac{2\left(1-B_i^{(t)}\right)}{B_i^{(t)}}-(n-r)\mathcal{C}\left(\eta^{(t)}\right)=0,$$

(۲۲)

$$\frac{\partial l_c(\alpha,\lambda,p)}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda^{(t+1)}}-\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}+\sum_{i=1}^{r}\frac{y_i^{-\alpha^{(t+1)}}e^{-\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}}}{1-e^{-\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}}}\frac{2\left(1-B_i^{(t)}\right)}{B_i^{(t)}}-(n-r)\mathcal{D}\left(\eta^{(t)}\right)=0,$$

(۲۳)

$$\frac{\partial l_c(\alpha,\lambda,p)}{\partial p}=\frac{n}{p^{(t+1)}}-\frac{2}{1-p^{(t+1)}}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1-B_i^{(t)}}{B_i^{(t)}}\right)-\frac{n-r}{1-p^{(t+1)}}\frac{\left(1-B_r^{(t)}\right)}{B_r^{(t)}}=0.$$

مقادیر $\left(\alpha^{(t+1)},\lambda^{(t+1)},p^{(t+1)}\right)$ به‌دست می‌آیند.

بنابراین برآورد پارامترها به صورت زیر به‌دست می‌آیند

(۲۴)

$$\alpha^{(t+1)}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)-\lambda^{(t+1)}\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)\,y_i^{-\alpha^{(t+1)}}+\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}\ln(y_i)e^{-\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}}}{1-e^{-\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}}}\frac{2\left(1-B_i^{(t)}\right)}{B_i^{(t)}}-(n-r)\mathcal{C}\left(\eta^{(t)}\right)},$$

(۲۵)

$$\lambda^{(t+1)}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}-\sum_{i=1}^{r}\frac{y_i^{-\alpha^{(t+1)}}e^{-\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}}}{1-e^{-\lambda^{(t+1)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}}}\frac{2\left(1-B_i^{(t)}\right)}{B_i^{(t)}}+(n-r)\mathcal{D}\left(\eta^{(t)}\right)},$$

(۲۶)

$$p^{(t+1)}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{2-B_i^{(t)}}{B_i^{(t)}}\right)+\frac{(n-r)}{B_r^{(t)}}}.$$

ذکر این نکته ضروری است که در حالتی که داده سانسور شده در نظر گرفته نشود یا $n=r$، این برآوردگرها همان برآوردگرهای مقاله چاکرابارتی و چودهوری [۶] می‌باشند.

۴. برآورد بیزی

در این بخش برای برآورد بیزی پارامترها، با توجه به رابطه (۷)، توزیع‌های پیشین مستقل $\pi_1(\alpha)\propto\alpha^{a_1-1}e^{-b_1\alpha}\sim Gamma(a_1,b_1)$، $\pi_2(\lambda)\propto\lambda^{a_2-1}e^{-b_2\lambda}\sim Gamma(a_2,b_2)$ و $\pi_3(p)\propto\theta^{a_3-1}(1-\theta)^{b_3-1}\sim Beta(a_3,b_3)$ در نظر گرفته می شود، به طوری که تمام ابرپارامترهای[۳۹] $a_i,b_i \quad i=1,2,3$ دارای مقادیر معلوم و نامنفی هستند. مشاهده می‌شود که توزیع‌های پیشین ناآگاهی بخش[۴۰] برای α، λ و p، حالت خاص از توزیع های پیشین درنظر گرفته شده هستند. بنابراین برا ساس مقادیر مشاهده شده $y_1,y_2,\ldots,y_r$ از داده‌های تحت سانسور نوع دوم، تابع چگالی توأم پسین پارامترها به صورت زیر خواهد بود

(۲۷)

$$\begin{aligned}\pi(\alpha,\lambda,p|\mathbf{y})\propto\ &\alpha^{r+a_1-1}\lambda^{r+a_2-1}p^{n+a_3-1}(1-p)^{b_3-1}\\ &\times\exp\Bigg(-\alpha\left[\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)+b_1\right]-\lambda\left[\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha}+b_2\right]-2\sum_{i=1}^{r}\ln(B_i)\\ &+(n-r)\sum_{i=1}^{r}\ln\left(1-\exp\left(-\lambda y_r^{-\alpha}\right)\right)-(n-r)\ln(B_r)\Bigg).\end{aligned}$$

برای برآورد بیزی پارامترها از توابع زیان توان دوم خطا[۴۱] (SEL) و لاینکس[۴۲] استفاده شده است. این نکته قابل ذکر است که معادلات نرمال برآوردهای بیزی پارامترها دارای فرم بسته قابل محاسبه نیستند. لذا برای رفع این مشکل از روش‌های عددی که توسط تایرنی[۴۳] [۲۹] و بر اساس تکنیک‌های زنجیر مارکف مونت کارلو[۴۴] (MCMC) پیشنهاد شده است، استفاده می شود. در این روش با استفاده از نمونه‌گیری گیبز[۴۵] از طریق الگوریتم متروپولیس-هستینگ[۴۶] اقدام به تولید نمونه از توزیع پسین[۴۷] نموده و نسبت به برآورد پارامترها اقدام می‌شود. در روش نمونه‌گیری گیبز برای تولید نمونه، توزیع‌های پسین شرطی کامل[۴۸] برای α، λ و p به صورت زیر بدست می‌آیند.

---

[39]. Hyper Parameters
[40]. Non Informative
[41]. Square Error Loss
[42]. LINEX
[43]. Tierney
[44]. Markov Chain Monte Carlo
[45]. Gibbs Sampling
[46]. Metropolis-Hasting Algorithm
[47]. Posterior
[48]. Full Conditional

(۲۸)

$$\pi_1^*\left(\alpha|\lambda, p, \boldsymbol{y}\right) \propto \alpha^{r+a_1-1} \exp\left(-\alpha\left[\sum_{i=1}^{r}\ln\left(y_i\right)+b_1\right]-\lambda\left[\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha}\right]-2\sum_{i=1}^{r}\ln\left(B_i\right)\right.$$
$$\left.+\left(n-r\right)\sum_{i=1}^{r}\ln\left(1-\exp\left(-\lambda y_r^{-\alpha}\right)\right)-\left(n-r\right)\ln\left(B_r\right)\right),$$

(۲۹)

$$\pi_2^*\left(\lambda|\alpha, p, \boldsymbol{y}\right) \propto \lambda^{r+a_2-1} \exp\left(-\lambda\left[\sum_{i=1}^{r}y_j^{-\alpha}+b_2\right]-2\sum_{i=1}^{r}\ln\left(B_i\right)\right.$$
$$\left.+\left(n-r\right)\sum_{i=1}^{r}\ln\left(1-\exp\left(-\lambda y_r^{-\alpha}\right)\right)-\left(n-r\right)\ln\left(B_r\right)\right),$$

(۳۰)

$$\pi_3^*\left(p|\alpha,\lambda, \boldsymbol{y}\right) \propto p^{n+a_3-1}\left(1-p\right)^{b_3-1} \exp\left(-2\sum_{i=1}^{r}\ln\left(B_i\right)-\left(n-r\right)\ln\left(B_r\right)\right).$$

با توجه به روابط (۲۸)، (۲۸) و (۳۰) برآورد بیزی α، λ و p براساس نمونه‌های تولید شده به روش MCMC طبق الگوریتم زیر برآورد می‌شود.

گام ۱- مقادیر $\left(\alpha_0,\lambda_0,p_0\right)$ به عنوان مقادیر اولیه تعیین می‌شوند.

گام۲- بر اساس الگوریتم متروپولیس-هستینگ، α_i از توزیع $\pi_1^*\left(\alpha|\lambda_{i-1},p_{i-1},\boldsymbol{y}\right)$، λ_i از توزیع $\pi_2^*\left(\lambda|\alpha_i,p_{i-1},\boldsymbol{y}\right)$ و p_i از توزیع $\pi_3^*\left(p|\alpha_i,\lambda_i,\boldsymbol{y}\right)$ تولید می‌شوند.

گام ۳- گام ۲ برای مقادیر $i=1,2,\ldots,N$ تکرار می‌شوند.

گام ۴- برآورد بیزی α، λ و p تحت تابع زیان توان دوم خطا به صـــورت $\hat{\mathrm{H}}_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i$ و تحت تابع زیان لاینکس به صورت $\hat{\mathrm{H}}_L=-\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e^{-\delta\eta_i}\right)$ محاسبه می‌گردد که در آن η نشان‌دهنده پارامترها می‌باشد.

در برآورد فاصـــله اطمینان[۴۹] بیزی پارامترها، با توجه به مقاله کوندو[۵۰] [۱۵]، برای محاســـبه فواصـــل اطمینان پارامترهای α، λ و p مقادیر بد ست آمده از گام (۳) را به صورت مرتب و $\alpha_{(1)} < \ldots < \alpha_{(N)}$، $\lambda_{(1)} < \ldots < \lambda_{(N)}$ و $p_{(1)} < \ldots < p_{(N)}$ می‌نویســـیم. در این حالت فاصـــله اطمینان $100(1-\gamma)\%$ برای پارامترها به صـــورت $\left(\alpha_{\left(N\frac{\gamma}{2}\right)}, \alpha_{\left(N\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\right)}\right)$، $\left(\lambda_{\left(N\frac{\gamma}{2}\right)}, \lambda_{\left(N\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\right)}\right)$ و $\left(p_{\left(N\frac{\gamma}{2}\right)}, p_{\left(N\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\right)}\right)$ خواهد بود.

همچنین برای ســـاختن یک فاصـــله اطمینان بیزی با توجه به تابع چگالی پســـین[۵۱] (HPD) در ســـطح $100(1-\gamma)\%$ برای پارامترها، از روش چن[۵۲] و شائو[۵۳] [۷] ا ستفاده می کنیم. بدین منظور، به مانند روش پی شین، ابتدا مقادیر بد ست آمده از گام (۳) را به صورت مرتب نو شته و سپس تمام فوا صل اطمینان $100(1-\gamma)\%$ پارامتر α به صورت $\left(\alpha_{(1)}, \alpha_{([N(1-\gamma)]+1)}\right), \ldots, \left(\alpha_{(N\gamma)}, \alpha_{(N)}\right)$ را تشکیل می‌دهیم که در آن $[T]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا برابر با T اســت. در این صــورت فاصــله HPD پارامتر α، کوچکترین فاصــله در بین فاصــله‌های اطمینان محاسبه شده است. به همین طریق برای دیگر پارامترها، فواصل HPD بدست می‌آید.

۵. مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی برآورد پارامترهای توزیع وایبول معکوس-هندسی به روش ماکسیمم درستنمایی و بیزی تحت سانسور نوع دوم ارائه شده است. مراحل شبیه‌سازی با استفاده از نرم افزار R انجام شده است. تمامی نتایج با ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار به دست آمده‌اند. همچنین تعداد تکرارها در الگوریتم متروپولیس-هستینگ برابر با ۱۰۰۰۰ و در الگوریتم گیبز ۳۰۰۰ در نظر گرفته شده است. جهت بررسی عملکرد برآوردگرها $a_1 = 0/2, b_1 = 1, a_2 = 2, b_2 = 1, a_3 = 1, b_3 = 3$ و و $\delta = 1$ برای اندازه نمونه‌های $n = 20, 50, 100$ و سه طرح سانسور ۱۰٪، ۲۰٪ و ۳۰٪ در نظر گرفته شده، برآوردهای نقطه‌ای حاصل بر حسب معیار میانگین توان دوم خطا[۵۴] (MSE) و واریانس تعمیم‌یافته[۵۵] (GV) مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند که در جدول ۱ محاسبه شده است. فاصله اطمینان کلاسیک، بیزی و HPD پارامترها در جدول‌های ۲ و۳ محاسبه شده است. ملاحظه می‌گردد که با کاهش تعداد سانسور، MSE و واریانس تعمیم‌یافته برآورد پارامترها کاهش یافته و برآورد پارامترها به مقدار واقعی نزدیک می‌شوند. همچنین در داده‌هایی با ۱۰٪ سانسور، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی دارای کمترین MSE و با افزایش تعداد سانسور، برآوردگرهای تحت تابع زیان لاینکس دارای MSE کمتر می‌باشند. با

49. Confidence Interval
50. Kundu
51. Highest Posterior Density
52. Chen
53. Shao
54. Mean Square Error
55. Generalized Variance

مقایسه فواصل اطمینان مشاهده می‌شود که با کاهش تعداد سانسور، طول بازه‌ها کاهش می‌یابند. در بین فواصل اطمینان، برای تمام طرح‌های سانسور، فاصله اطمینان کلاسیک دارای کمترین طول بازه می‌باشد.

جدول ۱: برآورد پارامترها به همراه میانگین توان دوم خطا و واریانس تعمیم‌یافته وقتی که $\alpha = ۰/۲$، $\lambda = ۲$ و $p = ۰/۲۵$

GV	MSE	LINEX	MSE	SEL	MSE	MLE	پارامتر	r	n
	0/0119	0/2567	0/0127	0/2603	0/0113	0/2864	α		
$6/3173\times10^{(-7)}$	0/0580	1/6926	0/0710	1/4699	0/0824	1/3912	λ		
	0/0109	0/3252	0/0143	0/3442	0/0436	0/1456	p		
	0/0107	0/2533	0/0115	0/2565	0/0088	0/2752	α		
$1/1570\times10^{(-7)}$	0/0595	1/7067	0/0718	1/4833	0/0764	1/6854	λ	16	20
	0/0102	0/3255	0/0136	0/3444	0/0166	0/1718	p		
	0/0094	0/2478	0/0099	0/2506	0/0055	0/2495	α		
$7/3684\times10^{-8}$	0/0549	1/7245	0/0681	1/5063	0/0290	1/9903	λ	18	
	0/0109	0/3241	0/0143	0/3430	0/0011	0/2450	p		
	0/0074	0/2549	0/0078	0/2571	0/0100	0/2899	α		
$5/4042\times10^{-7}$	0/0487	1/6216	0/0637	1/4107	0/0732	1/3589	λ	35	
	0/0113	0/3282	0/0147	0/3467	0/0469	0/1516	p		
	0/0065	0/2525	0/0068	0/2545	0/0048	0/2663	α		
$6/5640\times10^{-8}$	0/0479	1/6069	0/0641	1/3985	0/0677	1/5237	λ	40	50
	0/0102	0/3257	0/0134	0/3440	0/0111	0/1868	p		
	0/0055	0/2449	0/0058	0/2467	0/0023	0/2380	α		
$4/3173\times10^{-8}$	0/0497	1/6496	0/0613	1/4418	0/0443	1/9214	λ	45	
	0/0116	0/3268	0/0148	0/3447	0/0002	0/2470	p		
	0/0055	0/2420	0/0057	0/2436	0/0104	0/2693	α		
$7/9067\times10^{-7}$	0/0669	1/7247	0/0596	1/5051	0/0914	1/4337	λ	70	
	0/0123	0/3229	0/0151	0/3391	0/0530	0/1309	p		
	0/0050	0/2385	0/0052	0/2399	0/0031	0/2580	α		
$2/4919\times10^{-8}$	0/0838	1/7598	0/0644	1/5332	0/0850	1/7557	λ	80	100
	0/0137	0/3221	0/0165	0/3378	0/0053	0/2073	p		
	0/0043	0/2296	0/0044	0/2308	0/0016	0/2153	α		
$1/9761\times10^{-8}$	0/0993	1/8877	0/0625	1/6293	0/0288	1/9094	λ	90	
	0/0128	0/3111	0/0153	0/3266	0/0001	0/2469	p		

جدول۲: فواصل اطمینان کلاسیک و بیزی وقتی که $\alpha = ۰/۲$، $\lambda = ۲$ و $p = ۰/۲۵$

n	r	پارامتر	فاصله اطمینان کلاسیک		فاصله اطمینان بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطا		فاصله اطمینان بیزی تحت تابع زیان لاینکس	
			کران بالا	کران پایین	کران بالا	کران پایین	کران بالا	کران پایین
20	14	α	0/3421	0/2860	0/4834	0/0988	0/4742	0/0983
		λ	1/5416	1/3881	3/1293	0/4776	2/9022	0/4142
		p	0/2550	0/1440	0/5062	0/2068	0/4865	0/1960
	16	α	0/3212	0/2749	0/4662	0/1173	0/4575	0/1152
		λ	1/8208	1/6831	3/1716	0/5041	2/8255	0/4358
		p	0/2349	0/1713	0/4984	0/2095	0/4816	0/1992
	18	α	0/2838	0/2494	0/4546	0/1143	0/4458	0/1136
		λ	2/0690	1/9896	3/1601	0/5019	2/9121	0/4481
		p	0/2603	0/2450	0/5217	0/1924	0/5051	0/1798
50	35	α	0/3230	0/2898	0/4112	0/1638	0/4059	0/1631
		λ	1/4485	1/3582	2/6078	0/5122	2/2406	0/4516
		p	0/2233	0/1512	0/5103	0/2081	0/4939	0/1889
	40	α	0/2878	0/2663	0/3998	0/1660	0/3970	0/1650
		λ	1/6043	1/5232	2/5513	0/5124	2/2202	0/4615
		p	0/2194	0/1867	0/4888	0/2101	0/4721	0/1938
	45	α	0/2520	0/2380	0/3817	0/1605	0/3794	0/1598
		λ	1/9829	1/9211	2/7345	0/5252	2/2967	0/4578
		p	0/2511	0/2470	0/5152	0/2085	0/4950	0/1932
100	70	α	0/2932	0/2693	0/3887	0/1532	0/3871	0/1524
		λ	1/5045	1/4334	3/4071	0/5075	2/5687	0/4544
		p	0/1848	0/1307	0/4967	0/1514	0/4821	0/1371
	80	α	0/2702	0/2580	0/3744	0/1283	0/3724	0/1270
		λ	1/8196	1/7555	4/3625	0/5318	2/8361	0/4727
		p	0/2233	0/2073	0/5201	0/1031	0/5007	0/0953
	90	α	0/2236	0/2153	0/3685	0/1119	0/3667	0/1098
		λ	1/9445	1/9093	5/0764	0/5723	3/0712	0/5033
		p	0/2490	0/2469	0/5063	0/0885	0/4898	0/0793

جدول۳: فواصل اطمینان HPD وقتی که $\alpha = ۰/۲$، $\lambda = ۲$ و $p = ۰/۲۵$

n	r	پارامتر	فاصله اطمینان HPD تحت تابع زیان توان دوم خطا: کران بالا	کران پایین	فاصله اطمینان HPD تحت تابع زیان لاینکس: کران بالا	کران پایین
20	14	α	0/4508	0/0940	0/4400	0/0917
		λ	2/7910	0/3430	2/5728	0/3264
		p	0/5062	0/2058	0/4778	0/1944
	16	α	0/4344	0/0987	0/4326	0/1032
		λ	2/9050	0/4196	2/6417	0/3775
		p	0/5108	0/2216	0/4822	0/1996
	18	α	0/4359	0/1128	0/4299	0/1117
		λ	2/8264	0/3266	2/6558	0/3103
		p	0/5063	0/1833	0/4849	0/1694
50	35	α	0/4015	0/1580	0/3981	0/1603
		λ	2/5179	0/4671	2/1986	0/4193
		p	0/5074	0/2051	0/4829	0/1841
	40	α	0/3792	0/1584	0/3773	0/1581
		λ	2/4778	0/4622	2/2076	0/4493
		p	0/4751	0/2030	0/4573	0/1889
	45	α	0/3602	0/1409	0/3577	0/1392
		λ	2/5419	0/4894	2/1780	0/3997
		p	0/4984	0/1951	0/4908	0/1918
100	70	α	0/3938	0/1589	0/3912	0/1571
		λ	2/6199	0/3926	2/2603	0/3675
		p	0/4970	0/1516	0/4861	0/1466
	80	α	0/3822	0/1546	0/3795	0/1524
		λ	2/6848	0/4006	2/3294	0/4105
		p	0/5443	0/1640	0/5307	0/1502
	90	α	0/3834	0/1370	0/3828	0/1355
		λ	3/7994	0/2959	2/6951	0/3946
		p	0/5133	0/0981	0/4922	0/0827

۶. داده‌های واقعی

داده‌های این بخش که در جدول ۴ ارائه شده، شامل مدت زمان بستری ۵۲۱ بیمار در بخش VIP جراحی بیمارستان دانشگاه علوم پزشکی مشهد می‌باشد [۲۱] و جهت برازش تابع توزیع وایبول معکوس-هندسی و وایبول معکوس تعمیم‌یافته-هندسی مورد بررسی قرار گرفته است. بر اساس این داده‌ها، برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی و بیزی برای هر سه طرح سانسور و تابع چگالی پیشین ناآگاهی بخش $\left(a_i = b_i = ۰ \; i = ۱,۲,۳\right)$ و $\delta = ۱$ در جدول ۵ محاسبه شده است. با بررسی نتایج در طرح سانسور ۳۰٪ برآوردهای تحت تابع زیان لاینکس پارامترها به مقادیر برآورد حاصل از داده‌های کامل نزدیکتر هستند. با کاهش سانسور، برای طرح سانسور ۱۰٪، مقادیر برآورد حاصل از روش ماکسیمم درستنمایی به مقادیر برآورد حاصل از داده‌های کامل نزدیکتر هستند.

جدول۴: جدول توزیع فراوانی مدت زمان بستری بیماران در بخش VIP جراحی بیمارستان دانشگاه علوم پزشکی مشهد

مدت زمان به روز	۱	۲	۳	۴	۵ و بیشتر	جمع
تعداد	۲۶۸	۱۳۶	۶۵	۲۳	۲۹	۵۲۱

جدول۵: برآورد پارامترهای توزیع وایبول معکوس-هندسی سانسورشده وقتی که $r = ۳۶۵, ۴۱۷, ۴۶۹$

$n = 521$	$r = 365$			$r = 417$			$r = 469$		
پارامتر	MLE	SEL	LINEX	MLE	SEL	LINEX	MLE	SEL	LINEX
α	1/8806	2/4304	2/4527	2/0365	2/6896	2/5797	2/2245	2/8771	2/7726
λ	1/9884	2/4554	2/4449	2/2992	2/7159	2/7099	2/2995	2/8161	2/8115
p	0/4659	0/4707	0/4709	0/4803	0/4589	0/4777	0/4919	0/4409	0/4408

۷. خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله استنباط کلاسیک و بیزی پارامترهای توزیع وایبول معکوس-هندسی تحت سانسور نوع دوم مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که در برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، معادلات نرمال تابع صریحی از پارامترها نیستند از الگوریتم EM استفاده شده است. این الگوریتم در برآورد پارامترهای مدل تحت داده‌های سانسور شده مفید می‌باشد. در برآورد بیزی پارامترها از تابع زیان توان دوم خطا و لاینکس استفاده شده است. از آنجا که برآوردهای بیزی پارامترهای مجهول دارای فرم بسته نمی‌باشند، با استفاده از روش نمونه‌گیری گیبز و الگوریتم متروپولیس-هستینگ به تولید نمونه از تابع چگالی هدف اقدام گردیده است. فواصل اطمینان کلاسیک و بیزی با استفاده از روش‌های عددی محاسبه شده‌اند. با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو به مقایسه برآوردگرهای مختلف و فواصل اطمینان متناظر آنها برای حجم نمونه‌های مختلف در سه طرح سانسور اقدام گردیده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی بیانگر آن است که برای حجم نمونه ثابت با کاهش تعداد سانسور، برآورد پارامترها به مقدار واقعی نزدیکتر و MSE و طول بازه فواصل اطمینان کاهش می‌یابند. برای طرح سانسور ۱۰٪، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها دارای کمترین MSE و برای دیگر طرح‌های سانسور برآورد بیزی پارامترها تحت تابع زیان لاینکس دارای کمترین MSE می‌باشند. در بین فواصل اطمینان، فاصله اطمینان کلاسیک دارای کمترین طول بازه برای تمامی طرح‌های سانسور می‌باشد.

References

1. Adamidis, K. and Loukas, S., "A lifetime distribution with decreasing failure rate", Statistics & Probability Letters. 39(1) (1998) 35-42.

2. Ateya, S.F., "Estimation under inverse Weibull distribution based on Balakrishnan's unified hybrid censored scheme", Communications in Statistics-Simulation and Computation. 46(5) (2017) 3645-3666.

3. Barreto-Souza, W. and Cribari-Neto, F., "A generalization of the exponential-Poisson distribution", Statistics & Probability Letters. 79(24) (2009) 2493-2500.

4. Barreto-Souza, W., de Morais, A.L., and Cordeiro, G.M., "The Weibull-geometric distribution", Journal of Statistical computation and Simulation. 81(5) (2011) 645-657.

5. Chahkandi, M. and Ganjali, M., "On some lifetime distributions with decreasing failure rate", Computational Statistics & Data Analysis. 53(12) (2009) 4433-4440.

6. Chakrabarty, J.B. and Chowdhury, S., "Compounded inverse Weibull distributions: Properties, inference and applications", Communications in Statistics - Simulation and Computation. 48(7) (2019) 2012-2033.

7. Chen, M.-H. and Shao, Q.-M., "Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals", Journal of Computational and Graphical Statistics. 8(1) (1999) 69-92.

8. Cox, D.R. and Oakes, D., "Analysis of Survival Data". London: Chapman and Hall(1984).

9. Crowder, M., Kimber, A., Smith, R., and Sweeting, T., "Statistical Analysis of Reliability Data". London: Chapman and Hall(1991).

10. Dempster, A.P., Laird, N.M., and Rubin, D.B., "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm", Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). 39(1) (1977) 1-22.

11. Hassan, A.S., Assar, M., and Ali, K.A., "The Compound family of generalized inverse Weibull power series Distributions", British journal of Applied Sciences & Technology. 14(3) (2016) 1-18.

12. Hemmati, F., Khorram, E., and Rezakhah, S., "A new three-parameter ageing distribution", Journal of statistical planning and inference. 141(7) (2011) 2266-2275.

13. Kumar, D., Singh, U., Singh, S.K., and Bhattacharyya, G., "Bayesian Estimation of Exponentiated Gamma Parameter for Progressive Type II Censored Data With Binomial Removals", Journal of Statistics Applications & Probability. 4(2) (2015) 265-273.

14. Kumar, M., Singh, S.K., and Singh, U., "Bayesian inference for Poisson-inverse exponential distribution under progressive type-II censoring with binomial removal", International Journal of System Assurance Engineering and Management. 9(6) (2018) 1235-1249.

15. Kundu, D., "Bayesian Inference and Life Testing Plan for the Weibull Distribution in Presence of Progressive Censoring", Technometrics. 50(2) (2008) 144-154.

16. Kuş, C., "A new lifetime distribution", Computational Statistics & Data Analysis. 51(9) (2007) 4497-4509.

17. Lawless, J.F., "Statistical Models and Methods for Lifetime Data". New York: Wiley (2000).

18. Little, R.J.A. and Rubin, D.B., "Incomplete data", in Encyclopedia of Statistical Sciences, S. Kotz and N.L. Johnson, Editors., Wiley: New York (1983).

19. Mahmoudi, E. and Sepahdar, A" ,.Exponentiated Weibull–Poisson distribution: Model, properties and applications", Mathematics and computers in simulation. 92 (2013) 76-97.

20. McLachlan, G.J. and Krishnan, T., "The EM Algorithm and Extensions". New York: Wiley(1997).

21. Nasiri, P. and Azarian, A.A., "Estimation of the Parameters of Generalized Inverse Weibull Geometric Distribution and its Application", Fluctuation and Noise Letters. 20(05) (2021) 2150043.

22. Pathak, A., Kumar, M., Singh, S.K., and Singh, U., "Bayesian inference: Weibull Poisson model for censored data using the expectation–maximization algorithm and its application to bladder cancer data", Journal of Applied Statistics, (2020) 1-23.

23. Shafiei, S., Darijani, S., and Saboori, H., "Inverse Weibull power series distributions: properties and applications", Journal of statistical computation and simulation. 86(6) (2016) 1069-1094.

24. Silva, R.B., Barreto-Souza, W., and Cordeiro, G.M., "A new distribution with decreasing, increasing and upside-down bathtub failure rate", Computational Statistics & Data Analysis. 54(4) (2010) 935-944.

25. Singh, S. and Tripathi, Y.M., "Estimating the parameters of an inverse Weibull distribution under progressive type-I interval censoring", Statistical Papers. 59(1) (2018) 21-56.

26. Singh, S.K., Singh, U., Kumar, M., and Vishwakarma, P.K., "Classical and Bayesian Inference for an Extension of the Exponential Distribution under Progressive Type-II Censored Data with Binomial Removals", Journal of Statistics Applications & Probability .1 (2014) 75-86.

27. Sultan, K.S., Alsadat, N.H., and Kundu, D., "Bayesian and maximum likelihood estimations of the inverse Weibull parameters under progressive type-II censoring", Journal of Statistical Computation and Simulation. 84(10) (2014) 2248-2265.

28. Tahmasbi, R. and Rezaei, S., "A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate", Computational Statistics & Data Analysis. 52(8) (2008) 3889-3901.

29. Tierney, L., "Markov chains for exploring posterior distributions", the Annals of Statistics, (1994) 1701-1728.