Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

# A generalization of retractable modules

F. Moradi[1], R. Beyranvand[2]

1. Department of Mathematics, Lorestan University, Khorramabad, Iran. E-mail: moradi.fa@fa.lu.ac.ir
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, Lorestan University, Khorramabad, Iran. E-mail: beyranvand.r@lu.ac.ir

**Article Info**

**Article type:**
Research Article

**Article history:**
Received: 1 November 2021
Received in revised form: 9 April 2022
Accepted: 22 April 2022
Published online: 6 February 2024

**Keywords**:
Retractable module,
Singular module,
Nonsingular module.

**ABSTRACT**

**Introduction**

Let $R$ be an arbitrary ring and $N$ be a right $R$-module. A right $R$-module $M$ is called $N$-retractable if $\mathrm{Hom}_R(M,N') \neq 0$, for any nonzero submodule $N'$ of $N$. This is a generalization of the concept of retractable modules. The aim of this paper is to study of $N$-retractable modules, where $N$ is an arbitrary right $R$-module. One of the most important results of this paper is the characterization of rings that have a module such that each module is retractable with respect to it. Also we show that the class of $N$-retractable modules is closed under direct sums and direct products.

**Material and Methods**

In the preparation of this article, the articles and books related to topic "retractable modules" have been used and some of the results of these articles have been generalized**.**

**Results and discussion**

Here we present some of the obtained results.

**Proposition**. *Let $M$ be a right $R$-module and $\{N_i\}_{i\in I}$ be a family of right $R$-modules. Then for any $i \in I$, $M$ is $N_i$-retractable if and only if $M$ is $(\bigoplus_{i\in I} N_i)$-retractable.*

**Proposition.** *Let $R$ be a ring. The following statements are equivalent:*

*$(a)$ $R$ is a right max ring with only one simple right $R$-module, up to isomorphism.*

*$(b)$ There exists a non-zero semisimple right $R$-module $N$, such that every non-zero right $R$-module is $N$-retractable.*

*$(c)$ There exists a simple right $R$-module $N$, such that every non-zero right $R$-module is $N$-retractable.*

*$(d)$ There exists a non-zero right $R$-module $N$, such that every non-zero right $R$-module is $N$-retractable.*

**Theorem**. *Let $R$ be a ring. The following statements are equivalent:*

*$(a)$ $R$ has only one simple right $R$-module, up to isomorphism.*

*$(b)$ There exists a non-zero semisimple right $R$-module $N$ such that every non-zero finitely generated right $R$-module is $N$-retractable.*

($b'$) *There exists a non-zero semisimple right $R$-module $N$ such that every non-zero cyclic right $R$-module is $N$-retractable.*
($c$) *There exists a simple right $R$-module $N$ such that every non-zero finitely generated right $R$-module is $N$-retractable.*

($c'$) *There exists a simple right $R$-module $N$ such that every non-zero cyclic right $R$-module is $N$-retractable.*

($d$) *There exists a non-zero right $R$-module $N$ such that every non-zero finitely generated right $R$-module is $N$-retractable.*
($d'$) *There exists a non-zero right $R$-module $N$ such that every non-zero cyclic right $R$-module is $N$-retractable.*

**Proposition.** *Let $R$ be a ring. The following statements are equivalent:*
($a$) *There exists a nonsingular right $R$-module $M$ that every not singular right $R$-module $N$ is $M$-retractable.*
($a'$) *There exists a nonsingular injective right $R$-module $M$ that every not singular right $R$-module $N$ is $M$-retractable.*
($b$) *There exists a nonsingular right $R$-module $M$ that every not singular injective right $R$-module $N$ is $M$-retractable.*
($b'$) *There exists a nonsingular injective right $R$-module $M$ that every not singular injective right $R$-module $N$ is $M$-retractable.*

**Conclusion**
"Retractable modules" which was raised in 1979, has been generalized in this article and valuable results have been obtained that are closely related to other algebraic concepts.

**How to cite:** Moradi, Fatemeh, Beyranvand, Reza. (2023). A generalization of retractable modules. *Mathematical Researches*, 9 (3), 1-20.

شاپا چاپی: ۲۰۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# تعمیمی از مدول‌های جمع‌شدنی

فاطمه مرادی[۱]، رضا بیرانوند[۲] ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران. رایانامه: moradi.fa@fa.lu.ac.ir

۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران. رایانامه: beyranvand.r@lu.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

**نوع مقاله:** مقاله پژوهشی

**تاریخ دریافت:** ۱۳۹۹/۶/۳۰

**تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۱/۲/۸

**تاریخ انتشار:** ۱۴۰۲/۱۱/۱۷

**چکیده**

فرض کنید $M$ و $N$ دو $R-$مدول باشند. می‌گوییم $M$ روی $N$ جمع‌شدنی[۱] است هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر $N'$ از $N$ داشته باشیم $\mathrm{Hom}_R(M,N') \neq 0$. این یک تعمیم از مدول‌های جمع‌شدنی است. در این مقاله ضمن مطالعه و بررسی دقیق ویژگی‌های این تعریف، نتایج شناخته شده در کلاس مدول‌های جمع‌شدنی را بسط داده وحلقه‌های دارای یک مدول که هر مدول (با تولید متناهی) روی آن جمع‌شدنی باشد را رده‌بندی می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:**

مدول جمع‌شدنی،

مدول جمع‌شدنی روی یک مدول،

مدول ناتکین.

**استناد**: مرادی، فاطمه؛ و بیرانوند، رضا؛ (۱۴۰۲). تعمیمی از مدول‌های جمع‌شدنی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۳)، ۱ - ۲۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی



[۱] retractable

نویسنده مسئول ✉ beyranvand.r@lu.ac.ir

## مقدمه

در این مقاله حلقه‌ها یکدار و مدول‌ها، مدول‌های راست یکانی هستند. فرض کنید $R$ یک حلقه و $M$ یک $R-$مدول باشد. مطابق معمول از نماد "$\leq$" برای زیرمدول استفاده می‌کنیم و هرگاه $N \subseteq M$، پوچساز $N$ در $R$ را با نماد $\mathrm{Ann}_R(N) = \{r \in R \mid Nr = 0\}$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین برای $I \subseteq R$، پوچساز $I$ تحت $M$ را به شکل $\mathrm{Ann}_M(I) = \{x \in M \mid xI = 0\}$ تعریف می‌کنیم. یک مدول را یکنواخت[1] گوییم هرگاه اشتراک هر دو زیرمدول ناصفرش، ناصفر باشد. زیرمدول $N$ از $M$ را اساسی[2] گوییم هرگاه اشتراک $N$ با هر زیرمدول ناصفر از $M$، ناصفر باشد. در این‌حالت از نماد $N \leq_e M$ استفاده کرده و $M$ را توسیع اساسی $N$ نیز می‌گوییم. یک زیرمدول در $M$ را متمم[3] گوییم هرگاه این زیرمدول توسیع اساسی سره در $M$ نداشته باشد. برای یک $R-$مدول راست $M$، زیرمدول $Z(M)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(M) = \{x \in M \mid \mathrm{Ann}_R(x) \leq_e R_R\}.$$

اگر $Z(M) = M$، آن‌گاه $M$ را تکین[4] نامیده و اگر $Z(M) = 0$، آن‌گاه $M$ را ناتکین[5]می‌نامیم. جمع همه‌ی ایده‌آل‌های راست ساده حلقه‌ی $R$ را با نماد $\mathrm{Soc}(R_R)$ نشان می‌دهیم و اگر $R$ ایده‌آل راست ساده نداشته باشد می‌نویسیم $\mathrm{Soc}(R_R) = 0$. هم‌چنین اگر $R = \mathrm{Soc}(R_R)$، آن‌گاه $R$ را یک حلقه نیم‌ساده[6] (راست) گوییم و حلقه‌ی نیم‌ساده‌ای که در حد یکریختی تنها دارای یک $R-$مدول راست ساده باشد را نیم‌ساده همگن[7] می‌نامیم. مدول جمع‌شدنی ابتدا در سال ۱۹۷۹در منبع [۴] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت. $R-$مدول $M$ را جمع‌شدنی می‌نامند هرگاه برای هر $0 \neq N \leq M$، $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ناصفر باشد. در ادامه این مفهوم مورد توجه و مطالعه سایر پژوهشگران قرار گرفت که برای نمونه می‌توان به موارد [۱]، [۷] و [۱۱] اشاره کرد. در این مقاله مفهوم جمع‌شدنی را به شکل زیر تعمیم می‌دهیم. برای هر دو $R-$مدول $M$ و $N$، می‌گوییم $M$ روی $N$ جمع‌شدنی است (یا $M$، $N-$جمع‌شدنی است) هرگاه برای هر $0 \neq N' \leq N$، $\mathrm{Hom}_R(M, N')$ ناصفر باشد. بدیهی است که $M$ روی $M$ جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $M$ جمع‌شدنی باشد. بخش دوم به خواص مقدماتی این مفهوم اختصاص دارد. به‌ویژه، بسته بودن این مفهوم نسبت به زیرمدول، توسیع، جمع مستقیم و خارج‌قسمت مدول‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. هم‌چنین، معادل‌هایی برای این مفهوم در حالت کلی و نیز در حالت‌های خاص (در حلقه‌های موروثی[8] یا زمانی که مدول مورد بحث انژکتیو باشد) ارائه شده است. اما سوال اصلی در این پژوهش شناسایی حلقه‌هایی است که دارای یک مدول هستند که هر مدول ناصفر دیگری روی آن جمع‌شدنی باشد. این سوال در

---

[1] uniform
[2] essential
[3] complement
[4] singular
[5] nonsingular
[6] semisimple
[7] homogeneous semisimple
[8] hereditary

بخش سوم پاسخ داده شده است زمانی‌که مدول پیدا شده دلخواه یا با تولید متناهی باشد، حلقه شناسایی و معادل‌هایی برای آن ارائه شده است (قضیه‌های ۱.۳ و ۲.۳ را ببینید). در بخش آخر این مقاله به ارتباط این تعریف از تعمیم مدول‌های جمع‌شدنی با مفاهیم مولد[1] ، هم-مولد[2] و هم-مولد ضعیف[3] می‌پردازیم. به‌عنوان نمونه روی حلقه‌ی گُلدی[4] $R$ که دارای یک مدول بدون‌تاب و با تولید متناهی مثل $X$ است، $R$ یک هم-مولد ضعیف برای $\mathrm{Mod}_R$ است اگر و تنها اگر هر $R-$مدول راست روی $X$ جمع‌شدنی باشد (گزاره ۲.۴). در این‌جا منظور از $\mathrm{Mod}_R$، رسته‌ی همه‌ی $R-$مدول‌های راست است. در انتهای این بخش هم معادل‌هایی برای این‌که یک مدول پروژکتیو روی هر خارج‌قسمت از یک مدول نوتری، جمع‌شدنی باشد ارائه می‌دهیم (گزاره ۸.۴). البته گزاره‌ها و قضایایی که در قسمت مقدمه بیان کردیم تنها بخشی از نتایج بدست آمده است.

## ۱. تعمیمی از مدول‌های جمع‌شدنی

در ابتدای این بخش، مدول جمع‌شدنی روی یک مدول را تعریف و سپس سوال‌های مرسوم و مقدماتی در این زمینه را پاسخ می‌دهیم.

**تعریف ۱.۲**. فرض کنید $M$ و $N$ دو $R-$مدول راست ناصفر باشند. $M$ را $N-$جمع‌شدنی می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر $N'$ از $N$ داشته باشیم $\mathrm{Hom}_R(M, N') \neq 0$.

**گزاره ۲.۲**. فرض کنید $M$ و $N$ دو $R-$مدول راست ناصفر باشند.

(۱) $M$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $M$، $N'-$جمع‌شدنی باشد برای هر $0 \neq N' \leq N$.

(۲) $M$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $M$، $E-$جمع‌شدنی باشد برای هر توسیع اساسی $E$ از $N$.

(۳) $M$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $M$، $K-$جمع‌شدنی باشد برای هر $K \cong N$.

**اثبات**: بدیهی است. ■

حلقه‌ی $R$ را یک $\mathrm{V}-$حلقه راست[5] می‌نامند هرگاه هر $R-$مدول راست ساده، انژکتیو باشد. یک $R-$مدول $M$ را اول[6] گوییم هرگاه برای هر $0 \neq N \leq M$ داشته باشیم $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{Ann}_R(N)$. همچنین $R-$مدول $M$ را نیم‌اول[7] گوییم هرگاه برای هر $0 \neq N \leq M$، $\mathrm{Ann}_R(N)$ یک ایده‌آل نیم‌اول از $R$ باشد.

**گزاره ۳.۲**. (۱) فرض کنید $M$ یک $R-$مدول راست ناصفر و $I$ ایده‌آل راست خودتوانی در حلقه‌ی $R$ باشد. اگر $MI = 0$، آن‌گاه $I$، $M'-$جمع‌شدنی نیست برای هر $M' \leq M$.

[1] generator
[2] cogenerator
[3] weak cogenerator
[4] Goldie
[5] right V-ring
[6] prime
[7] semiprime

(۲) فرض کنید $R$ یک $\mathrm{V}-$حلقه‌ی راست، $M$ یک $R-$مدول راست ناصفر و $I$ یک ایده‌آل راست از $R$ باشد. اگر $MI=0$، آن‌گاه $I$، $M-$جمع‌شدنی نیست.

(۳) اگر $M$ یک $R-$مدول راست اول و $I$ یک ایده‌آل راست از $R$ باشد به‌طوری‌که $MI \neq 0$، آن‌گاه $I$، $M-$جمع‌شدنی است.

**اثبات**: (۱) فرض کنید $f \in \mathrm{Hom}_R(I, M')$، جایی‌که $0 \neq M' \leq M$. در این‌صورت

$$f(I)=f(I^2)=f(I)I \subseteq M'I \subseteq MI=0.$$

بنابراین $f=0$ و در نتیجه $I$، $M'-$جمع‌شدنی نیست.

(۲) می‌دانیم در یک $\mathrm{V}-$حلقه‌ی راست، هر ایده‌آل راستی خودتوان است [۳. قضیه ۲.۶]. بنابراین حکم از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

(۳) فرض کنید $0 \neq M' \leq M$. چون $M$، $R-$مدول اول است، $\mathrm{Ann}_R(M)=\mathrm{Ann}_R(M')$ و از این‌رو $M'I \neq 0$. پس $0 \neq m' \in M'$ وجود دارد به‌طوری‌که $m'I \neq 0$. حال $R-$همریختی $f: I \to M'$ با ضابطه $f(r)=m'r$ یک همریختی ناصفر است و در نتیجه $I$، $M-$جمع‌شدنی است.■

**مثال ۲. ۴**. فرض کنید $N$ یک $R-$مدول راست ناصفر و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از $R-$مدول‌های راست ناصفر باشد. اگر $i \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M_i$، $N-$جمع‌شدنی باشد، آن‌گاه به‌راحتی دیده می‌شود که $\bigoplus_{i\in I} M_i$ و $\prod_{i\in I} M_i$ هر دو $N-$جمع‌شدنی هستند.

می‌دانیم که برای هر $R-$مدول راست ناصفر $N$، $\mathrm{Hom}_R(R,N)$ ناصفر است. بنابراین $R$، $N-$جمع‌شدنی است. حال شرایطی را بررسی می‌کنیم که $R/I$، $N-$جمع‌شدنی باشد جایی‌که $I$ یک ایده‌آل (راست) سره از $R$ است.

**گزاره ۲. ۵**. (۱) فرض کنید $N$ یک $R-$مدول راست ناصفر و $I$ ایده‌آل راستی در $R$ باشد. در این‌صورت $R/I$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر برای هر $0 \neq N' \leq N$ داشته باشیم $\mathrm{Ann}_{N'}(I) \neq 0$.

(۲) فرض کنید $N$ یک $R-$مدول راست یکنواخت و $I$ یک ایده‌آل دوطرفه در $R$ باشد. در این‌صورت $R/I$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}_N(I) \neq 0$.

(۳) فرض کنید $M$ و $N$ دو $R-$مدول راست ناصفر باشند. اگر $M$، $N-$جمع‌شدنی باشد، آن‌گاه مدول $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ نیز $N-$جمع‌شدنی است.

**اثبات**: (۱) چون برای هر $0 \neq N' \leq N$، $\mathbb{Z}-$یکریختی $\mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{I}, N'\right) \cong \mathrm{Ann}_{N'}(I)$ برقرار است، به‌وضوح حکم نتیجه می‌شود.

(۲) فرض کنید $\mathrm{Ann}_N(I) \neq 0$ و $0 \neq N' \leq N$. چون $N$ یکنواخت است، $N' \cap \mathrm{Ann}_N(I) \neq 0$ و از این‌رو $\mathrm{Ann}_{N'}(I) \neq 0$. اکنون حکم از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

(۳) فرض کنید $N \leq N$ و $0 \neq N'$ و $f: M \to N'$ یک $R-$همریختی ناصفر باشد. در این‌صورت $f(M)\mathrm{Ann}_R(M) = f\big(M\,\mathrm{Ann}_R(M)\big) = f(0) = 0$ و در نتیجه $\mathrm{Ann}_{N'}(\mathrm{Ann}_R(M)) \neq 0$. حال حکم از قسمت (۱) نتیجه می‌شود. ■

در گزاره زیر نشان می‌دهیم که این تعمیم از مدول‌های جمع‌شدنی نسبت به جمع مستقیم بسته است.

**گزاره ۶.۲.** فرض کنید $M$ یک $R-$مدول راست و $\{N_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از $R-$مدول‌های راست ناصفر باشد. در این‌صورت $M$، $(\bigoplus_{i\in I} N_i)-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر به ازای هر $i\in I$، $M$، $N_i-$جمع‌شدنی باشد.

**اثبات**: ابتدا مسئله را برای زمانی‌که $I$ متناهی باشد، نشان می‌دهیم. فرض کنید $I = \{1.2.\cdots.n\}$. به‌وضوح حکم برای $n = 1$ برقرار است. فرض کنید $n = 2$ و $K$ زیرمدول ناصفری از $N_1 \oplus N_2$ باشد. اگر $K \cap N_1$ ناصفر باشد، آن‌گاه چون $M$، $N_1-$جمع‌شدنی است، $R-$همریختی ناصفری مانند $f$ از $M$ به $K \cap N_1$ وجود دارد. $M \xrightarrow{f} \mathrm{K} \cap N_1 \xhookrightarrow{\text{شمول}} K$ یک $R-$همریختی ناصفر است. اگر $K \cap N_1 = 0$، آن‌گاه $K$ با زیرمدولی از $N_2$ مانند $L$ یکریخت است. چون $M$، $N_2-$جمع‌شدنی است، $R-$همریختی ناصفری از $M$ به $L$ مانند $f$ وجود دارد. حال ترکیب $M \xrightarrow{f} \mathrm{L} \xrightarrow{\cong} K$ یک $R-$همریختی ناصفر است. بنابراین حکم برای $n = 2$ برقرار است و از این‌رو بنا به استقرای ریاضی، حکم برای هر تعداد متناهی درست است. اکنون حالتی را بررسی می‌کنیم که $I$ یک مجموعه اندیس دلخواه باشد. فرض کنید $K \leq \bigoplus_{i\in I} N_i$ و $0 \neq x \in K$. در این‌صورت مجموعه متناهی $\{i_1.i_2.\cdots.i_n\} \subseteq I$ وجود دارد به‌طوری‌که $xR \subseteq \bigoplus_{j=1}^{n} N_{i_j}$. بنا به قسمت اول اثبات $M$، $(\bigoplus_{j=1}^{n} N_{i_j})-$جمع‌شدنی است و از این‌رو $R-$همریختی ناصفری مانند $f: M \to xR$ وجود دارد. چون $xR \subseteq K$، $f$ یک $R-$همریختی ناصفر از $M$ به $K$ خواهد بود. ■

اگر $M$ و $N$ دو $R-$مدول راست باشند به‌طوری‌که $M$، $N-$جمع‌شدنی است، آن‌گاه لزومی ندارد که $M$، $N/K-$جمع‌شدنی باشد جایی‌که $K$ یک زیرمدول سره از $N$ است. به‌عنوان مثال فرض کنید $V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i D$ یک فضای برداری راست روی یک حلقه‌ی تقسیم $D$ باشد. قرار می‌دهیم $R = \mathrm{End}(V_D)$. می‌دانیم $R$ تنها دارای سه ایده‌آل $(0)$، $I$ و $R$ است که در آن $I = \{f \in R \mid \mathrm{rank}\, f < \infty\}$. نشان می‌دهیم $I$ به‌عنوان $R-$مدول راست روی $R$ جمع‌شدنی است. فرض کنید $J$ یک ایده‌آل راست ناصفر در $R$ باشد و $0 \neq f \in J$. در این‌صورت تابع $h: I \to J$ با ضابطه $h(g) = fg$ یک $R-$همریختی ناصفر است. (زیرا $g \in I$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که $fg \neq 0$). پس $I$ روی $R$ جمع‌شدنی است. از طرفی به‌راحتی دیده می‌شود که $I^2 = I$ و $(R/I)I = 0$. از این‌رو بنا به گزاره ۳.۲ (۱)، $I$ روی $R/I$ جمع‌شدنی نیست. با این حال در زیر نشان می‌دهیم که اگر $K$ زیرمدول متمم $N$ باشد، آن‌گاه $M$، $N/K-$جمع‌شدنی است. همین‌طور یک نتیجه مشابه برای مدول‌های پروژکتیو برقرار است.

**گزاره ۷.۲.** فرض کنید $M$ و $N$ دو $R-$مدول راست ناصفر باشند. در این‌صورت:

(۱) اگر $M$ پروژکتیو باشد، آن‌گاه $M$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول ناصفر $N'$ از $N$ زیرمدول سره‌ای مانند $K \lneqq N'$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M$، $N'/K-$جمع‌شدنی باشد.

(۲) $M$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول متمم و سره‌ی $C$ از $N$، مدول $M$، $N/C-$جمع‌شدنی باشد.

**اثبات**: (۱) واضح است.

(۲) فرض کنید $M$، $N-$جمع‌شدنی باشد و $C$ یک زیرمدول متمم سره از $N$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $0 \neq N'/C \leq N/C$. چون $C$ در $N$ متمم است، $C$ در $N'$ نیز متمم است. بنابراین $C$ در $N'$ اساسی نخواهد بود. فرض کنید $C'$ یک متمم $C$ در $N'$ باشد (توجه داریم که $C'$ ناصفر است). چون $M$، $N-$جمع‌شدنی است، $R-$همریختی ناصفر مانند $f: M \to C'$ وجود دارد. حال ترکیب زیر یک همریختی ناصفر از $M$ به $N'/C$ خواهد بود.

$$M \xrightarrow{f} \mathrm{C}' \cong \mathrm{C}'/(\mathrm{C} \cap C') \cong (C + C')/C \hookrightarrow N'/C.$$

■

فرض کنید $M$ و $N$ دو $R-$مدول راست ناصفر باشند. در زیر حالتی را بررسی می‌کنیم که $N-$جمع‌شدنی بودن $M$ و $E(M)$ با هم معادل‌اند.

**گزاره ۸.۲.** اگر $N$ یک $R$ -مدول راست ناتکین ناصفر باشد به‌طوری‌که هر زیرمدولش انژکتیو باشد، آن‌گاه برای هر $R-$مدول راست $M$ داریم:

$M$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $E(M)$، $N-$جمع‌شدنی باشد.

**اثبات.** فرض کنید $0 \neq N' \leq N$ و $M$، $N-$جمع‌شدنی باشد. بنابراین $R-$همریختی ناصفری مانند $f: M \to N'$ وجود دارد. چون $N'$ انژکتیو است، $f$ را می‌توان به $E(M)$ توسعه داد. برای قسمت عکس، فرض می‌کنیم $E(M)$، $N-$جمع شدنی باشد و $f: E(M) \to N'$ یک $R-$ همریختی ناصفر باشد. اگر $\operatorname{Ker} f = 0$، حکم برقرار است. در غیر این‌صورت $\operatorname{Ker} f \cap M \neq 0$. اگر $M \subseteq \operatorname{Ker} f$، آن‌گاه $\operatorname{Ker} f \leq_e E(M)$ و در نتیجه $E(M)/\operatorname{Ker} f$ تکین است. از طرفی $E(M)/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f \leq N'$ و چون $N$ ناتکین است، $E(M)/\operatorname{Ker} f$ ناتکین بوده و از این‌رو $E(M) = \operatorname{Ker} f$ که یک تناقض است. پس $M \nsubseteq \operatorname{Ker} f$ و ترکیب $M \overset{\text{شمول}}{\hookrightarrow} E(M) \xrightarrow{f} N'$ همریختی ای ناصفر است. ■

در زیر یک شرط معادل برای $N-$جمع‌شدنی بودن یک مدول ارائه می‌دهیم که اثبات آن بدیهی است.

**لم ۹.۲.** فرض کنید $M$ و $N$ دو $R-$مدول را ست نا صفر با شند. دراین صورت $M$، $N-$جمع شدنی ا ست اگر و تنها اگر هر زیرمدول ناصفر $N$ شامل یک زیرمدول ناصفر باشد که با خارج‌قسمتی از $M$ یکریخت است.

**مثال ۱۰.۲.** فرض کنید $R$ یک حلقه کامل چپ[1] باشد به‌طوری‌که تنها دارای یک $R-$مدول راست ساده در حد یکریختی است. اگر $N$ یک $R-$مدول راست ناصفر دلخواه باشد، آن‌گاه هر $R-$مدول راست ناصفر پروژکتیو مانند $P$، $N-$جمع‌شدنی است؛ زیرا از این‌که $R$ حلقه کامل چپ است، نتیجه می‌گیریم که هر $0 \neq N' \leq N$ شامل یک زیرمدول ساده مانند $S$ است. از طرفی چون $P$ پروژکتیو است، دارای زیرمدول ماکزیمالی مانند $P'$ است و بنا به فرض مسئله $P/P' \cong S$. حال حکم از لم ۹.۲ نتیجه می‌شود.

**گزاره ۱۱.۲.** فرض کنید $M$ یک $R-$مدول را ست انژکتیو و $N$ یک $R-$مدول را ست ناتکین با شد. در این صورت $M$، $N-$جمع‌شـدنی اسـت اگر و تنها اگر هر زیرمدول ناصـفر $N$ دارای یک جمعوند مسـتقیم ناصـفر باشـد که با یک جمعوند مستقیم از $M$ یکریخت است.

**اثبات**: فرض کنید $M$، $N-$جمع‌شـــدنی باشـــد و $0 \neq N' \leq N$. در این‌صـــورت $R-$همریختی ناصـــفری مانند $f: M \to N'$ وجود دارد. چون $M/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}\, f \leq N'$ و $N$ ناتکین اســت، $M/\mathrm{Ker}f$ ناتکین اســت. حال انژکتیو بودن $M$ نتیجه می‌دهد که $\mathrm{Ker}f$ نیز انژکتیو اســت و از این رو جمعوند مســتقیمی از $M$ اســت. بنابراین $T \leq M$ وجود دارد که $\mathrm{Ker}f \oplus T = M$. در این‌صورت $T \cong \mathrm{Im}\, f \leq N'$. چون $M$ انژکتیو است، $\mathrm{Im}\, f$ نیز چنین است و در نتیجه $\mathrm{Im}\, f$ یک جمعوند مستقیم از $N'$ است. قسمت عکس از لم ۹.۲ نتیجه می‌شود. ■

از گزاره فوق می‌توان در رد کردن " $N-$جمع‌شدنی بودن" یک مدول استفاده کرد. در مدول‌های تجزیه‌ناپذیر این گزاره مفید خواهد بود. هم‌چنین تحت شرایط گزاره **۱۱.۲،** در دو مدول که هیچ جمعوند مستقیمی از اولی با هیچ جمعوند مستقیمی از دومی یکریخت نباشد، می‌توان گفت که این دو مدول نسبت به هم جمع‌شدنی نیستند. برای نمونه به مثال زیر توجه کنید.

**مثال ۱۲.۲.** $R$ **را** یک دامنه‌ی جابجایی نوتری که میدان نباشد در نظر بگیرید. در این صورت به ازای هر ایده‌آل اول $P$ از $R$ و هر ایده‌آل $I$ از $R$، مدول $E(R/P)$، $I-$جمع‌شدنی نیست. به‌ویژه $E(R/P)$، $R-$جمع‌شدنی نیست. زیرا توجه داریم که چون $R$ دامنه است، ناتکین خواهد بود. از طرفی نوتری جابجایی بودن $R$ نتیجه می‌دهد که $E(R/P)$ به‌عنوان $R-$مدول تجزیه‌ناپذیر و انژکتیو است. حال $I'$ را یک ایده‌آل سره از $R$ بگیریم که مشمول در $I$ است. اگر $E(R/P)$، $I-$جمع‌شدنی باشد، بنا به گزاره ۱۱.۲، جمعوند مستقیمی مانند $0 \neq I'' \subseteq I'$ وجود دارد که $I'' \cong E(R/P)$.

[1] left perfect

بنابراین $I''$ انژکتیو است (به‌عنوان $R-$مدول) و از این‌رو جمعوند مستقیم $R$ است. چون $R$ دامنه است، جمعوند مستقیم نابدیهی ندارد. پس $R = I''$ و در نتیجه $R = I'$ که یک تناقض است. بنابراین $E(R/P)$، $I-$جمع‌شدنی نیست.

حلقه‌ی $R$ را موروثی راست[1] می‌نامند هرگاه هر ایده‌آل راست آن به‌عنوان $\mathrm{R}-$مدول راست، پروژکتیو باشد. هم‌چنین $R$ را نیم‌موروثی راست[2] می‌نامند هرگاه هر ایده‌آل راست با تولید متناهی از آن به‌عنوان $R-$مدول راست، پروژکتیو باشد.

**نتیجه ۱۳.۲.** فرض کنید $R$ یک حلقه‌ی موروثی راست و $N$ یک $R-$مدول راست ناصفر باشد. در این‌صورت هر $R-$مدول راست $M$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر هر زیرمدول ناصفر $N$ دارای یک جمعوند مستقیم ناصفر باشد که با خارج‌قسمتی از $M$ یکریخت است.

**اثبات**: چون در یک حلقه‌ی موروثی راست، خارج‌قسمت هر $R-$مدول راست انژکتیو، انژکتیو است (منبع [۶] قضیه ۲۲.۳)، نتیجه بنا به اثبات گزاره ۱۱.۲، برقرار است. ■

**گزاره ۱۴.۲.** (۱) فرض کنید $M$ یک $R-$مدول راست انژکتیو و $N$ یک $R-$ مدول راست یکنواخت ناتکین باشد. اگر $M$، $N-$جمع‌شدنی باشد، آن‌گاه $N$ یک $R-$مدول ساده‌ی انژکتیو است.

(۲) فرض کنید $R$ یک حلقه‌ی موروثی راست، $M$ یک $R-$مدول راست انژکتیو و $N$ یک $R-$مدول راست یکنواخت باشد. اگر $M$، $N-$جمع‌شدنی باشد، آن‌گاه $N$ یک $R-$مدول ساده‌ی انژکتیو است.

**اثبات**: (۱) فرض کنید $N'$ یک زیرمدول ناصفر از $N$ باشد. بنا به گزاره ۱۱.۲، $N'$ جمعوند مستقیم ناصفری دارد که با یک جمعوند مستقیم از $M$ یکریخت است. چون $N'$ یکنواخت است، جمعوند مستقیم نابدیهی ندارد. بنابراین $N'$ با یک جمعوند مستقیم از $M$ یکریخت است. چون $M$ انژکتیو است، $N'$ نیز انژکتیو خواهد بود و از این‌رو جمعوند مستقیم $N$ است. اما چون $N$ یکنواخت است، $N = N'$ و در نتیجه $N$ ساده‌ی انژکتیو خواهد بود.

(۲) به کمک نتیجه **۱۳.۲** و اثباتی مشابه قسمت (۱)، نتیجه حاصل می‌شود. ■

[1] right hereditary
[2] right semihereditary

## ۳. حلقه‌هایی با یک مدول که هرمدول ناصفر روی آن جمع‌شدنی است

فرض کنید $R$ یک حلقه باشد. وجود یک $R-$مدول که هر $R-$مدول ناصفر روی آن جمع‌شدنی باشد، یکی از اهداف اصلی این پژوهش است. البته واضح است که اگر $R$ یک حلقه تقسیم باشد، آن‌گاه هر $R-$فضای برداری ناصفر روی یک $R-$فضای برداری ناصفر دیگر جمع‌شدنی است. فرض کنید $R$ یک حلقه‌ی دلخواه باشد. از ویژگی‌های مهم $R-$مدول‌های آزاد، وجود همریختی‌های ناصفر از این $R-$مدول‌ها به هر $R-$مدول ناصفر دیگر است. بنابراین اگر $N$ یک $R-$مدول ناصفر باشد، هر $R-$مدول آزاد روی $N$ جمع‌شدنی است ولی لزوماً همه‌ی $R-$مدول‌های ناصفر روی $N$ جمع‌شدنی نیستند. به‌عنوان مثال، هر $\mathbb{Z}-$مدول آزاد روی $\mathbb{Z}$، جمع‌شدنی است اما $\mathbb{Q}$ روی $\mathbb{Z}$ چنین نیست زیرا $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})=0$. به‌عنوان نمونه دیگر می‌توان به حلقه‌های آرتینی ساده اشاره کرد. در واقع اگر $R$ یک حلقه‌ی آرتینی ساده (نیم‌ساده همگن) و $N$ یک $R-$مدول راست ناصفر باشد، آن‌گاه هر $R-$مدول راست ناصفر روی $N$ جمع‌شدنی است. در این بخش ابتدا حلقه‌هایی با یک مدول که هر مدول ناصفر با تولید متناهی روی آن جمع‌شدنی باشد را رده‌بندی می‌کنیم.

**قضیه ۱.۳.** برای یک حلقه‌ی $R$ جملات زیر معادل‌اند.

(۱) $R$ در حد یکریختی تنها دارای یک $R-$مدول راست ساده است.

(۲) $R-$مدول راست نیم‌ساده‌ای وجود دارد که هر $R-$مدول راست ناصفر با تولید متناهی روی آن جمع‌شدنی است.

($'$۲) $R-$مدول راست نیم‌ساده‌ای وجود دارد که هر $R-$مدول راست ناصفر دوری روی آن جمع‌شدنی است.

(۳) $R-$مدول راست ساده‌ای وجود دارد که هر $R-$مدول راست ناصفر با تولید متناهی روی آن جمع‌شدنی است.

($'$۳) $R-$مدول راست ساده‌ای وجود دارد که هر $R-$مدول راست ناصفر دوری روی آن جمع‌شدنی است.

(۴) $R-$مدول راستی وجود دارد که هر $R-$مدول راست ناصفر با تولید متناهی روی آن جمع‌شدنی است.

($'$۴) $R-$مدول راستی وجود دارد که هر $R-$مدول راست ناصفر دوری روی آن جمع‌شدنی است.

(۵) $R-$مدول راستی وجود دارد که هر $R-$مدول راست ساده روی آن جمع‌شدنی است.

**اثبات:** (۱) $\Leftarrow$ (۲) $R-$مدول راست $R/m$ را در نظر بگیرید جایی‌که $m$ یک ایده‌آل راست ماکزیمال از $R$ است. فرض کنید $M$ یک $R-$مدول راست ناصفر با تولید متناهی باشد. در این‌صورت $M$ دارای یک زیرمدول ماکزیمال مانند $M'$ است. بنابراین $M/M'$ ساده بوده و با توجه به فرض (۱)، $M/M'\cong R/m$. حال ترکیب $M\overset{\pi}{\to}M/M'\overset{\cong}{\to}R/m$ یک $R-$همریختی ناصفر است و در نتیجه هر $R-$مدول راست ناصفر با تولید متناهی، $R/m-$جمع‌شدنی است.

(۲) $\Leftarrow$ ($'$۲) واضح است.

($'$۲) $\Leftarrow$ (۳) فرض کنید $N$ یک $R-$مدول نیم‌ساده ناصفر باشد که در شرط ($'$۲) صدق می‌کند. در این‌صورت $N$ شامل یک زیرمدول ساده مانند $S$ است. بنا به گزاره ۲.۲ قسمت (۱)، هر $R-$مدول راست دوری ناصفر روی $S$ جمع‌شدنی است. حال فرض کنید $M$ یک $R-$مدول راست ناصفر با تولید متناهی باشد. $M$ دارای زیرمدول ماکزیمالی مانند $M'$ است و از

این‌رو $R$−مدول دوری (ساده) $M/M'$، $S$−جمع‌شدنی است. پس $R$−همریختی ناصفر مانند $f: M/M' \to S$ وجود دارد. حال ترکیب $M \xrightarrow{\pi} M/M' \xrightarrow{f} S$ ناصفر بوده و حکم برقرار است.

(۳) $\Leftarrow$ (′۳) واضح است.

(′۳) $\Rightarrow$ (۴) فرض کنید $S$ یک $R$−مدول ساده باشد که در شرط (′۳) صدق می‌کند. اگر $M$ یک $R$−مدول راست ناصفر با تولید متناهی باشد، آن‌گاه $M$ شامل زیرمدول ماکزیمالی مانند $M'$ است و در نتیجه $M/M'$ ساده است. بنا به فرض (′۳)، $R$−همریختی ناصفری مانند $f: M/M' \to S$ وجود دارد که نتیجه می‌دهد ترکیب $M \xrightarrow{\pi} M/M' \xrightarrow{f} S$ ناصفر است. بنابراین حکم برقرار است.

(۴) $\Leftarrow$ (′۴) $\Leftarrow$ (۵) واضح هستند.

(۵) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید $N$ یک مدول راست ناصفر باشد که در شرط (۵) صدق می‌کند هم‌چنین فرض کنید $S_1$ و $S_2$ دو $R$−مدول راست ساده باشند. بنا به فرض (۵)، $R$−همریختی ناصفر $f_1: S_1 \to N$ و $f_2: S_2 \to N$ وجود دارند. بنابراین $S_1 \cong f_1(S_1) \leq N$ و $S_2 \cong f_2(S_2) \leq N$. بنا به گزاره ۲.۲ قسمت (۱)، $S_1$، $f_2(S_2)$−جمع‌شدنی است. پس $R$−همریختی ناصفری مانند $f: S_1 \to f_2(S_2)$ وجود دارد و از این‌رو $S_1 \cong f_2(S_2) \cong S_2$ و حکم برقرار است. ■

یادآوری می‌کنیم که حلقه $R$ را یک Max−حلقه راست گویند هرگاه هر $R$−مدول راست ناصفر دارای یک زیرمدول ماکزیمال باشد.

**قضیه ۲.۳.** برای یک حلقه‌ی $R$ جملات زیر معادل‌اند.

(۱) $R$ یک Max−حلقه راست است که در حد یکریختی تنها دارای یک $R$−مدول راست ساده است.

(۲) یک $R$−مدول راست نیم‌ساده وجود دارد که هر $R$−مدول راست ناصفر روی آن جمع‌شدنی است.

(۳) یک $R$−مدول راست ساده وجود دارد که هر $R$−مدول راست ناصفر روی آن جمع‌شدنی است.

(۴) $R$−مدول راستی وجود دارد که هر $R$−مدول راست ناصفر روی آن جمع‌شدنی است.

**اثبات:** (۱) $\Leftarrow$ (۲) $R$−مدول راست $R/m$ را در نظر بگیرید جایی‌که $m$ یک ایده‌آل راست ماکزیمال از $R$ است. فرض کنید $M$ یک $R$−مدول راست ناصفر باشد. بنا به فرض (۱)، $M$ دارای زیرمدول ماکزیمالی مانند $M'$ است. باز بنا به (۱)، $M/M' \cong R/m$ و ترکیب $M \xrightarrow{\pi} M/M' \xrightarrow{\cong} R/m$ یک $R$-همریختی ناصفر است. پس $M$، $R/m$−جمع‌شدنی است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳) چون هر مدول نیم‌ساده ناصفر دارای یک زیرمدول ساده است، حکم از گزاره ۲.۲ قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

(۳) $\Leftarrow$ (۴) واضح است.

(۴) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید $N$ یک $R$-مدول راست باشد که در شرط (۴) صدق می‌کند. در این‌صورت هر $R$−مدول راست ساده نیز $N$−جمع‌شدنی است و بنا به قضیه ۱.۳، $R$ تنها دارای یک مدول ساده در حد یکریختی است. اگر $m$ یک ایده‌آل راست

ماکزیمال از $R$ باشد، آن‌گاه $R-$همریختی ناصفری از $R/m$ به $N$ وجود دارد و در نتیجه $N$ دارای زیرمدولی ساده مانند $S$ است. حال اگر $M$ یک $R-$مدول راست ناصفر باشد، چون $M$، $N-$جمع‌*شدنی* است $R-$همریختی ناصفر مانند $f: M \longrightarrow S$ وجود دارد. از این‌رو $M/\mathrm{Ker}f \cong S$ و در نتیجه $\mathrm{Ker}f$ یک زیرمدول ماکزیمال از $M$ است. ■

حلقه‌ی $R$ را نیم-آرتینی راست[1] گوییم هرگاه هر $R-$مدول راست ناصفر دارای یک زیرمدول ساده باشد. یادآوری می‌کنیم که اگر $R$ یک حلقه نیم‌ساده همگن باشد و $N$ یک $R-$مدول راست ناصفر، آن‌گاه هر $R-$مدول راست ناصفر روی $N$ جمع‌شدنی است. در ادامه شرایطی را بررسی می‌کنیم که در صورت وجود یک $R-$مدول راست که هر $R-$مدول راست ناصفر (یا کلاسی از $R-$مدول‌های راست ناصفر) روی آن جمع‌شدنی باشد، $R$ نیم‌ساده همگن باشد. ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

**لم ۳.۳.** فرض کنید $R$ یک حلقه نیم-آرتینی راست باشد که در حد یکریختی تنها دارای یک $R-$مدول راست ساده است. در این‌صورت همه‌ی $R-$مدول‌های راست یا ناتکین هستند یا هیچ $R-$مدول راست ناتکین ناصفر وجود ندارد.

**اثبات**: اگر همه‌ی $R-$مدول‌های راست ناتکین باشند، چیزی برای اثبات وجود ندارد. پس فرض می‌کنیم $M$ یک $R-$مدول راست باشد که ناتکین نیست. بنابراین $Z(M) \neq 0$ و بنا به فرض مسئله دارای یک زیرمدول ساده مانند $M_0$ است. حال اگر $R-$مدول راست ناتکین ناصفر مانند $N$ وجود داشته باشد، آن‌گاه بنا به فرض مسئله، $N$ دارای زیرمدول ساده‌ای مانند $N_0$ است. توجه داریم که $M_0$ تکین و $N_0$ ناتکین است. از طرفی فرض مسئله ایجاب می‌کند که $M_0 \cong N_0$ که یک تناقض است. بنابراین هیچ $R-$مدول راست ناتکین ناصفر وجود ندارد. ■

**گزاره ۴.۳.** (۱) حلقه‌ی $R$ دارای یک $R-$مدول راست ناتکین است که هر $R-$مدول راست ناصفر روی آن جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $R$ نیم‌ساده همگن باشد.
(۲) فرض کنید $R$ یک حلقه‌ی ناتکین و نیم-آرتینی باشد. در این‌صورت یک $R-$مدول راست وجود دارد که هر $R-$مدول راست ناصفر روی آن جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $R$ نیم‌ساده همگن باشد.

**اثبات:** (۱) فرض کنید $N$ یک $R-$مدول راست ناتکین باشد که هر $R-$مدول راست ناصفر روی آن جمع‌شدنی است. $R-$مدول راست $M$ را در نظر بگیرید. اگر $Z(M) \neq 0$، آن‌گاه بنا به فرض (۱)، $R-$همریختی ناصفری از $Z(M)$ به $N$ وجود دارد. اما چون $N$ ناتکین و $Z(M)$ تکین است، چنین همریختی ناصفری وجود ندارد. بنابراین $Z(M) = 0$ و در نتیجه هر $R-$مدول راست ناتکین است. این نتیجه می‌دهد که $R$ نیم‌ساده است (منبع [۶] مثال ۶.۷ قسمت (۷) را ببینید). حال بنا به قضیه ۱.۳، چون $R$ تنها دارای یک $R-$مدول ساده در حد یکریختی است، نتیجه می‌گیریم که $R$ نیم‌ساده همگن است. عکس مطلب واضح است.

[1] right semi-Artinian

(۲) بنا به قضیه ۱.۳، $R$ تنها دارای یک $R-$مدول راست ساده در حد یکریختی است. حال با توجه به لم ۳.۳، و این‌که $R$ ناتکین است نتیجه می‌گیریم که هر $R-$مدول راست، ناتکین است. از این‌رو $R$ نیم‌ساده همگن خواهد بود. ■

**گزاره ۵.۳.** برای یک حلقه‌ی $R$ جملات زیر معادل‌اند:

(۱) یک $R-$مدول ناتکین وجود دارد که هر $R-$مدول راست غیرتکین (تکین نباشد) روی آن جمع‌شدنی است.

($'$۱) یک $R-$مدول راست انژکتیو ناتکین وجود دارد که هر $R-$مدول راست غیرتکین روی آن جمع‌شدنی است.

(۲) یک $R-$مدول راست ناتکین وجود دارد که هر $R-$مدول راست انژکتیو غیرتکین روی آن جمع‌شدنی است.

($'$۲) یک $R-$مدول راست انژکتیو ناتکین وجود دارد که هر $R-$مدول راست انژکتیو غیرتکین روی آن جمع‌شدنی است.

**اثبات:** (۱) $\Leftrightarrow$ ($'$۱) و (۲) $\Leftrightarrow$ ($'$۲) از گزاره ۲.۲ قسمت (۲) نتیجه می‌شوند.

(۱) $\Leftarrow$ (۲) واضح است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) توجه داریم که اگر $M$ یک $R-$مدول راست ناصفر غیرتکین باشد، آن‌گاه $E(M)$ نیز چنین است، زیرا $Z\big(E(M)\big)\cap M = Z(M)$ و اگر $E(M)$ تکین باشد، داریم $M = E(M)\cap M = Z(M)$ که یک تناقض است. حال با اثباتی مشابه اثبات گزاره ۸.۲ (قسمت عکس) حکم نتیجه می‌شود.■

همان‌طور که قبلاً اشاره شد یک $\mathrm{V}-$حلقه‌ی راست، حلقه‌ای است که هر مدول راست ساده، روی آن انژکتیو باشد. یک تعمیم از $\mathrm{V}-$حلقه‌های راست، $\mathrm{GV}-$حلقه‌های راست هستند. حلقه $R$ را $\mathrm{GV}-$حلقه راست می‌نامند هرگاه هر $R-$مدول راست ساده، انژکتیو یا پروژکتیو باشد. واضح است که هر $\mathrm{V}-$حلقه راست یک $\mathrm{GV}-$حلقه راست است. اگر $R$، $\mathrm{GV}-$حلقه راست باشد و $\mathrm{Soc}(R_R) = 0$ ، آن‌گاه $R$، $\mathrm{V}-$حلقه راست است؛ زیرا اگر $S$ یک $R-$مدول راست پروژکتیو باشد، آن‌گاه ایده‌آل راست ماکزیمال $m$ وجود دارد که $R/m \cong S$. چون $R/m$ پروژکتیو است، $m$ جمعوند مستقیم $R$ خواهد بود. پس ایده‌آل راست مانند $I$ هست که $I\oplus m = R$. بنابراین $I$ ایده‌آل راست ساده است. از طرفی $\mathrm{Soc}(R_R) = 0$ و در نتیجه $I = 0$ که یک تناقض است. پس هر $R-$مدول راست ساده، انژکتیو است و $R$ یک $\mathrm{V}-$حلقه‌ی راست خواهد شد. برای اطلاعات بیشتر در مورد $\mathrm{GV}-$حلقه‌ها می‌توان به منابع [۷] و [۸] اشاره کرد.

منبع [۹] یک مقاله‌ی یک صفحه‌ای است که دارای تنها یک قضیه است با این مضمون که یک حلقه نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل راست ماکزیمال آن جمعوند مستقیمی از حلقه باشد. از این قضیه به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که یک حلقه نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر $R-$مدول راست ساده، پروژکتیو باشد. هر چند این مطلب شناخته شده‌ی آخری در کتاب‌ها و مقاله‌های متعدد آورده شده است ولی ما آن را به همان منبع [۹] ارجاع می‌دهیم.

**گزاره ۶.۳.** (۱) فرض کنید $R$ یک حلقه‌ی نیم‌موروثی راست با $\mathrm{Soc}(R_R)$ ناصفر باشد. اگر یک $R-$مدول راست با تولید متناهی وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر $R-$مدول راست ناصفر روی آن جمع‌شدنی باشد، آن‌گاه $R$ نیم‌ساده همگن است.

(۲) فرض کنید $R$ یک $\mathrm{GV}-$حلقه‌ی راست با $\mathrm{Soc}(R_R)$ ناصفر باشد. اگر یک $R-$مدول راست با تولید متناهی وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر $R-$مدول راست ناصفر روی آن جمع‌شدنی باشد، آن‌گاه $R$ نیم‌ساده همگن است.

**اثبات**: (۱) فرض کنید $I$ یک ایده‌آل راست ساده از $R$ باشد. چون $R$ نیم‌موروثی راست است، $I$ پروژکتیو است. از طرفی بنا به قضیه **۱.۳**، $R$ تنها دارای یک $R-$مدول راست ساده در حد یکریختی است. پس هر $R-$مدول راست ساده پروژکتیو خواهد بود و از این‌رو بنا به [۹]، $R$ نیم ساده همگن است.

(۲) چون $R$ نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر $R-$مدول راست ساده، پروژکتیو باشد و این‌که بنا به قضیه **۱.۳**، $R$ تنها دارای یک $R-$مدول راست ساده است (در حد یکریختی)، کافی است نشان دهیم این $R-$مدول راست ساده، پروژکتیو است. فرض کنید $I$ یک ایده‌آل راست ساده در $R$ باشد. چون $R$، $\mathrm{GV}-$حلقه‌ی راست است، $I$ یا پروژکتیو است یا انژکتیو. اگر $I$ پروژکتیو باشد، حکم برقرار است. پس فرض کنیم $I$ انژکتیو باشد. بنابراین ایده‌آل راست $J$وجود دارد که $I\oplus J=R$. چون $R$ پروژکتیو (آزاد) است، $I$ نیز چنین است. پس در هر صورت $I$ پروژکتیو است و اثبات کامل است. ■

## ۴. مولدها، هم-مولدها و تعمیم مدول‌های جمع‌شدنی

یادآوری می‌کنیم که $R-$مدول راست را یک مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ می‌نامند هرگاه به ازای هر $R-$مدول راست $X$، مجموعه اندیس $\Lambda$ و $R-$همریختی پوشایی از $\bigoplus_\Lambda M$ به $X$ وجود داشته باشد. هم‌چنین $R-$مدول $M$ را یک هم-مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ می‌گویند هرگاه به ازای هر $R-$مدول راست $X$، یک مجموعه اندیس $\Lambda$ و یک $R-$همریختی یک‌به‌یک از $X$ به $\prod_\Lambda M$ وجود داشته باشد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به منبع [۲] مراجعه کنید. واضح است که اگر $M$ یک مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ باشد، آن‌گاه $M$ روی هر $R-$مدول راست $X$، جمع‌شدنی است. هم‌چنین حلقه‌ی $R$ را یک حلقه‌ی گُلدی راست می‌نامند هرگاه در شرط $ACC$ روی ایده‌آل‌های راست که به‌شکل پوچ‌ساز راست هستند و همین‌طور در شرط $ACC$ روی ایده‌آل‌های راست که به‌شکل متمم هستند، صدق کند. در این بخش ابتدا جمع‌شدنی روی یک مدول دلخواه را در میدان کسرهای یک دامنه صحیح $R$ بررسی می‌کنیم و شرایط معادلی برای این‌که یک $R-$زیرمدول در میدان کسرهای $R$ یک مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ باشد را ارائه می‌دهیم. سپس در برخی حلقه‌های خاص، معادل‌هایی برای جمع‌شدنی بودن یک مدول روی مدول دیگر ارائه می‌شود. در انتهای این بخش نیز نشان می‌دهیم که یک مدول پروژکتیو $P$ روی هر خارج‌قسمت ناصفر از یک مدول نوتری $N$ جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $P$ هر زیرمدول $N$ را تولید کند.

فرض کنید $R$ یک دامنه صحیح جابجایی و $Q$ میدان کسرهای آن باشد. برای هر $R-$زیرمدول $X$ از $Q$ قرار می‌دهیم $X^*=\{q\in Q \mid Xq\subseteq R\}$ با توجه به [۶، لم ۱۶.۲]، هر عضو $\mathrm{Hom}_R(X,Q)$ ضربی توسط عنصری از $Q$ است. به‌عبارتی برای هر $f\in \mathrm{Hom}_R(X,Q)$، عضوی مانند $q\in Q$ هست به‌طوری‌که برای هر $x\in X$، $f(x)=xq$.

حال به‌راحتی دیده می‌شود که اگر $f \in \mathrm{Hom}_R(X,R)$، آن‌گاه $q \in X^*$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $f(x) = xq$. هم‌چنین $R$–مدول $X \subseteq Q$ را معکوس‌پذیر[1] می‌نامیم هرگاه $XX^* = R$.

**گزاره ۱.۴.** فرض کنید $R$ یک دامنه صحیح جابجایی و $Q$ میدان کسرهای $R$ باشد. برای $R$–زیرمدول‌های ناصفر $X$، $Y$و $Z$ از $Q$ داریم:

(۱) $X$، $Y$–جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $X$، $Z$–جمع‌شدنی باشد، اگر و تنها اگر $\mathrm{Hom}_R(X,R) \neq 0$.

(۲) اگر $X$ با تولید متناهی باشد، آن‌گاه $X$، $R$–جمع‌شدنی است.

(۳) $X$ یک مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ است اگر و تنها اگر $X$ معکوس‌پذیر باشد، اگر و تنها اگر $X$ پروژکتیو باشد.

**اثبات:** (۱) به‌راحتی می‌توان دید که $Q$ به‌عنوان $R$–مدول، یکنواخت است. بنابراین $Y \cap Z \neq 0$ و از این‌رو $X$، $Y$–جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر $X$، $Z$–جمع‌شدنی باشد. حال فرض کنید $\mathrm{Hom}_R(X,R) \neq 0$ و $f: X \to R$ با ضابطه‌ی $f(x) = xq$ یک همریختی ناصفر در $\mathrm{Hom}_R(X,R)$ باشد جایی‌که $q \in X^*$. هم‌چنین فرض کنید $0 \neq Y' \leq Y$. چون $0 \neq f(X) \cap Y'$، $0 \neq y' \in f(X) \cap Y'$ را می‌توان در نظر گرفت. تابع $f: X \to Y'$ با ضابطه‌ی $f(x) = xqy'$ یک $R$–همریختی ناصفر است. بنابراین $X$، $Y$–جمع‌شدنی است.

(۲) چون $R$ یک دامنه‌ی جابجایی است، $R$ دامنه‌ی گُلدی خواهد بود. از طرفی $R$–مدول با تولید متناهی $X$، یک $R$–مدول بدون‌تاب است. حال بنا به [۳، گزاره ۱۹.۷]، $X$ در جمع مستقیم تعداد متناهی $R$ نشانده می‌شود. این نتیجه می‌دهد که $\mathrm{Hom}_R(X,R) \neq 0$.

(۳) فرض کنید $X$ یک مولد در $\mathrm{Mod}_R$ باشد. در این‌صورت $n \in \mathbb{N}$ و $R$–همریختی پوشایی مانند $f: X^n \to R$ وجود دارند. پس دنباله $(x_1, \cdots, x_n) \in X^n$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x_1, \cdots, x_n) = 1$. بنابراین $\sum_{i=1}^{n} f\iota_i(x_i) = 1$جایی‌که $\iota_i: X \to X^n$ها نگاشت‌های نشاندن هستند. چون به ازای هر $i$، $f\iota_i$ یک $R$– همریختی از $X$ به $R$ است، $q_i \in X^*$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $f\iota_i(x) = xq_i$. بنابراین

$$1 = \sum_{i=1}^{n} f\,\iota_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i \in XX^*$$

و در نتیجه $X$، معکوس‌پذیر است. برای قسمت عکس، فرض کنید $X$ معکوس‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم $X$، یک مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ است. چون $XX^* = 1$، اعضایی مانند $x_i \in X$ و $q_i \in X^*$ وجود دارند به‌طوری‌که

$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i$. اکنون تابع $\phi: X^n \to R$ با ضابطه‌ی $\phi(y_1, \cdots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i q_i$ یک $R$–همریختی پوشا است. بنابراین $R$ توسط $X$ تولید می‌شود. چون $R$ یک مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ است، $X$ یک مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ خواهد بود. این‌که پروژکتیو و معکوس‌پذیر بودن $X$ با هم معادل‌اند از [۶، قضیه ۱۷.۲] نتیجه می‌شود. ■

---

[1] invertible

**گزاره ۲.۴.** فرض کنید $R$ یک حلقه‌ی اول و گُلدی راست و چپ باشد و $X$ یک $R$−مدول راست بدون‌تاب و با تولید متناهی باشد. در این‌صورت برای هر $R$−مدول راست $M$، $\mathrm{Hom}_R(M,R)\neq 0$ اگر و تنها $M$ روی $X$ جمع‌شدنی باشد.

**اثبات:** فرض کنید $\mathrm{Hom}_R(M,R)\neq 0$ و $X'$ یک زیرمدول ناصفر از $X$ باشد. با توجه به فرض‌های مسئله، لم ۲۲.۷ از منبع [۳] نتیجه می‌دهد که $X$، کاملاً وفادار[1] است و از این‌رو $\mathrm{Ann}_R(X)=\mathrm{Ann}_R(X')=0$. همریختی ناصفر $f\colon M\to R$ را در نظر بگیرید. چون $f(M)\neq 0$، $X'f(M)\neq 0$ و از این‌رو $x'\in X'$ وجود دارد که $x'f(M)\neq 0$. حال تابع $g\colon f(M)\to X'$ با ضابطه‌ی $g\big(f(m)\big)=x'f(m)$ یک $R$−همریختی ناصفر است. بنابراین ترکیب $M\xrightarrow{f}R\xrightarrow{g}X'$ یک $R$−همریختی ناصفر است و در نتیجه $M$ روی $X$ جمع‌شدنی است. برای قسمت عکس، فرض می‌کنیم $M$ روی $X$ جمع‌شدنی باشد. با توجه به فرض‌های مسئله، گزاره ۱۹.۷ از منبع [۳] نتیجه می‌دهد که $X$ را می‌توان در جمع مستقیم تعداد متناهی $R$ نشاند. چون $M$ روی $X$ جمع‌شدنی است، وجود یک $R$−همریختی ناصفر از $M$ به $R$ تضمین خواهد شد. بنابراین $\mathrm{Hom}_R(M,R)\neq 0$. ■

**گزاره ۳.۴.** فرض کنید $M$ و $X$ دو $R$−مدول راست باشند. در این‌صورت:

(۱) اگر $\mathrm{Hom}_R(M,\frac{R}{\mathrm{Ann}_R(X)})\neq 0$، آن‌گاه $\mathrm{Hom}_R(M,X)\neq 0$.

(۲) اگر $X$ اول باشد و $\mathrm{Hom}_R(M,\frac{R}{\mathrm{Ann}_R(X)})\neq 0$، آن‌گاه $M$ روی $X$ جمع‌شدنی است.

(۳) فرض کنید $X$ یک $R$−مدول راست ناصفر باشد به‌طوری‌که $P\in Ass(X)$ وجود داشته باشد که $\mathrm{Hom}_R(M,R/P)\neq 0$. در این‌صورت $X'\leq X$ وجود دارد که $M$ روی $X'$ جمع‌شدنی است.

**اثبات:** (۱) فرض کنید $f\in\mathrm{Hom}_R\left(M,\frac{R}{\mathrm{Ann}_R(X)}\right)$ یک عضو ناصفر باشد. در این‌صورت $m_0\in M$ و $r_0\in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $f(m_0)=r_0+\mathrm{Ann}_R(X)\neq 0$. پس $Xr_0\neq 0$ و در نتیجه $x_0\in X$ وجود دارد که $x_0r_0\neq 0$. حال ترکیب $M\xrightarrow{f}\frac{R}{\mathrm{Ann}_R(X)}\xrightarrow{g}X$ یک $R$−همریختی ناصفر است جایی‌که $g$ با ضابطه $g\big(r+\mathrm{Ann}_R(x)\big)=x_0r$ داده می‌شود.

(۲) فرض کنید $0\neq X'\leq X$. چون $X$ اول است، $\mathrm{Ann}_R(X)=\mathrm{Ann}_R(X')$ و در نتیجه بنا به فرض $\mathrm{Hom}_R(M,\frac{R}{\mathrm{Ann}(X')})\neq 0$. حال نتیجه از قسمت (۱) حاصل می‌شود.

(۳) فرض کنید $X$ یک $R$−مدول راست ناصفر باشد. بنا به فرض $R$−مدول اول $0\neq X'\leq X$ وجود دارد به‌طوری‌که $P=\mathrm{Ann}_R(M')$ و $\mathrm{Hom}_R(M,\frac{R}{\mathrm{Ann}(X')})\neq 0$. بنا به قسمت (۱)، $\mathrm{Hom}_R(M,X')\neq 0$. چون $X'$ یک $R$−مدول راست اول است، به ازای هر $0\neq X''\leq X'$ داریم $\mathrm{Ann}_R(X'')=\mathrm{Ann}_R(X')$. بنابراین

[1] fully invariant

$\mathrm{Hom}_R(M,\frac{R}{\mathrm{Ann}(X'')})\neq 0$ و باز بنا به قسمت (۱)، $\mathrm{Hom}_R(M,X'')\neq 0$. این نشان می‌دهد که $M$ روی $X'$جمع‌شدنی است.

**تعریف ۴.۴.** $R-$مدول راست $M$ را یک هم-مولد ضعیف برای $\mathrm{Mod}_R$ می‌نامیم هرگاه برای هر $R-$مدول راست ناصفر $X$، $\mathrm{Hom}_R(X,M)\neq 0$.

واضح است که هر مدول هم-مولد، یک هم-مولد ضعیف است. در زیر نشان می‌دهیم زمانی‌که مدول انژکتیو باشد، این دو مفهوم بر هم منطبق‌اند.

**گزاره ۵.۴**. فرض کنید $M$ یک $R-$مدول راست انژکتیو باشد. در این‌صورت $M$ یک هم-مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ است اگر و تنها اگر $M$ یک هم-مولد ضعیف برای $\mathrm{Mod}_R$ باشد.

**اثبات:** فرض کنید $M$ یک هم-مولد ضعیف برای $\mathrm{Mod}_R$ باشد. در این‌صورت $\mathrm{Hom}_R(X,M)\neq 0$ برای هر $R-$مدول راست ناصفر $X$. به‌ویژه برای هر $R-$مدول راست ساده‌ی $X$، $\mathrm{Hom}_R(X,M)\neq 0$. حال چون $M$ انژکتیو است، بنا به [۶، گزاره ۱۹. ۹]، $M$ یک هم-مولد برای $\mathrm{Mod}_R$ است. عکس مطلب واضح است. ■

در زیر ابتدا حقایقی در مورد مدول‌های پروژکتیو بیان می‌شود سپس به کمک آن‌ها، یک معادل برای این‌که یک مدول پروژکتیو روی یک مدول دلخواه جمع‌شدنی باشد را بیان می‌کنیم.

**گزاره ۶.۴**. فرض کنید $P$ یک $R-$مدول راست پروژکتیو ناصفر باشد. در این‌صورت

(۱) اگر $I$ یک ایده‌آل از حلقه‌ی $R$ باشد به‌طوری‌که $P\neq PI$، آن‌گاه $\mathrm{Hom}_R(P,R/I)\neq 0$.

(۲) اگر $J$ رادیکال جیکوبسون $R$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{Hom}_R(P,R/J)\neq 0$.

(۳) برای هر $R-$مدول راست وفادار $M$، $\mathrm{Hom}_R(P,M)\neq 0$؛ به‌عبارت دیگر یک مدول وفادار یک هم-مولد ضعیف برای هر مدول پروژکتیو است.

اثبات :(۱) چون $P$ پروژکتیو است، $R-$مدول راست $K$ وجود دارد به‌طوری‌که $P\oplus K\cong_R \oplus_\Lambda R$. در نتیجه $(P\oplus K)\underset{R}{\otimes} R/I \underset{R}{\cong}(\underset{\Lambda}{\oplus}R)\underset{R}{\otimes} R/I$ و از این‌رو $(P\underset{R}{\otimes}R/I)\oplus(K\underset{R}{\otimes}R/I)\underset{R}{\cong}\underset{\Lambda}{\oplus}(R\underset{R}{\otimes}R/I)$. این یکریختی اخیر، یکریختی $(P/PI)\oplus(K/KI)\underset{R}{\cong}\underset{\Lambda}{\oplus}R/I$ را به دنبال خواهد داشت و چون طرفین یکریختی به عنوان $R-$مدول راست و $R/I-$مدول راست، ضربشان یکی است، این یکریختی یک یکریختی $R/I-$مدولی نیز هست. در نتیجه $P/PI$ یک $R/I-$مدول پروژکتیو است. از طرفی چون هر $R-$مدول پروژکتیو، جمعوند مستقیم یک $R-$مدول آزاد است، به‌راحتی می‌توان دید که$\mathrm{Hom}_R(P,R)\neq 0$. بنابراین $\mathrm{Hom}_{\frac{R}{I}}(\frac{P}{PI},R/I)\neq 0$. حال بنا به [۱۰، لم ۱.۲]، $\mathrm{Hom}_R(P,R/I)\neq 0$.

(۲) چون $P$ یک $R-$مدول راست پروژکتیو ناصفراست، بنا به [۵، قضیه ۷.۲۴]، $PJ \neq P$ و از این‌رو حکم بنا به (۱) برقرار است.

(۳) چون $P$ پروژکتیو است، $\mathrm{Hom}_R(P,R) \neq 0$ و $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(P,R)$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $x \in P$ وجود دارد که $0 \neq f(x) \in R$. چون $M$ وفادار است،$Mf(x) \neq 0$ و از این‌رو $m \in M$ وجود دارد که $mf(x) \neq 0$.حال تابع $g: R \to M$ با ضابطه $g(r) = mr$ یک همریختی ناصفر است و ترکیب $P \xrightarrow{f} R \xrightarrow{g} M$ نیز یک $R-$همریختی ناصفر خواهد بود. ■

**گزاره ۷.۴**. فرض کنید $P$ یک $R-$مدول راست پروژکتیو و $N$ یک $R-$مدول راست دلخواه باشد. در این‌صورت $P$، $N-$جمع‌شدنی است اگر و تنها اگر برای هر $0 \neq N' \leq N$، $P \neq P\mathrm{Ann}_R(N')$.

**اثبات:** فرض کنید $P$، $N-$جمع‌شدنی باشد و $0 \neq N' \leq N$. در این‌صورت $R-$همریختی ناصفر $f: P \to N'$ وجود دارد. حال اگر $P = P\mathrm{Ann}_R(N')$، آن‌گاه

$$f(P) = f\big(P\mathrm{Ann}_R(N')\big) = f(P)\mathrm{Ann}_R(N') \subseteq N'\mathrm{Ann}_R(N') = 0.$$

یعنی $f = 0$ که یک تناقض است. پس $P \neq P\mathrm{Ann}_R(N')$. قسمت عکس از گزاره ۶.۴ (۱) و گزاره ۳.۴ (۱) نتیجه می‌شود. ■

این مقاله را با ارائه معادل‌هایی برای این‌که یک مدول پروژکتیو روی هر خارج‌قسمت ناصفر از یک مدول نوتری، جمع‌شدنی باشد به پایان می‌بریم.

**گزاره ۸.۴**. فرض کنید $P$ یک $R-$مدول راست پروژکتیو ناصفر و $N$ یک $R-$مدول راست نوتری باشد. در این‌صورت جملات زیر معادل‌اند:

(۱) $P$ یک مولد برای هر زیرمدول $N$ است.

(۲) برای هر $K \lneqq N$، مدول $P$ روی $N/K$ جمع‌شدنی است.

(۳) $P$ روی هر $R-$مدول ساده به‌شکل $N'/K$ جمع‌شدنی است، جایی‌که $N' \leq N$.

اثبات: (۱) ⇐ (۲) فرض کنید $K \lneqq N$ و $0 \neq N'/K \leq N/K$. چون $P$ یک مولد برای $N'$ است، $R-$همریختی پوشایی مانند $f: \bigoplus_{\Lambda} P \to N'$ وجود دارد. حال ترکیب $\bigoplus_{\Lambda} P \xrightarrow{f} N' \xrightarrow{\pi} N'/K$ یک $R-$همریختی ناصفر است. این نتیجه می‌دهد که $R-$همریختی ناصفری از $P$ به $N'/K$ وجود دارد.

(۲) ⇐ (۳) واضح است.

(۳) ⇐ (۱) برای این‌که $P$ یک مولد برای هر زیرمدول $N$ باشد، کافی است نشان دهیم برای هر $N' \leq N$، $Tr(P,N') = N'$ جایی‌که $Tr(P,N') = \sum\{\mathrm{Im}\, f \mid f \in \mathrm{Hom}_R(P,N')\}$. فرض کنید

$Tr(P,N') \subsetneq N'$. چون $N$ نوتری است، زیرمدول ماکزیمال $K$ در $N'$ وجود دارد به‌طوری‌که شامل $Tr(P,N')$ است. بنابراین $N'/K$ ساده است و طبق فرض $R-$همریختی ناصفر $f: P \to N'/K$ وجود دارد. حال چون $P$ پروژکتیو است، $R-$همریختی $g: P \to N'$ وجود دارد به‌طوری‌که نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & \\ N' \arrow[r, "\pi"'] & \frac{N'}{K} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

اما $\operatorname{Im} g \subseteq Tr(P,N')$ و از این‌رو $\operatorname{Im} g \subseteq K$. این نتیجه می‌دهد که $f = \pi g = 0$ که یک تناقض است. بنابراین $Tr(P,N') = N'$ و حکم برقرار است. ■

## References


1. A. N. Abyzov and A. A. Tuganbaev, Retractable and coretractable modules, J. Math sciences, 213 (**2**)(2016), 132-142.
2. F. W. Anderson and K. R. Fuller, Rings and categories of modules, New York; Springer-Verlag 1974.
3. K. R. Goodearl and Jr. R. B. Warfield, An introduction to noncommutative Noetherian rings, London Math. Society student texts, 61. Cambridge university press, Cambridge, 2004.
4. S. M. Khuri, Endomorphism rings and lattice isomorphisms, J. Algebra, **59**(1979), 401-408.
5. T. Y. Lam, A first course in noncommutative rings, New York: Springer-Verlag 1991.
6. T. Y. Lam, Lectures on modules and rings, Graduate texts in Math, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1999.
7. G. O. Michler and O. E. Villamayor, On rings whose simple modules are injective, J. Algebra **25**(1973), 185-201.
8. V. S. Ramamurthy and K. M. Rangaswamy, Generalized V-rings, Math. Scand. **31**(1972), 69- 77.