Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Application of Hat Functions in Solving Fractional Delay Differential Equations

S. Nemati [1] ✉, **Z. Rezaei Kalansara** [2]

1. Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran. ✉ E-mail: s.nemati@umz.ac.ir
2. Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran. E-mail: umz.rezaei@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 3 December 2021
Accepted: 17 May 2023
Published online:
29 February 2024

Keywords:
Fractional delay differential equations,
Caputo fractional derivative,
Generalized hat functions,
Operational matrix of fractional integral,
Delay operational matrix.

ABSTRACT

Introduction

The main aim of the present work is to introduce an effective numerical method for solving fractional delay differential equations. Consider the following problem

$$\begin{cases} D_C^{\alpha} y(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), & 0 \le t \le \mathcal{L}, \quad 0 < \alpha \le 1, \\ y(t) = y_0(t), & -\tau \le t \le 0, \end{cases}$$

where f is a linear or nonlinear function and the fractional derivative is considered in the sense of Caputo. Also, $y_0 \in C^2[-\tau, 0]$ is a given function, $\tau > 0$ is the delay constant and y is the unknown function to be determined. Our numerical method for solving the above problem is based on using the generalized hat functions and their useful properties.

Material and Methods

In this paper, by considering a set of basis functions which are the generalized hat functions, we suggest a numerical method for solving the main problem. The main properties of the hat functions including operational matrix of Riemann-Liouville fractional integral are recalled. Furthermore, we introduce the delay operational matrix of the basis functions. We expand $D_C^{\alpha} y(t)$ in terms of $n+1$ basis functions with unknown coefficients. By this way, the introduced operational matrices help us to give approximations of $y(t)$ and $y(t-\tau)$ in terms of the hat basis functions. Finally, these approximations together with the use of given initial function transform the main problem into a system of algebraic equations. By writing the resulted system in detail, we find out that for solving the problem, we need to solve n nonlinear algebraic equations which can be solved using Newton's iterative method with zero initial value for each unknown parameter. Error analysis of the proposed method is studied and $O(h^2)$ order of convergence is proved for the numerical solution.

Results and discussion

Some test problems are considered and solved using the proposed method in order to illustrate the efficiency and accuracy of this method. We reported the maximum absolute error and convergence order for each example which confirm the theoretical discussion of the error. The obtained results are given in some tables and figures and, we compare the error with other existing

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

methods for solving this kind of problems. It is found from these results that the numerical solution converges to the exact one when the number of basis functions increases.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- Generalized hat functions are very simple basis functions and their properties are very useful.
- The advantage of this method comparing to the other existing spectral methods for solving the problem under study is that it reduces this problem to solving some nonlinear algebraic equations. This property was checked by studying the system complexity.
- Convergence analysis shows the $O(h^2)$ order of convergence and the numerical results confirm the theoretical discussion of the error.

How to cite: Nemati, S., & Rezaei Kalansara, Z. (2023). Application of hat functions in solving fractional delay differential equations. *Mathematical Researches*, 9 (4), 186 – 205.

© S. Nemati, Z. Rezaei Kalansara. Publisher: Kharazmi University

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

کاربرد توابع کلاهی در حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری

سمیه نعمتی[1] ✉، زهرا رضائی کلانسرا[2]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. رایانامه: s.nemati@umz.ac.ir
۲. گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. رایانامه: umz.rezaei@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۹/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۲/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری،
مشتق کسری کاپوتو،
توابع کلاهی تعمیم یافته،
ماتریس عملیاتی انتگرال کسری،
ماتریس عملیاتی تأخیر.

چکیده

در این مقاله، با استفاده از یک روش جدید بر اساس توابع کلاهی تعمیم یافته به حل عددی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری می‌پردازیم که مشتق کسری در آنها از نوع کاپوتو در نظر گرفته می‌شود. ابتدا، به معرفی توابع کلاهی تعمیم یافته و ماتریس‌های عملیاتی متناظر با این توابع می‌پردازیم. سپس، برای حل مسأله مورد نظر، توابع موجود در آن با استفاده از توابع پایه‌ای تقریب زده می‌شوند. با به‌کارگیری خواص توابع کلاهی تعمیم یافته، مشتق کسری کاپوتو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل، دستگاهی از معادلات جبری حاصل می‌شود که با حل آن ضرایب مجهول تعیین می‌شود. با جایگذاری مقادیر حاصل، تقریبی از جواب مسأله به دست می‌آید. به‌علاوه، پیچیدگی محاسباتی دستگاه حاصل بررسی می‌شود. در ادامه، تحلیل خطای روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان، با ارائه سه مثال کارایی و دقت روش پیشنهادی نشان داده می‌شود.

استناد: نعمتی، سمیه؛ و رضائی کلانسرا، زهرا (۱۴۰۲). کاربرد توابع کلاهی در حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۱۸۶ – ۲۰۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.

CC BY NC

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری یکی از شاخه‌های نسبتاً جدید در ریاضیات کاربردی بر پایه انتگرال و مشتقات از مرتبه غیر صحیح است. همچنین، معادلات دیفرانسیل تأخیری دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل هستند که در آنها جواب معادله فقط به اطلاعات در شرایط فعلی نیاز ندارد، بلکه به بعضی اطلاعات، حالات و شرایط قبلی نیز نیازمند است. از آن‌جایی‌که برخی از مدل‌ها ارتباط زیادی با شرایط گذشته دارند، درج تأخیر زمانی این مدل‌ها را واقع بینانه‌تر می‌کند. معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری یک تعمیم از معادلات دیفرانسیل تأخیری به مرتبه غیرصحیح هستند. این معادلات در زمینه‌های مختلف نظیر: تئوری کنترل، فیزیک، زیست شناسی، اقتصاد، پردازش سیگنال و تصویر، مکانیک و سیستم‌های دینامیکی کاربردهای بسیاری دارند [۱، ۶]. بسیاری از پژوهشگران به مطالعه معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری پرداخته و روش‌های مختلفی برای حل این معادلات ارائه کرده‌اند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش فرمول‌های دیفرانسیل پسرو کسری [۳]، روش مبتنی بر چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته [۸]، روش مبتنی بر موجک‌های لاگور اصلاح شده[۴]، ماتریس عملیاتی ایجاد شده بر پایه موجک‌های برنولی [۱۲]، روش ماتریس عملیاتی بر اساس توابع تکه‌ای تیلور کسری [۱۱]، روش موجک پل تعمیم یافته [۱۳]، و استفاده از توابع میتاگ-لفلر مرتبه کسری [۲] اشاره کرد.

در این مقاله، معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری به‌صورت زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} D_C^{\alpha} y(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), & 0 \le t \le \mathcal{L}, \quad 0 < \alpha \le 1, \\ y(t) = y_0(t), & -\tau \le t \le 0, \end{cases} \tag{۱}$$

که در آن f یک تابع پیوستهٔ خطی یا غیرخطی بوده و مشتق کسری از نوع کاپوتو است. همچنین، $y_0 \in C^2[-\tau,0]$ تابعی معلوم، $\tau > 0$ ثابت تأخیر و y تابعی مجهول است که باید تعیین شود. در این پژوهش، به حل عددی مسأله (۱) با استفاده از خواص توابع کلاهی تعمیم یافته می‌پردازیم. نشان داده می‌شود که روش پیشنهادی از پیچیدگی محاسباتی بسیار پایین و دقت مطلوبی برخوردار است. لازم به ذکر است که سایر روش‌های طیفی که تاکنون برای حل مسائل به شکل (۱) معرفی شده‌اند، منجر به تولید دستگاهی از معادلات غیرخطی می‌شوند، در حالی‌که روش پیشنهادی در این مقاله منجر به حل چند معادله غیرخطی می‌شود که تنها بر حسب یک مجهول بازنویسی و حل می‌شوند.

ساختار این مقاله بدین شرح است: ابتدا، مقدماتی از حسابان کسری و خواص توابع کلاهی تعمیم یافته بیان می‌شود. سپس، به ارائه یک تکنیک عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری به شکل (۱) می‌پردازیم و همچنین، پیچیدگی محاسباتی دستگاه حاصل بررسی می‌شود. در ادامه، به تحلیل خطای روش پرداخته می‌شود. به‌علاوه، برای نشان دادن دقت و کارایی روش، سه مثال در نظر گرفته می‌شود. در پایان، به بیان نتایج می‌پردازیم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

۱. مفاهیم اساسی

در این بخش، به بیان مقدماتی از حسابان کسری و خواص توابع کلاهی تعمیم یافته می‌پردازیم.

تعریف ۱،۱. عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\boldsymbol{\alpha > 0}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

$$I_0^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds\,,$$

که در آن

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt\,,$$

تابع گامای اویلر است.

تعریف ۲،۱. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha > 0$ به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

$$D_C^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} y^{(m)}(s) ds\,,\ m-1 < \alpha \le m,\ m \in \mathbb{N}, \quad m = \lceil \alpha \rceil,$$

که در آن $\lceil \cdot \rceil$ تابع سقف است.

نکته ۱،۱. به ازای $m \in \mathbb{N}$، $m-1 < \alpha \le m$، عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو در خاصیت زیر صدق می‌کنند [۱۰]:

$$I_0^{\alpha}\left(D_C^{\alpha} y(t)\right) = y(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{t^i}{i!} y^{(i)}(0), \qquad t > 0. \tag{۲}$$

تعریف ۳،۱. با در نظر گرفتن بازه $[0,\mathcal{L}]$ و تقسیم آن به n زیر بازه $[ih,(i+1)h]$، به ازای $i = 0,1,\dots,n-1$، با طول گام h که $h = \frac{\mathcal{L}}{n}$، توابع کلاهی تعمیم یافته $\{\psi_i\}_{i=0}^{n}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۵]:

$$\psi_0(t) = \begin{cases} \dfrac{h-t}{h}, & 0 \le t \le h, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\psi_i(t)=\begin{cases}\dfrac{t-(i-1)h}{h}, & (i-1)h\le t\le ih,\\[2ex] \dfrac{(i+1)h-t}{h}, & ih\le t\le (i+1)h,\\[2ex] 0, & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

$$\psi_n(t)=\begin{cases}\dfrac{t-(\mathcal{L}-h)}{h}, & \mathcal{L}-h\le t\le \mathcal{L},\\[2ex] 0, & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

توابع کلاهی تعمیم یافته در فضای $L^2[0,\mathcal{L}]$ مستقل خطی هستند. همچنین، با استفاده از تعریف این توابع، خاصیت زیر برقرار است [۱۵]:

$$\psi_i(jh)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{۳}$$

یک تابع دلخواه $y\in L^2[0,\mathcal{L}]$ را می‌توان با استفاده از توابع کلاهی تعمیم یافته به‌صورت زیر تقریب زد [۱۵]:

$$y(t)\simeq y_n(t)=\sum_{i=0}^{n}a_i\psi_i(t)=A^T\Psi(t), \tag{۴}$$

که در آن

$$\Psi(t)=[\psi_0(t),\psi_1(t),\cdots,\ \psi_n(t)]^T, \tag{۵}$$

و

$$A=[a_0,a_1,\cdots,a_n]^T,$$

به‌طوری‌که $a_i=y(ih)$.

تعریف ۴,۱. فرض کنیم Ψ بردار توابع کلاهی تعمیم یافته تعریف شده در (۵) و $\alpha>0$ باشد، آنگاه

$$I_0^{\alpha}\,\Psi(t)\simeq P^{\alpha}\Psi(t), \tag{۶}$$

که در آن P^{α} ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α با بعد $(n+1)\times(n+1)$ است که به‌صورت زیر معرفی می‌شود [۱۵]:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$P^{\alpha}=\frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{bmatrix}0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \cdots & \zeta_n\\ 0 & 1 & \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \varrho_1 & \cdots & \varrho_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \varrho_{n-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}, \tag{۷}$$

که در آن

$$\zeta_i=i^{\alpha}(\alpha-i+1)+(i-1)^{\alpha+1},\quad i=1,2,\cdots,n,$$
$$\varrho_i=(i+1)^{\alpha+1}-2i^{\alpha+1}+(i-1)^{\alpha+1},\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

اگر تابع y توسط توابع کلاهی تعمیم یافته به‌صورت معادله (۴) تقریب زده شود، آنگاه می‌توان $I_0^{\alpha}y(t)$ را با استفاده از (۶) به‌صورت زیر تقریب زد:

$$I_0^{\alpha}y(t)\simeq I_0^{\alpha}y_n(t)=A^TP^{\alpha}\Psi(t).$$

تعریف ۵.۱. برای معرفی ماتریس عملیاتی تأخیر، $\psi_i(t-\tau)$، که در آن $\tau>0$ است را با استفاده از توابع کلاهی تعمیم یافته تقریب می‌زنیم. با در نظر گرفتن بردار پایه‌ای $\Psi(t)$ به‌صورت (۵) داریم:

$$\Psi(t-\tau)\simeq R_{\tau}\Psi(t), \tag{۸}$$

که در آن R_{τ} ماتریس عملیاتی تأخیر نامیده می‌شود و یک ماتریس از مرتبه $(n+1)\times(n+1)$ است که به‌صورت زیر می‌باشد [۹]:

$$R_{\tau}=[r_{i,j}^{\tau}]=[\psi_i(jh-\tau)]_{i,j=0,1,\cdots,n}. \tag{۹}$$

اگر تابع y توسط توابع کلاهی به‌صورت (۴) تقریب زده شود، آنگاه می‌توان $y(t-\tau)$ را با استفاده از (۸) به شکل زیر تقریب زد:

$$y(t-\tau)\simeq A^TR_{\tau}\Psi(t).$$

۲. روش عددی

در این بخش، به حل عددی معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری (۱) با استفاده از توابع کلاهی تعمیم یافته می‌پردازیم. این روش معادله دیفرانسیل داده شده را به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌کند. در ادامه، پیچیدگی محاسباتی دستگاه حاصل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

۱,۲ معرفی روش: برای پیدا کردن جواب عددی مسأله (۱)، $D_C^{\alpha}y(t)$ را با استفاده از توابع پایه‌ای به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$D_C^{\alpha}y(t) \simeq A^T\Psi(t). \tag{۱۰}$$

با اعمال انتگرال‌گیری از مرتبه α روی معادله (۱۰) و با استفاده از (۶)، به‌کارگیری خاصیت انتگرال ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو ذکر شده در (۲) و شرط اولیه داده شده در معادله (۱) نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$y(t) \simeq I_0^{\alpha}\big(A^T\Psi(t)\big) + y(0) = (A^TP^{\alpha} + Y_0^T)\Psi(t) = X_0^T\Psi(t). \tag{۱۱}$$

در (۱۱) از تقریب $y_0(0) \simeq Y_0^T\Psi(t)$ استفاده شده است. همچنین

$$Y_0 = [y_{0,0}, y_{0,1}, \cdots, y_{0,n}]^T, \qquad y_{0,j}= y_0(0),$$

$$X_0 = (A^TP^{\alpha} + Y_0^T)^T = [x_{0,0}, x_{0,1}, \cdots, x_{0,n}]^T.$$

با جایگذاری $t-\tau$ بجای t در معادله (۱۱) و با استفاده از (۸) خواهیم داشت:

$$y(t-\tau) \simeq (A^TP^{\alpha} + Y_0^T)\Psi(t-\tau) = (A^TP^{\alpha} + Y_0^T)R_{\tau}\Psi(t) = X_1^T\Psi(t), \tag{۱۲}$$

که در آن

$$X_1 = R_{\tau}^T X_0 = [x_{1,0}, x_{1,1}, \cdots, x_{1,n}]^T.$$

با قرار دادن $t = jh$ در (۱۱) و (۱۲) و با به‌کارگیری خاصیت (۳) به دست می‌آوریم:

$$y(jh) = x_{0,j},$$

$$y(jh-\tau) = x_{1,j}.$$

حال می‌توان تقریبی از تابع f را به‌ازای $t > \tau$، با استفاده از توابع پایه‌ای در نظر گرفته شده به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} f(t, y(t), y(t-\tau)) &\simeq \sum_{j=0}^{n} f(jh, y(jh), y(jh-\tau))\psi_j(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n} f\big(jh, x_{0,j}, x_{1,j}\big)\psi_j(t) \\ &= f_n\big(t, y(t), y(t-\tau)\big). \end{aligned} \tag{۱۳}$$

برای $0 \le t \le \tau$، با استفاده از تابع اولیه که در (۱) داده شده است، داریم

$$y(t-\tau) = y_0(t-\tau).$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

بنابراین، به‌ازای مقادیری از t که در این بازه قرار دارند می‌توان تابع جدید g را به شکل زیر تعریف کرد:

$$g\big(t, y(t)\big) = f\big(\mathrm{t}, y(t), y_0(t-\tau)\big).$$

با تقریب زدن این تابع با استفاده از توابع پایه‌ای خواهیم داشت:

$$g\big(t, y(t)\big) \simeq \sum_{j=0}^{n} g(jh, y(jh))\psi_j(t) = \sum_{j=0}^{n} g\big(jh, x_{0,j}\big)\psi_j(t). \tag{۱۴}$$

در ادامه، بردار F را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} F(\Theta, X_0, X_1) = \Big[&g\big(0\,, x_{0,0}\big), g\big(h, x_{0,1}\,\big), \cdots, g\big(kh, x_{0,k}\big), f\Big((k \\ &+1)h, x_{0,k+1}, x_{1,k+1}\Big), \cdots, f\big(\mathcal{L}, x_{0,n}, x_{1,n}\big)\Big], \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن $k = \lfloor \frac{\tau}{h} \rfloor$ و $\lfloor \cdot \rfloor$ به تابع کف اشاره دارد.

در نتیجه با جایگذاری معادلات (۱۰)، (۱۳) و (۱۴) در معادله (۱) و با استفاده از (۱۵) به دست می‌آوریم:

$$A^T\Psi(t) = F(\Theta, X_0, X_1)\Psi(t),$$

که منجر به دستگاه معادلات زیر می‌شود:

$$A^T - F(\Theta, X_0, X_1) = 0.$$

به‌عبارت دیگر، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_0 &= g\big(0\,, x_{0,0}\big), \\ a_1 &= g\big(h, x_{0,1}\,\big), \\ &\vdots \\ a_k &= g\big(kh, x_{0,k}\big), \\ a_{k+1} &= f\Big((k+1)h, x_{0,k+1}, x_{1,k+1}\Big), \\ &\vdots \\ a_n &= f\big(\mathcal{L}, x_{0,n}, x_{1,n}\big). \end{aligned} \tag{۱۶}$$

دستگاه بالا شامل $(n+1)$ معادله جبری با $(n+1)$ پارامتر مجهول است که درایه‌های بردار A هستند. با حل این دستگاه، تقریبی از جواب معادله با استفاده از (۱۱) به دست می‌آید.

۲,۲ پیچیدگی دستگاه حاصل: سرعت روش عددی داده شده به سرعت حل دستگاه (۱۶) بستگی دارد. بنابراین، فرم این دستگاه جنبه مهمی از روش ارائه شده است. در این‌جا، شکل دستگاه داده شده در (۱۶) را با جزئیات بررسی می‌کنیم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

با توجه به فرم ماتریس عملیاتی انتگرال کسری توابع کلاهی تعمیم یافته داده شده در (۷)، می‌توان ماتریس را به‌صورت زیر نوشت [۱۰]:

$$P^{\alpha} = \left[p_{i,j}^{\alpha}\right], \quad i,j = 0,1,\cdots,n,$$

با این شرایط که

$$p_{i,0}^{\alpha} = 0, \quad i = 0,1,2,\cdots,n,$$

$$p_{i,j}^{\alpha} = 0, \quad 1 \le j < i \le n.$$

واضح است که این ماتریس عملیاتی یک ماتریس بالا مثلثی است.

با توجه به فرم ماتریس عملیاتی تأخیر داده شده در (۹) به ازای $i = 0$، با استفاده از تعریف توابع کلاهی تعمیم یافته، داریم:

$$\psi_0(jh-\tau) = \begin{cases} \dfrac{h-(jh-\tau)}{h}, & \dfrac{\tau}{h} \le j \le 1+\dfrac{\tau}{h}, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

با در نظر گرفتن این‌که j یک عدد صحیح است، داریم:

$$\psi_0(jh-\tau) = \begin{cases} \dfrac{h-(jh-\tau)}{h}, & \left\lceil\dfrac{\tau}{h}\right\rceil \le j \le 1+\left\lfloor\dfrac{\tau}{h}\right\rfloor, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \tag{۱۷}$$

با روشی مشابه به ازای $i = 1,2,\cdots,n-1$، با توجه به تعریف توابع کلاهی تعمیم یافته خواهیم داشت:

$$\psi_i(jh-\tau) = \begin{cases} \dfrac{(jh-\tau)-(i-1)h}{h}, & (i-1)+\left\lceil\dfrac{\tau}{h}\right\rceil \le j \le i+\left\lfloor\dfrac{\tau}{h}\right\rfloor, \\ \dfrac{(i+1)h-(jh-\tau)}{h}, & i+\left\lceil\dfrac{\tau}{h}\right\rceil \le j \le (i+1)\left\lfloor\dfrac{\tau}{h}\right\rfloor, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \tag{۱۸}$$

همچنین، به ازای $i = n$ و با توجه به $\mathcal{L} = nh$، داریم:

$$\psi_n(jh-\tau) = \begin{cases} \dfrac{(jh-\tau)-(\mathcal{L}-h)}{h}, & n-1+\left\lceil\dfrac{\tau}{h}\right\rceil \le j \le n, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases} \tag{۱۹}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

حال با استفاده از (۱۷)-(۱۹) به دست می‌آوریم:

$$r_{ij}^{\tau}=\begin{cases}\psi_i(jh-\tau), & j\geq i,\\ 0, & j<i.\end{cases}$$

بنابراین ماتریس R_τ یک ماتریس بالا مثلثی است.

در نتیجه، دستگاه معادلات برای توابع کلاهی تعمیم یافته را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$a_0=g\left(0,y_{0,0}\right), \tag{۲۰}$$

$$a_1=g\left(h,\sum_{s=0}^{1}a_s p_{s,1}^{\alpha}+y_{0,1}\right), \tag{۲۱}$$

$$a_2=g\left(2h,\sum_{s=0}^{2}a_s p_{s,2}^{\alpha}+y_{0,2}\right),$$

$$\vdots$$

$$a_k=g\left(kh,\sum_{s=0}^{k}a_s p_{s,k}^{\alpha}+y_{0,k}\right),$$

$$a_{k+1}=f\left((k+1)h,\sum_{s=0}^{k+1}a_s p_{s,k+1}^{\alpha}+y_{0,k+1},\sum_{m=1}^{k+1}r_{m,k+1}^{\tau}\left(\sum_{s=0}^{m}a_s p_{s,m}^{\alpha}\right)+y_{0,k+1}\right),$$

$$\vdots$$

$$a_n=f\left(\mathcal{L},\sum_{s=0}^{n}a_s p_{s,n}^{\alpha}+y_{0,n},\sum_{m=1}^{n}r_{m,n}^{\tau}\left(\sum_{s=0}^{m}a_s p_{s,m}^{\alpha}\right)+y_{0,n}\right). \tag{۲۲}$$

همان‌طورکه در (۲۰) مشاهده می‌شود مقدار پارامتر مجهول a_0 به آسانی از شرط اولیه به دست می‌آید. بنابراین با جایگذاری a_0 در (۲۱)، یک معادله غیرخطی بر حسب مجهول a_1 حاصل می‌شود که با حل این معادله با استفاده از روش تکراری نیوتن و با مقدار اولیه صفر، مقدار a_1 تعیین می‌شود. این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که a_n با حل (۲۲) حاصل می‌شود که در آن a_0، a_1،⋯،a_{n-1} جایگذاری شده‌اند. بنابراین، روش پیشنهادی بر اساس توابع کلاهی تعمیم یافته مسأله اصلی را

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

به حل n معادله جبری کاهش می‌دهد. لازم به ذکر است، با توجه به همگرایی بسط تابع بر اساس توابع کلاهی تعمیم یافته، ضرایب توابع پایه‌ای در این بسط به صفر میل می‌کنند. با در نظر گرفتن مقدار اولیه صفر در روش نیوتن برای حل هر یک از معادلات غیرخطی حاصل، مقادیر a_i، ($i = 1,2, \dots, n$)، به‌آسانی با استفاده از دستور $FindRoot$ در نرم افزار متمتیکا حاصل می‌شوند.

۳. تحلیل خطا

مطالب این بخش به تحلیل خطای روش ارائه شده در بخش قبل اختصاص می‌یابد. با این هدف، ابتدا لم زیر را از مرجع [۵] یادآوری می‌کنیم.

لم ۱,۳. [۵] فرض کنید $\mathcal{L} > 0$، $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ و $\varphi: [0,\mathcal{L}] \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و نامنفی باشد. با فرض $\alpha > 0$، اگر داشته باشیم

$$\varphi(t) \leq \lambda_1 + \lambda_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds\,, \qquad \forall t \in [0, \mathcal{L}],$$

آنگاه یک ثابت $\lambda = \lambda(\lambda_2,\mathcal{L},\alpha)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\varphi(t) \leq \lambda\lambda_1, \qquad \forall t \in [0,\mathcal{L}].$$

قضیه ۱,۳. [۱۵] اگر $y \in C^2([0, \mathcal{L}])$ و y_n تقریب آن با استفاده از $n+1$ تابع کلاهی تعمیم یافته باشد، آنگاه

$$|y(t) - y_n(t)| = O(h^2).$$

که در آن $h = \frac{\mathcal{L}}{n}$.

قضیه ۲,۳. فرض کنید y جواب دقیق مسأله (۱) و $\tilde{y}_n$ جواب تقریبی حاصل از روش ارائه شده در بخش قبل باشد. همچنین، فرض کنید $f \in C^2([0,\mathcal{L}] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ در شرط لیپ‌شیتز به‌صورت زیر صدق کند:

$$|f(t,u,v) - f(t,\tilde{u},\tilde{v})| \leq \beta_1|u - \tilde{u}| + \beta_2|v - \tilde{v}|, \tag{۲۳}$$

به‌طوری‌که β_1 و β_2 ثابت‌های حقیقی مثبت هستند. اگر $\beta_1\mathcal{L}^\alpha + \beta_2(\mathcal{L}-\tau)^\alpha < \Gamma(\alpha+1)$، آنگاه،

$$\|y - \tilde{y}_n\|_\infty = O(h^2),$$

که در آن، $\|y - \tilde{y}_n\|_\infty = \max_{0\leq t\leq \mathcal{L}} |y(t) - \tilde{y}_n(t)|$.

اثبات: جواب دقیق و جواب تقریبی، به‌ترتیب، در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$D_C^\alpha y(t) = f\Big(t, y(t), y(t-\tau)\Big), \tag{۲۴}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$D_C^{\alpha}\tilde{y}_n(t) = f_n\left(t,\tilde{y}_n(t), \tilde{y}_n(t-\tau)\right), \tag{۲۵}$$

با کم کردن (۲۵) از (۲۴) و با توجه به خطی بودن عملگر مشتق کسری کاپوتو داریم:

$$D_C^{\alpha}\left(y(t) - \tilde{y}_n(t)\right) = f\left(t, y(t), y(t-\tau)\right) - f_n\left(t,\tilde{y}_n(t), \tilde{y}_n(t-\tau)\right),$$

حال، عملگر انتگرال‌گیری ریمان-لیوویل را روی دو طرف معادله بالا اعمال می‌کنیم و با استفاده از (۲) و داشتن $\tilde{y}_n(0) = y(0)$، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y(t) - \tilde{y}_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(f\left(s, y(s), y(s-\tau)\right) - f_n\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right)\right)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(f\left(s, y(s), y(s-\tau)\right) - f\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right)\right)ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(f\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right) - f_n\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right)\right)ds. \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۱,۳ برای تابع f، داریم

$$\left|f\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right) - f_n\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right)\right| = O(h^2).$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} |y(t) - \tilde{y}_n(t)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s, y(s), y(s-\tau)\right)\right. \\ &\left. - f\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right)\right| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right)\right. \\ &\left. - f_n\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right)\right| ds \\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s, y(s), y(s-\tau)\right) - f\left(s,\tilde{y}_n(s), \tilde{y}_n(s-\tau)\right)\right| ds + \delta h^2, \end{aligned}$$

به‌طوری‌که δ به $\mathcal{L}$ و α بستگی دارد. در ادامه، با استفاده از شرط لیپ‌شیتز که در (۲۳) داده شد، نامساوی زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} |y(t) - \tilde{y}_n(t)| &\le \frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \ |y(s) - \tilde{y}_n(s)|ds \\ &\quad + \frac{\beta_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,|y(s-\tau) - \tilde{y}_n(s-\tau)|ds + \delta h^2 \end{aligned}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

به ازای $0 \le t \le \tau$، با توجه به شرط اولیه، داریم $\tilde{y}_n(t-\tau) = y(t-\tau)$. در نتیجه، انتگرال دوم در سمت راست نامساوی بالا برابر با صفر است و با استفاده از لم ۱،۳، با فرض $\varphi(t) = |y(t) - \tilde{y}_n(t)|$، اثبات کامل می‌شود. برای $\tau < t \le \mathcal{L}$، از تغییر متغیر $s - \tau = x$ استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,|y(s-\tau) - \tilde{y}_n(s-\tau)|ds &= \int_0^\tau (t-s)^{\alpha-1}\,|y(s-\tau) - \tilde{y}_n(s-\tau)|ds \\ &\quad + \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}\,|y(s-\tau) - \tilde{y}_n(s-\tau)|ds \\ &= \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}\,|y(s-\tau) - \tilde{y}_n(s-\tau)|ds \\ &= \int_0^{t-\tau} (t-x-\tau)^{\alpha-1}\,|y(x) - \tilde{y}_n(x)|dx,\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}|y(t) - \tilde{y}_n(t)| &\le \frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,|y(s) - \tilde{y}_n(s)|d \\ &\quad + \frac{\beta_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-\tau} (t-s-\tau)^{\alpha-1}\,|y(s) - \tilde{y}_n(s)|ds + \delta h^2 \\ &\le \frac{\beta_1}{\Gamma(\alpha)}\|y - \tilde{y}_n\|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{\beta_2}{\Gamma(\alpha)}\|y - \tilde{y}_n\|_\infty \int_0^{t-\tau} (t-s-\tau)^{\alpha-1}\,ds \\ &\quad + \delta h^2 \\ &\le \frac{\beta_1 \mathcal{L}^\alpha + \beta_2(\mathcal{L}-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y - \tilde{y}_n\|_\infty + \delta h^2,\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|y - \tilde{y}_n\|_\infty \le \left(1 - \frac{\beta_1 \mathcal{L}^\alpha + \beta_2(\mathcal{L}-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{-1} \delta h^2,$$

که اثبات را کامل می‌کند.

۴. مثال‌های عددی

در این بخش، برای نشان دادن دقت و کارایی روش پیشنهادی، مثال‌هایی از معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری را در نظر می‌گیریم و این روش را برای حل آنها به کار می‌گیریم. نمادهای زیر، به ترتیب، برای نشان دادن خطا و مرتبه همگرایی روش معرفی می‌شوند:

$$e_n = \|y - \tilde{y}_n\|_\infty,$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\varepsilon_n = \log_2\left(\frac{e_n}{e_{2n}}\right),$$

که در آن، y جواب دقیق و $\tilde{y}_n$ جواب تقریبی به دست آمده با استفاده از روش ارائه شده است. همچنین، در جدول از نماد CPU time برای نشان دادن زمان حل دستگاه حاصل بر حسب ثانیه استفاده می‌شود. قابل ذکر است که برای حل مثال‌ها از نرم افزار متمتیکا نسخه ۱۰ و از کامپیوتر شخصی Core i۳ با پردازنده ۲/۱۳ گیگاهرتز و با حافظه ۴ گیگابایت استفاده شده است.

مثال ۱. معادله دیفرانسیل تأخیری کسری زیر را در نظر می‌گیریم [۷]:

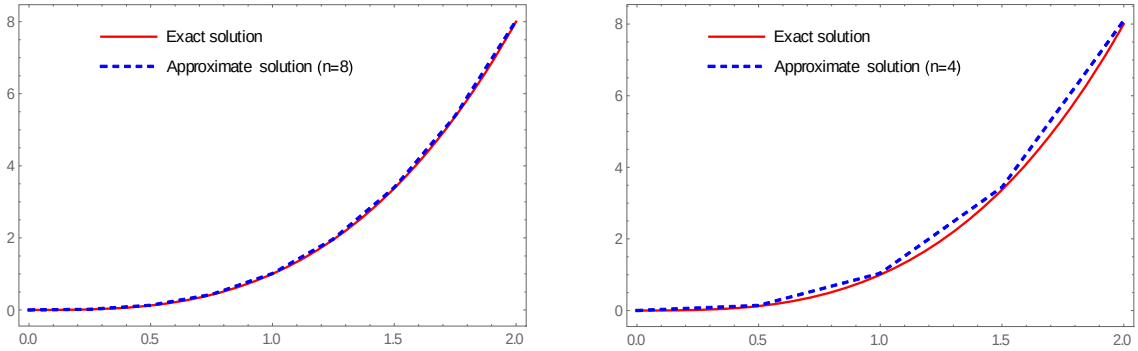
$$\begin{cases} D_C^{0.3}y(t) = y(t-1) - y(t) + 1 - 3\,t + 3t^2 + \dfrac{2000t^{2.7}}{1071\,\Gamma(0.7)}, & t \in [0,2], \\ y(t) = t^3, & -1 \le t \le 0. \end{cases}$$

جواب دقیق این مثال t^3 است. خطا، مرتبه همگرایی و زمان حل دستگاه برای این جواب دقیق به ازای مقادیر مختلف n با استفاده از روش ارائه شده بر اساس توابع کلاهی تعمیم یافته در جدول ۱ بیان شده است. همچنین، نمودار جواب دقیق به همراه جواب تقریبی به ازای $n = 4,8$ در شکل ۱ نمایش داده می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش مقدار n خطا کاهش می‌یابد و جواب‌های تقریبی به جواب دقیق همگرا می‌شوند. به‌علاوه، می‌توان مشاهده کرد که مرتبه همگرایی روش $O(h^2)$ است. همچنین، خطای این مثال در بازه $[0,1]$ به دست آمده و در جدول ۲ با خطای روش مرجع [۷] مقایسه شده است.

جدول ۱: نتایج عددی به ازای مقادیر مختلف n با استفاده از روش ارائه شده در بازه $[0,2]$ برای مثال ۱.

CPU time	ε_n	e_n	n
۰/۰۰۰	۱/۷۳	۱/۳۷۲۲	۲
۰/۰۰۰	۱/۸۶	۱۲۷۶/۴ ۱۰ × $^{-۱}$	۴
۰/۰۰۰	۱/۹۳	۱۳۳۵/۱ ۱۰ × $^{-۱}$	۸
۰/۰۰۰	۱/۹۶	۹۸۱۳/۲ ۱۰ × $^{-۲}$	۱۶
۰/۰۱۶	۱/۹۷	۶۷۶۹/۷۱۰ × $^{-۳}$	۳۲
۰/۰۶۲	۱/۹۸	۹۵۴۹/ ۱۱۰ × $^{-۳}$	۶۴
۰/۲۸۱	۱/۹۹	۹۴۷۶/۴ ۱۰ × $^{-۴}$	۱۲۸
۰/۲۹۷	—	۲۴۷۰/۱ ۱۰ × $^{-۴}$	۲۵۶

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]



شکل ۱: نمودار جواب دقیق به همراه جواب تقریبی به ازای $n = 4$ (سمت راست) و $n = 8$ (سمت چپ) در بازه $[0,2]$ برای مثال ۱.

جدول ۲: مقایسه خطای روش ارائه شده با روش تفاضل پسرو در بازه $[0,1]$ برای مثال ۱.

n	روش حاضر e_n	روش تفاضلی [۷] e_n
۱۰	$\times ۰۴۹۶/۹\ ۱۰^{-۳}$	$۱۰۵۱/۷\ ۱۰\times^{-۲}$
۲۰	$۳۵۱۴/۲\ ۱۰\times^{-۳}$	$\times ۱۱۵۴/۴\ ۱۰^{-۲}$
۴۰	$۰۱۳۵/۶۱۰\times^{-۴}$	$۱۹۶۱/۲۱۰\times^{-۲}$
۸۰	$۵۲۵۰/۱۱۰\times^{-۴}$	$\times ۱۳۱۲/۱\ ۱۰^{-۲}$
۱۶۰	$\times ۸۴۹۳/۳\ ۱۰^{-۵}$	$۷۳۶۱/۵\ ۱۰\times^{-۳}$
۳۲۰	$۶۸۴۷/۹\ ۱۰\times^{-۶}$	$\times ۸۸۷۹/۲\ ۱۰^{-۳}$
۶۴۰	$۴۳۳۴/۲\ ۱۰\times^{-۶}$	$\times ۴۴۸۸/۱\ ۱۰^{-۳}$

مثال ۲. معادله دیفرانسیل تأخیری کسری زیر را در نظر می‌گیریم [۷]:

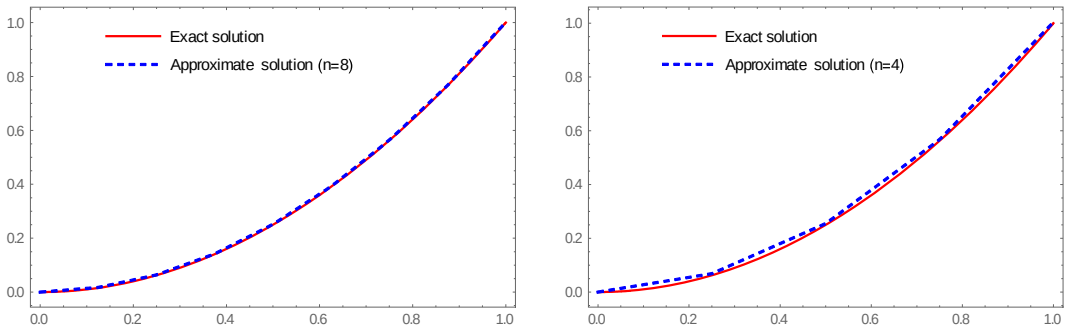
$$\begin{cases} D_C^{0.5} y(t) = y(t-1) - y(t) + 2\,\mathrm{t} - 1 + \dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}}, & t \in [0,1], \\ y(t) = t^2, \quad -1 \le t \le 0. \end{cases}$$

جواب دقیق این مثال t^2 است. خطا، مرتبه همگرایی و زمان حل دستگاه برای این جواب دقیق به ازای مقادیر مختلف n با استفاده از روش ارائه شده بر اساس توابع کلاهی تعمیم یافته در جدول ۳ نشان داه می‌شود. نمودار جواب دقیق به همراه جواب تقریبی به ازای $n = 4,8$ در شکل ۲ نمایش داده می‌شود. به‌علاوه، در جدول ۴ خطای این مثال با خطای مرجع [۷] مقایسه شده است. از جدول ۳ می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش مقدار n خطا کاهش می‌یابد و جواب‌های تقریبی به جواب دقیق همگرا می‌شوند. همچنین، می‌توان مشاهده کرد که مرتبه همگرایی روش $O(h^2)$ است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

جدول ۳: نتایج عددی به ازای مقادیر مختلف n با استفاده از روش ارائه شده در بازه $[0,1]$ برای مثال ۲.

CPU time	ε_n	e_n	n
۰/۰۰۰	۱/۹۵	۱۵۰۳/۸ ۱۰ × $^{-۲}$	۲
۰/۰۰۰	۱/۹۶	۱۰۹۴/۲ ۱۰× $^{-۲}$	۴
۰/۰۰۰	۱/۹۶	× ۴۳۴۵/۵ ۱۰ $^{-۳}$	۸
۰/۰۰۰	۱/۹۷	۳۹۲۹/۱۱۰× $^{-۳}$	۱۶
۰/۰۳۱	۱/۹۸	۵۵۲۰/۳۱۰× $^{-۴}$	۳۲
۰/۰۶۲	۱/۹۸	۰۱۶۸/۹ ۱۰× $^{-۵}$	۶۴
۰/۲۱۹	۱/۹۸	۲۸۰۵/۲ ۱۰× $^{-۵}$	۱۲۸
۰/۸۹۱	—	۷۸۱۶/۵ ۱۰× $^{-۶}$	۲۵۶



شکل ۲: نمودار جواب دقیق به همراه جواب تقریبی به ازای $n = 4$ (سمت راست) و $n = 8$ (سمت چپ) در بازه $[0,1]$ برای مثال۲.

جدول ۴: مقایسه خطای روش ارائه شده با روش تفاضل پسرو در بازه $[0,1]$ برای مثال ۲.

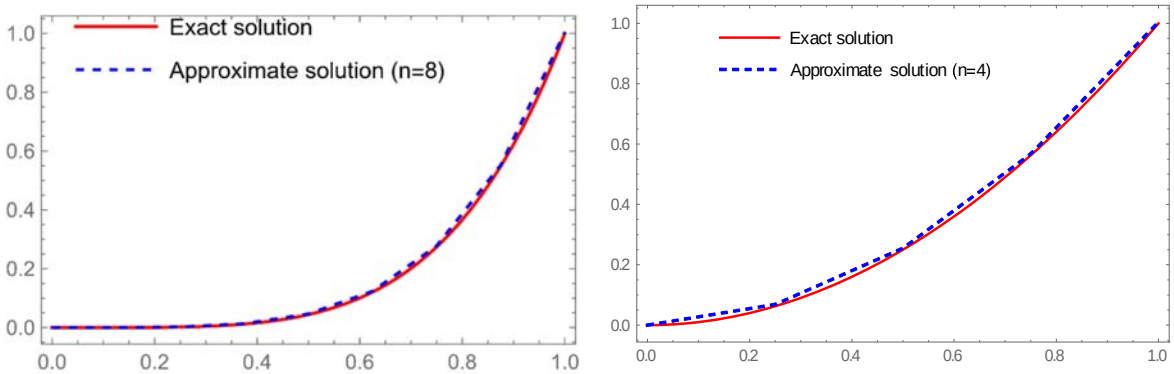
روش تفاضلی [۷] e_n	روش حاضر e_n	n
۹۱۸۴/۴۱۰× $^{-۲}$	× ۵۰۸۱ /۳۱۰ $^{-۳}$	۱۰
۷۶۱۷/۲ ۱۰× $^{-۲}$	۹۷۶۴/۸ ۱۰× $^{-۴}$	۲۰
۴۶۵۱/۱ ۱۰× $^{-۲}$	× ۲۸۵۵/۲ ۱۰ $^{-۴}$	۴۰
۵۶۴۹/۷ ۱۰× $^{-۳}$	۷۹۴۳/۵ ۱۰× $^{-۵}$	۸۰
۸۵۲۸/۳ ۱۰× $^{-۳}$	× ۴۶۶۰/۱۱۰ $^{-۵}$	۱۶۰
۹۴۸۰/۱ ۱۰× $^{-۳}$	× ۷۱۵۸/۳ ۱۰ $^{-۶}$	۳۲۰
۸۰۸۵/۹ ۱۰× $^{-۴}$	× ۴۰۹۱/۹۱۰ $^{-۷}$	۶۴۰

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

مثال ۳. به‌عنوان مثال آخر، معادله دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم [۱۶]:

$$\begin{cases} D_C^{\alpha} y(t) = \dfrac{\Gamma(5+\alpha)}{\Gamma(5)} t^4 + t^{8+2\alpha} - y(t)^2 + (\mathrm{t}-0.2)^{4+\alpha} - y(t-0.2), \quad t \in [0,1], \\ y(t) = t^{4+\alpha}, \quad -0.2 \le t \le 0. \end{cases}$$

جواب دقیق این مسأله $y(t) = t^{4+\alpha}$ است. با استفاده از روش حاضر و با در نظر گرفتن $\alpha = 0.5$ و مقادیر مختلف n، نتایج حاصل در شکل ۳ و جدول ۵ نمایش داده شده‌اند. در شکل ۳، نمودار جواب‌های تقریبی به ازای $n = 4, 8$ به‌همراه جواب دقیق رسم شده‌اند. ملاحظه می‌شود که با افزایش مقدار n، جواب تقریبی به جواب دقیق نزدیک‌تر می‌شود. همچنین، در جدول ۵، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از روش حاضر و روش آدامز تعمیم یافته کسری [۱۶] برای ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی مشاهده می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که دقت این دو روش برای حل این مسائل تقریبا مشابه است.



شکل ۳: نمودار جواب دقیق به همراه جواب تقریبی به ازای $n = 4$ (سمت راست) و $n = 8$ (سمت چپ) برای مثال ۳.

جدول ۵: مقایسه خطای روش ارائه شده با روش آدامز تعمیم یافته کسری برای مثال ۳.

n	روش حاضر		روش آدامز [۱۶]	
	e_n	ε_n	e_n	ε_n
۱۶۰	۷۸۸۵ /۱۱۰ × $^{-۵}$	۱/۹۹	۱۵۸۶/۲۱۰ × $^{-۵}$	۱/۹۹
۳۲۰	۵۰۵۰/۴ ۱۰ × $^{-۶}$	۲/۰۲	۴۴۲۹/۵ ۱۰ × $^{-۶}$	۱/۹۹
۶۴۰	۱۰۹۵/۱ ۱۰ × $^{-۶}$	۲/۰۰	۳۶۸۹/۱ ۱۰ × $^{-۶}$	۱/۹۹
۱۲۸۰	۷۶۶۸/۲ ۱۰ × $^{-۷}$	۲/۰۱	۴۳۶۶/۳ ۱۰ × $^{-۷}$	۲/۰۰
۲۵۶۰	۸۶۵۵/۶۱۰ × $^{-۸}$	—	۶۱۶۹/۸ ۱۰ × $^{-۸}$	—

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری ارائه شد. روش ارائه شده بر اساس توابع کلاهی تعمیم یافته است که به‌عنوان توابع پایه‌ای استفاده شدند. در این تکنیک جدید، مسأله مورد نظر به آسانی به یک دستگاه از معادلات جبری کاهش می‌یابد که با توجه به بررسی پیچیدگی محاسباتی، حل دستگاه حاصل به تلاش محاسباتی کمی نیاز دارد. تحلیل خطای روش مورد بررسی قرار گرفت و با اعمال روش پیشنهادی روی سه مثال، مرتبه همگرایی $O(h^2)$ برای این روش تأیید شد. مثال‌های عددی نشان می‌دهند که روش پیشنهادی در مقایسه با روش مطرح شده در مرجع [۷] برای حل این دسته از مسائل دقیق‌تر بوده و از مرتبه دقت یکسانی با روش مطرح شده در [۱۶] برخوردار است. در پایان، پیشنهاد می‌شود روش ارائه شده برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری از مرتبه توزیعی به کار برده شود.

References

1. A.H. Bhrawy and T.M. Taha, A review of operational matrices and spectral techniques for fractional calculus, Nonlinear Dyn., **81** (2015), 1023-1052.
2. A. Ghasempour, Y. Ordokhani and S. Sabermahani, Fractional-order Mittag–Leffler functions for solving multi-dimensional fractional pantograph delay differential equations, Iran. J. Sci., (2023), 1-14.
3. M. S. Heris and M. Javidi , On fractional backward differential formulas methods for fractional differential equations with delay, Int. J. Appl. Comput. Math., **4** (2018), 1-15.
4. M. A. Iqbal, U. Saeed and S. T. Mohyud-Din, Modified Laguerre wavelets method for delay differential equations of fractional-order, Egypt. J. Basic Appl. Sci., **2** (2015), 50-54.
5. R. Kruse, Strong and weak approximation of semilinear stochastic evolution equations, Vol. 2093, Springer, 2013.
6. B. P. Moghaddam and Z. S. Mostaghim, A novel matrix approach to fractional finite difference for solving models based on nonlinear fractional delay differential equations, Ain Shams Eng. J., **5** (2014), 585–594.
7. M. L. Morgado, N. J. Ford and P. M. Lima, Analysis and numerical methods for fractional differential equations with delay, J. Comput. Appl. Math., **252** (2013), 159-168.
8. P. Muthukumar and B. Ganesh Priya, Numerical solution of fractional delay differential equation by shifted Jacobi polynomials, Int. J. Comput. Math., **94** (2017), 471-492.
9. S. Nemati and Y. Ordokhani, Numerical solution of delay fractional optimal control problems using modification of hat functions, Mathematical Researches, **4**(2) (2018), 241-258.
10. S. Nemati and D. F. Torres , A new spectral method based on two classes of hat functions for solving systems of fractional differential equations and an application to respiratory syncytial virus infection, Soft Comput., **25** (2021), 6745-6757.
11. P. Rahimkhani and Y. Ordokhani, A numerical approach based on operational matrix for solving fractional delay differential equations, Mathematical Researches, **6**(4) 2020, 587-600.
12. P. Rahimkhani, Y. Ordokhani and E. Babolian, A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations, Numer. Algorithms, **74** (2017), 223-

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

245.

13. S. Sabermahani, Y. Ordokhani and M. Razzaghi, Ritz-generalized Pell wavelet method: Application for two classes of fractional pantograph problems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **119** (2023), 107138.

14. L. Shi , Z. Chen, X. Ding and Q. Ma, A new stable collocation method for solving a class of nonlinear fractional delay differential equations, Numer. Algorithms, **85** (2020), 1123-1153.

15. M. P. Tripathi , V. K. Baranwal, R. K. Pandey and O. P. Singh, A new numerical algorithm to solve fractional differential equations based on operational matrix of generalized hat functions, Nonlinear Sci. Numer. Simul., **18** (2013), 1327-1340.

16. J. Zhao, X. Jiang, Y. Xu, Generalized Adams method for solving fractional delay differential equations, Math. Comput. Simul., **180** (2021), 401-419.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]