



Kharazmi University

## Local meshless finite difference method based on radial basis functions for solution of electromagnetic waves scattering from an anisotropic infinite cylinder with arbitrary cross section

S. K. Etesami<sup>1</sup> 

1. Department of Mathematics, Faculty of Science, Malek-Ashtar University of Technology, Shahin-shahr, Iran. E-mail: [ete\\_home@yahoo.com](mailto:ete_home@yahoo.com)

Article Info	ABSTRACT
<p><b>Article type:</b> Independent Article</p>	<p><b>Introduction</b> Recently, the study of the electromagnetic waves scattering from an anisotropic medium has attracted a lot of attention due to the most of the materials that we deal with in reality are anisotropic and are used a lot in optical signal processing, radar cross section control, antennas and different types of radar absorbers. In recent years, the problems of scattering from an anisotropic medium have been investigated and studied a lot, but because of the structural parameters of an anisotropic material are in the form of tensors, it is basically difficult or impossible to find an analytical solution for them. Therefore, different numerical methods have been introduced to solve these problems.</p>
<p><b>Article history:</b> Received: 20 December 2021 Accepted: 16 March 2022 Published online: 6 February 2024</p>	<p>The local meshless finite difference method based on radial basis functions (FD-RBF), is an efficient local method, a combination of meshless and finite difference methods, which has attracted the attention of many researchers due to its advantages in reducing the amount of calculations. This method is investigated and evaluated by some numerical examples.</p>
<p><b>Keywords:</b> Electromagnetic scattering, Anisotropic media, Finite difference radial basis function , Meshless method.</p>	<p><b>Electromagnetic scattering problem</b> Let <math>D \subseteq \mathbb{R}^2</math> denotes the cross-section of an infinitely long anisotropic dielectric cylindrical scatterer located in the free space with outward normal vector <math>n</math>. Moreover, we assume that the scatterer is excited by the <math>e^{-j\omega t}</math> time-harmonic incident plane wave with TMz polarization where <math>\omega</math> is the angular frequency. Let <math>A</math> is a symmetric and positive definite <math>2 \times 2</math> matrix whose entries are the relative magnetic permeability inside the scatterer. The direct scattering problem for an anisotropic medium is formulated as follows</p>
	$\begin{aligned} \nabla \cdot (A \nabla v) + k_0^2 \epsilon_r v &= 0 \quad \text{in } D \\ \nabla^2 u^s + k_0^2 u^s &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \\ v - u^s &= u^i \quad \text{on } \partial D \\ v \cdot (A \nabla v) - v \cdot \nabla u^s &= v \cdot \nabla u^i \quad \text{on } \partial D \\ \frac{\partial u^s}{\partial n} + \left( jk_0 + \frac{1}{2r_b} \right) u^s &= 0 \end{aligned}$

---

where  $v$  is the scalar total electric field inside the scatterer,  $u_s$  and  $u_i$  are the scalar scattered and incident electric fields respectively.  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  is the wave number of the free space ( $\lambda$  is the wavelength), where  $\epsilon_0$  and  $\mu_0$  are the constant electric permittivity and the magnetic permeability of free space.  $\epsilon_r$  is the relative electric permittivity inside the scatterer.  $A$  is of the form

$$A = \frac{1}{\mu_{xx}\mu_{yy} - \mu_{xy}\mu_{yx}} \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{yx} \\ \mu_{xy} & \mu_{yy} \end{pmatrix}.$$

### Numerical method

The foundation of the RBF-FD method are radial basis functions. They are defined over a set of nodes  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  generated by a radial function  $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  as  $\{\phi_i := \phi(\|\cdot - x_i\|)\}$ , for  $x_i \in X$ . In this paper, the standard generalized multiquadric (GMQ) functions will be used which are defined as  $\phi(r) = (r^2 + \epsilon^2)^q$  where  $r = \|x - x_i\|$  and  $\epsilon$  is the shape parameter. Consider an elliptic boundary value problem with Dirichlet boundary conditions

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= u_0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

where  $f$  and  $u_0$  are known functions. In order to obtain a discrete representation of the PDE, the domain is populated with  $N$  nodes.  $N_i$  nodes are placed in the interior of the domain and  $N_b$  on its boundary. Each node  $x^*$  is assigned  $n$  neighbors, denoted  $N(x^*)$ , that constitute its support domain or neighborhood.

RBF-FD is a natural generalization of the FD method. When using the FD method, stencil weights for operator  $L$  are known in advance. Assembling the weights gives a global sparse system, whose solution is an approximation of  $u$  in points  $x^*$ . RBF-FD works the same way, except the stencil weights cannot be known in advance, as different neighborhoods have different arrangements, hence computing the weights becomes a part of the solution procedure. Moreover the operator  $L$  is approximated as a linear combination of function values at support points

$$(\mathcal{L}u)(x^*) \simeq \sum_{x_j \in N(x^*)} w_j^* u(x_j),$$

weights  $w_j^*$  are computed by imposing exactness of above equation for a set of radial basis functions. This gives a set of equations

$$(\mathcal{L}\phi_k)(x^*) = \sum_{x_j \in N(x^*)} w_j^* \phi_k(x_j) \quad x_k \in N(x^*)$$

Rewriting in matrix form, one obtains

$$\begin{bmatrix} \phi_{j_1}(x_{j_1}) & \phi_{j_1}(x_{j_2}) & \cdots & \phi_{j_1}(x_{j_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{j_n}(x_{j_1}) & \phi_{j_n}(x_{j_2}) & \cdots & \phi_{j_n}(x_{j_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{j_1}^* \\ \vdots \\ w_{j_n}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathcal{L}\phi_{j_1})(x^*) \\ \vdots \\ (\mathcal{L}\phi_{j_n})(x^*) \end{bmatrix}$$

$\phi_{j_m}(x_{j_n}) = \phi(\|x_{j_m} - x_{j_n}\|)$  and  $j_k$  are indices of nodes in the neighborhood  $N(x^*)$  of node  $x^*$ . This is a system of  $n$  linear equations and can be compactly written as  $A^* w^* = b^*$ . Matrix  $A^*$  is symmetric. After the

---

---

---

weight vectors  $w^*$  for all nodes  $n$  are computed, they are assembled in a sparse matrix, and  $f$  and  $u_0$  are used to obtain the right hand side of the system. The system is then solved to give an approximation of  $u$ . Boundary conditions that include differential operators, such as Neumann or Sommerfeld boundary conditions are discretized using RBF-FD analogously to operator  $\mathcal{L}$ .

---

---

**How to cite:** Etesami, Seyed Kamal., (2023). Local meshless finite difference method based on radial basis functions for solution of electromagnetic waves scattering from an anisotropic infinite cylinder with arbitrary cross section, *Mathematical Researches*, 9 (3), 94 - 110.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## روش موضعی بدون شبکه تفاضل متناهی بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی برای حل مسأله پراکندگی امواج الکترومغناطیس از استوانه نامتناهی ناهمسانگرد با سطح مقطع دلخواه

سید کمال اعتصامی<sup>۱</sup> ✉

۱. گروه ریاضی کاربردی و رمز، مجتمع علوم کاربردی نوین، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شاهین شهر، ایران. رایانامه: [ete\\_home@yahoo.com](mailto:ete_home@yahoo.com)

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله یک روش پیشرفته بدون شبکه برای بررسی مسأله پراکندگی امواج الکترومغناطیس از یک استوانه نامتناهی ناهمسانگرد با سطح مقطع دلخواه فرموله و اجرا شده است. مدل پراکندگی امواج ناهمسانگرد داخلی (درون پراکنده‌گر) و همسانگرد خارجی (بیرون پراکنده‌گر) به کمک روش بدون شبکه موضعی تفاضل متناهی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی (FD-RBF) گسسته سازی شده است. جواب معادلات هلمهولتز ناهمسانگرد و معمولی درون و بیرون پراکنده‌گر به صورت ترکیب خطی از توابع چندربعی شعاعی تعمیم یافته تقریب زده شده‌اند. روش عددی ارائه شده، یک روش کارآمد برای مواجهه با چالش‌های پراکندگی امواج با هندسه‌های پیچیده و همچنین ناهمگونی محیط در مرز بین پراکنده‌گر و محیط خلأ است. برای تأیید دقت و کارایی این روش، در مثال‌های عددی سطح مقطع راداری چند پراکنده‌گر ناهمسانگرد با سطح مقطع متفاوت محاسبه و با جواب‌های حاصل از روش‌های تحلیلی مقایسه شده‌اند
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۹/۲۹	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۲۵	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷	
واژه‌های کلیدی: پراکندگی امواج الکترومغناطیس، محیط ناهمسانگرد، روش تفاضل متناهی مبتنی بر توابع پایه شعاعی، روش‌های بدون شبکه.	

استناد: اعتصامی، سید کمال؛ (۱۴۰۲). روش موضعی بدون شبکه تفاضل متناهی بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی برای حل مسأله پراکندگی امواج الکترومغناطیس از استوانه نامتناهی ناهمسانگرد با سطح مقطع دلخواه. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۳)، ۹۴ - ۱۱۰.



## مقدمه

اخیرا مطالعه پدیده پراکندگی امواج الکترومغناطیس از یک محیط ناهمسانگرد توجه زیادی را به خود جلب کرده است. این توجه ناشی از این است که اغلب موادی که در واقعیت با آنها سروکار داریم، ناهمسانگرد بوده و کاربرد بسیار زیادی در پردازش سیگنال‌های نوری، کنترل سطح مقطع راداری، آنتن‌ها و انواع مختلفی از جاذب‌های راداری دارند. در سال‌های اخیر مسائل پراکندگی از محیط ناهمسانگرد بسیار مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است ولی به دلیل آن که پارامترهای ساختاری یک ماده ناهمسانگرد، به صورت تانسور است، یافتن جواب تحلیلی برای آن‌ها اصولا کاری دشوار یا غیرممکن است. بنابراین روش‌های عددی متفاوتی برای حل این مسائل معرفی شده است.

روش تفاضل متناهی حوزه زمانی [۳۰، ۳۴]، روش معادلات انتگرالی حجمی حوزه فرکانس [۱۲، ۱۳]، روش معادله انتگرالی سطحی میدان ترکیبی [۴، ۳۶] و روش تفاضل متناهی با معادله اندازه گیری تغییرناپذیر [۵، ۸] از جمله روش‌های حل این مسائل هستند که در اجرای بعضی از آنها باید شرایط خاصی روی تانسور ساختاری ماده حاکم باشد. روش به کار رفته در [۲۰، ۲۱] براساس نمایش موج تخت برحسب میدان‌های موجود در محیط است و فقط برای استوانه‌های ناهمسانگرد دایره ای که تحت تابش عمود یا مایل قرار گرفته باشند، کاربرد دارد. علاوه بر آن یک روش ترکیبی معادله انتگرال سطحی-عناصر متناهی برای حل مسئله پراکندگی از یک شی ناهمسانگرد ناهمگن در [۲۹] پیشنهاد شده است.

یکی از مشکلات حل این مسائل با روش‌های مبتنی بر شبکه، مانند عناصر متناهی و تفاضل متناهی، حجم و زمان محاسبات زیاد است. از حدود دو دهه قبل، روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی در مقابل روش‌های مبتنی بر شبکه برای حل دسته وسیعی از معادلات دیفرانسیلی حاصل از مدل بندی پدیده‌های فیزیکی و مهندسی، معرفی و گسترش یافته‌اند. ویژگی اصلی این روش‌ها، عدم نیاز شبکه بندی ناحیه جواب بوده و تنها ابری از نقاط روی دامنه محاسباتی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین روش‌های بدون شبکه، روش‌هایی بسیار کارا و مفید برای حل مسائلی با ابعاد بالا و هندسه‌های پیچیده می‌باشد. عملکرد بالای این روش‌ها، سبب کاربرد آن‌ها در حل بسیاری از مسائل الکترومغناطیس نیز شده است [۳۷، ۳۵، ۱۴، ۳۳، ۲۵، ۲۶، ۱، ۳۸].

روش بدون شبکه پترو-گالرکین موضعی یکی از روش‌های بدون شبکه است که بر اساس فرم ضعیف مسأله فرموله و اجرا می‌شود [۲۳، ۲، ۲۴]. در [۱۵] از این روش برای حل مسأله پراکندگی امواج الکترومغناطیس از محیط ناهمسانگرد استفاده شده است. نویسندگان در [۱۶] روش بدون شبکه جواب‌های خاص تقریبی براساس توابع پایه‌ای شعاعی را برای حل این مسأله به کار برده‌اند. در این روش نرم خاصی مرتبط با عملگر ناهمسانگرد به جای نرم اقلیدسی در توابع پایه‌ای شعاعی تعریف می‌شود.

روش موضعی بدون شبکه تفاضل متناهی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی (FD-RBF) ترکیبی از روش‌های بدون شبکه و تفاضل متناهی است که به دلیل مزیت‌هایی که در کاهش حجم محاسبات دارد، مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. FD-RBF، که می‌تواند در گروه تکنیک‌های موضعی بدون شبکه قرار گیرد، در [۱۰، ۲۷، ۲۸، ۳۱، ۳۲] گسترش یافته است. معادلات همرفت-نفوذ مانا با استفاده از روش FD-RBF در [۷] حل شد. نویسندگان مقاله [۱۱] نحوه استفاده از این روش در معادلات آب کم عمق را توضیح دادند و همچنین دقت و کارایی محاسباتی این روش را تعیین کردند. بولینگ و

همکارانش [۶] اولین محققانی بودند که بر عملکرد موازی روش FD-RBF تمرکز کردند و استراتژی‌های موازی سازی را معرفی کردند. در [۳] یک روش کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش موضعی FD-RBF ارائه شده است. علاوه بر این، آنها نشان دادند که با انتخاب پارامتر بهینه شکل می‌توان خطای تقریب را به حداقل رساند. اهداف اصلی [۱۷] اجرای روش FD-RBF برای معادلات ناویر-استوکس دو بعدی و ارائه یک پارامتر شکل سازگار برای RBF مطلوب است. در [۹] روش FD-RBF موضعی برای مدلسازی پدیده‌های موج غیرخطی به کار رفته است.

ساختار این مقاله به این صورت است: در بخش دوم مدلسازی مسأله پراکندگی امواج الکترومغناطیس از یک استوانه ناهمسانگرد با طول نامتناهی و سطح مقطع دلخواه بیان می‌شود. روش عددی موضعی بدون شبکه FD-RBF در بخش سوم توضیح داده می‌شود. در بخش چهارم مثال‌های عددی از حل مسائل الکترومغناطیس با روش FD-RBF بیان می‌شود و در پایان نتیجه گیری ارائه می‌گردد.

#### ۱. مدلسازی مسأله پراکندگی امواج الکترومغناطیس از یک استوانه ناهمسانگرد نامتناهی

ابتدا انتشار موج الکترومغناطیس را در یک محیط ناهمسانگرد ناهمگن در  $\mathbb{R}^3$  با گذردهی الکتریکی  $\epsilon(x)$ ، تراوایی مغناطیسی  $\mu(x)$  و رسانایی الکتریکی  $\sigma(x)$  در نظر می‌گیریم. موج الکترومغناطیس با میدان الکتریکی  $\mathcal{E}$  و میدان مغناطیسی  $\mathcal{H}$  توصیف می‌شود که در معادلات ماکسول زیر صدق می‌کنند:

$$\text{curl}\mathcal{E} + \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \quad \text{curl}\mathcal{H} - \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \sigma \mathcal{E}.$$

برای موج الکترومغناطیس باهارمونیک زمانی

$$\mathcal{E}(x, t) = \tilde{E} e^{-j\omega t}, \quad \mathcal{H}(x, t) = \tilde{H} e^{-j\omega t}$$

با فرکانس زاویه ای  $\omega$ ، بخش‌های وابسته به مکان مختلط مقدار  $\tilde{E}$  و  $\tilde{H}$  در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \text{curl}\tilde{E} - j\omega\mu(x)\tilde{H} &= 0, \\ \text{curl}\tilde{H} + (j\omega\epsilon(x) - \sigma(x))\tilde{E} &= 0. \end{aligned}$$

حال فرض کنید پراکندگی ناشی از تابش موج الکترومغناطیس به یک استوانه دی الکتریک ( $\sigma = 0$ ) ناهمسانگرد با طول نامتناهی باشد.  $D$  سطح مقطع استوانه با مرز  $\partial D$  در  $C^2$  و محور استوانه با محور  $Z$  ها منطبق است. علاوه بر آن فرض کنید که استوانه در یک محیط نارسانای همگن قرار گرفته است که دارای گذردهی الکتریکی  $\epsilon_0 > 0$ ، تراوایی مغناطیسی  $\mu_0 > 0$  و رسانایی  $\sigma = 0$  است. سپس تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{E}^{int,ext} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} E^{int,ext}, \quad \tilde{H}^{int,ext} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} H^{int,ext},$$

$$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2, \quad \mathcal{N} = \frac{\epsilon(x)}{\epsilon_0}, \quad \mathcal{A} = \frac{\mu(x)}{\mu_0}$$

که  $\vec{E}^{ext}$ ،  $\vec{H}^{ext}$  و  $\vec{E}^{int}$ ،  $\vec{H}^{int}$  به ترتیب معرف میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در محیط خارج و داخل پراکنده‌گر هستند. برای یک محیط ناهمسانگرد ماتریس‌های  $\mathcal{N}$  و  $\mathcal{A}$  مستقل از  $Z$  و به شکل زیر هستند:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

میدان‌های  $E^{int}$  و  $H^{int}$  داخل پراکنده‌گر در رابطه

$$\text{curl} E^{int} - jk \mathcal{A} H^{int} = 0, \quad \text{curl} H^{int} + jk \mathcal{N} E^{int} = 0,$$

و میدان  $E^{ext}$  و  $H^{ext}$  خارج از آن در رابطه

$$\text{curl} E^{ext} - jk H^{ext} = 0, \quad \text{curl} H^{ext} + jk E^{ext} = 0. \quad (1)$$

صدق می‌کنند.

روی مرز پراکنده‌گر، مولفه‌های مماسی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی پیوسته هستند. فرض کنید  $\mathcal{A}$  وارون پذیر باشد، با توجه به روابط

$$jk H^{int} = \mathcal{A}^{-1} \text{curl} E^{int}, \quad jk H^{ext} = \text{curl} E^{ext}, \quad (2)$$

معادلات ماکسول برای میدان الکتریکی داخل پراکنده‌گر به صورت

$$\text{curl} \mathcal{A}^{-1} \text{curl} E^{int} - k^2 \mathcal{N} E^{int} = 0, \quad (3)$$

و برای میدان الکتریکی خارج از آن به صورت

$$\text{curl} \text{curl} E^{ext} - k^2 E^{ext} = 0,$$

تبدیل می‌شود. اگر پراکنده‌گر بدلیل میدان فرودی هارمونیک زمانی  $E^i$  و  $H^i$  باشد، آن‌گاه

$$E^{ext} = E^i + E^s, \quad H^{ext} = H^i + H^s,$$

که  $E^s$  و  $H^s$  معرف میدان‌های پراکنده‌گر هستند. در حالت کلی، میدان فرودی  $E^i$ ،  $H^i$  یک جواب تام معادله (۱) است. میدان پراکنده‌گر  $E^s$ ،  $H^s$  در شرط تشعشی سیلور-مولر

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (H^s \times \hat{x} - r E^s) = 0$$

صدق می‌کند که  $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ .

حال فرض کنید که قطبش موج فرودی،  $TM^Z$  است یعنی:

$$E^i(x) = (0, 0, u^i), E^s(x) = (0, 0, u^s), E^{int}(x) = (0, 0, v).$$

با کمک آنالیز برداری ساده، (۲) با معادله

$$\nabla \cdot A \nabla v + k^2 n v = 0, \quad \text{in } D,$$

معادل است که در آن

$$A = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

است. به طور مشابه، (۳) معادل با معادله هلمهولتز

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},$$

است. شرایط انتقال  $v \times \text{curl}(E^i + E^s) = v \times \mathcal{A}^{-1} \text{curl} E^{int}$  و  $v \times (E^i + E^s) = v \times E^{int}$  روی مرز پراکنده‌گر به شرایط

$$v - u^s = u^i, \quad \text{on } \partial D, \quad v \cdot A \nabla v - v \cdot \nabla u^s = v \cdot \nabla u^i \quad \text{on } \partial D,$$

تبدیل می‌شوند که  $v$  بردار یکه عمود به سمت خارج از ناحیه  $D$  است. نهایتاً شرط سیلور-مولر به شرط تشعشعی زامرفلد

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - j k u^s \right) = 0,$$

در  $\mathbb{R}^2$  تبدیل می‌شود.

مسئله پراکندگی حاصل از تابش یک موج تخت با هارمونیک زمانی  $e^{-j\omega t}$  و قطبش  $TM^Z$  به یک استوانه دی الکتریک

ناهمسانگرد با طول نامتناهی و سطح مقطع دلخواه  $D$  در  $\mathbb{R}^2$  به صورت معادلات دیفرانسیلی

$$\nabla \cdot (A \nabla v) + k_0^2 \epsilon_r v = 0 \quad \text{in } D \tag{۴}$$

$$\nabla^2 u^s + k_0^2 u^s = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{۵}$$

با شرایط انتقال

$$v - u^s = u^i \quad \text{on } \partial D \tag{۶}$$

$$v \cdot (A \nabla v) - v \cdot \nabla u^s = v \cdot \nabla u^i \quad \text{on } \partial D \tag{۷}$$



و شرایط زامرفلد

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - jku^s \right) = 0 \quad (۸)$$

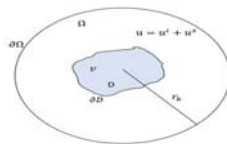
مدلسازی می‌شود که در آن  $A = \frac{1}{\mu_{xx}\mu_{yy} - \mu_{xy}\mu_{yx}} \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{yx} \\ \mu_{xy} & \mu_{yy} \end{pmatrix}$  تنسور تراوایی مغناطیسی ناهمسانگرد،  $\epsilon_r$  گذردهی

الکتریکی نسبی درون پراکنده‌گر،  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  عدد موج در محیط آزاد،  $\epsilon_0$  و  $\mu_0$  به ترتیب گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی در محیط آزاد و  $\lambda$  طول موج در محیط آزاد است.  $v$  میدان الکتریکی کل درون ناحیه  $D$ ،  $u^i$  میدان الکتریکی فرودی و  $u^s$  میدان الکتریکی پراکنده شده است.

برای حل این مسأله به روش عددی فرض می‌کنیم پراکنده‌گر  $D$  درون یک ناحیه ساختگی  $\Omega$  با مرز  $\partial\Omega$  مطابق شکل (۱) قرار دارد. بنابراین معادله (۵) درون ناحیه  $\Omega \setminus \bar{D}$  حل می‌شود و برای داشتن جوابی یکتا، یک شرط مرزی باید روی  $\partial\Omega$  تحمیل شود به طوری که شرایط مرزی زامرفلد را شبیه سازی کند. به این منظور روی مرز دایره‌ای شکل  $\partial\Omega$ ، شرط مرزی تشعشی مرتبه اول به صورت [۱۸]

$$\frac{\partial u^s}{\partial n} + \left( jk_0 + \frac{1}{2r_b} \right) u^s = 0, \quad (۹)$$

اعمال می‌شود که  $r_b$  شعاع  $\partial\Omega$  است.



شکل ۱: پراکنده‌گر  $D$  با مرز  $\partial D$ ، که درون یک ناحیه ساختگی با مرز دایره‌ای  $\partial\Omega$  قرار گرفته است.

### ۱.۱. محاسبه سطح مقطع راداری

سطح مقطع راداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{|E^s|^2}{|E^i|^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{|H^s|^2}{|H^i|^2},$$

که برای موج‌های  $TM$  یا  $TE$  با فرض  $|u^i| = 1$ ، به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\chi(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r |u^s|^2.$$

اگر  $u^s$  روی مرز  $\partial S$  داده شده باشد،  $u^s$  در هر نقطه خارجی از رابطه زیر محاسبه می‌شود [22]:

$$u^s(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u^s(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} u^s(\mathbf{r}') \right] dl'$$

که  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4j} H_0^2(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  تابع گرین معادله هلمهولتز در فضای آزاد است. برای مقادیر بزرگ  $r$ ، تابع هنکل دارای رفتار مجانبی زیر است:

$$H_0^2(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sim \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 r}} e^{-jk_0(r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')}$$

که  $r = |\mathbf{r}|$ ،  $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ . بنابراین برای مقادیر بزرگ  $r$ ،

$$\chi(\theta) = \frac{1}{4k_0} \left| \int_{\partial S} [e^{jk_0 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{\partial u^s(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial e^{jk_0 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{\partial n'} u^s(\mathbf{r}')] dl' \right|^2, \quad (10)$$

که  $\hat{\mathbf{r}} = [\cos\theta, \sin\theta]$ .

## ۲. حل عددی مسأله به روش تفاضل متناهی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی

در سال‌های اخیر استفاده از روش‌های بدون شبکه برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بسیار گسترش یافته است. روش هم محلی براساس توابع پایه‌ای شعاعی یکی از مهمترین روش‌های بدون شبکه است که برای حل مسائل با ابعاد بالا و هندسه‌های پیچیده کاربرد دارد. در این بخش روش بدون شبکه موضعی FD-RBF برای حل عددی مسأله (۴) - (۹) تشریح می‌شود.

### 1.2 درونیابی به کمک توابع پایه‌ای شعاعی

فرض کنید مجموعه‌ای از داده‌های پراکنده  $(x_j, y_j)$ ،  $j = 1, \dots, N$  داده شده است، که  $x_j \in \mathbb{R}^n$  و  $y_j = f(x_j) \in \mathbb{R}$  می‌خواهیم تابع درونیاب  $P_f(x)$  را طوری بیابیم که  $P_f(x_j) = y_j$ . به این منظور تابع  $P_f(x)$  را برحسب توابع پایه‌ای شعاعی بسط می‌دهیم:

$$P_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi(\|x - x_j\|), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

که ضرایب مجهول  $\alpha_j$  با اعمال شرط درونیابی و حل دستگاه معادلات خطی زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{pmatrix} \phi(\|x_1 - x_1\|) & \phi(\|x_1 - x_2\|) & \cdots & \phi(\|x_1 - x_N\|) \\ \phi(\|x_2 - x_1\|) & \phi(\|x_2 - x_2\|) & \cdots & \phi(\|x_2 - x_N\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|x_N - x_1\|) & \phi(\|x_N - x_2\|) & \cdots & \phi(\|x_N - x_N\|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

## ۲,۲ روش بدون شبکه موضعی تفاضل متناهی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی (FD-RBF)

مسئله مقدار مرزی بیضوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= u_0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

که در آن  $f$  و  $u_0$  مقادیر معلوم هستند. برای گسسته سازی این مسئله، در دامنه‌ی جواب  $N$  نقطه پراکنده می‌شوند که  $N_i$  نقطه درون و  $N_b$  نقطه روی مرز دامنه قرار می‌گیرند. هر نقطه  $x^*$ ،  $n$  نقطه در همسایگی خود دارد که با  $N(x^*)$  مشخص می‌شوند. روش تفاضل متناهی بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی، تعمیمی از روش تفاضل متناهی معمولی است. در روش تفاضل متناهی معمولی، وقتی عملگر  $\mathcal{L}$  در نقطه  $x_i$  به صورت ترکیب خطی از مقادیر تابع  $u$  در نقاط مجاور تقریب زده می‌شود، وزن‌ها از ابتدا معلوم هستند. مثلاً اگر عملگر  $\mathcal{L}$  مشتق مرتبه دوم روی یک شبکه یک بعدی از نقاط متساوی‌فاصله با فاصله  $h$  باشد، وزن‌ها به صورت  $\frac{1}{h^2} [1, -2, 1]$  هستند که با جمع آوری وزن مربوط به هر نقطه در یک ماتریس، یک دستگاه معادلات اسپارس حاصل می‌شود که جواب دستگاه، تقریبی از  $u$  در نقاط  $x_i$  است. روش FD-RBF مانند روش تفاضل متناهی معمولی عمل می‌کند با این تفاوت که وزن‌ها در ابتدا معلوم نیستند و بنابراین محاسبه وزن‌ها بخشی از فرآیند حل مسئله است. در این روش عملگر  $\mathcal{L}$  در هر نقطه  $x^* \in \Omega$  به صورت ترکیب خطی از مقادیر توابع پایه‌ای شعاعی در همسایگی  $N(x^*)$  تقریب زده می‌شود:

$$(\mathcal{L}u)(x^*) \simeq \sum_{x_j \in N(x^*)} w_j^* u(x_j) \quad (11)$$

وزن‌های  $w_j^*$  با اعمال دقیق مجموعه‌ای از توابع پایه‌ای شعاعی در معادله (۱۱) بدست می‌آیند:

$$(\mathcal{L}\phi_k)(x^*) = \sum_{x_j \in N(x^*)} w_j^* \phi_k(x_j) \quad x_k \in N(x^*). \quad (12)$$

دستگاه معادلات (۱۲) به شکل ماتریسی زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \phi_{j1}(x_{j1}) & \phi_{j1}(x_{j2}) & \cdots & \phi_{j1}(x_{jn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{jn}(x_{j1}) & \phi_{jn}(x_{j2}) & \cdots & \phi_{jn}(x_{jn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{j1}^* \\ \vdots \\ w_{jn}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathcal{L}\phi_{j1})(x^*) \\ \vdots \\ (\mathcal{L}\phi_{jn})(x^*) \end{bmatrix} \quad (13)$$

که در آن  $\phi_{jm}(x_{jn}) = \phi(\|x_{jm} - x_{jn}\|)$  است که  $jm$  اندیس نقاط درون همسایگی  $N(x^*)$  از نقطه  $x^*$  است. دستگاه معادلات (۱۳) یک دستگاه معادلات مرتبه  $n$  به شکل ماتریسی  $A^* w^* = b^*$  با ماتریس متقارن  $A^*$  است. پس از آن که بردارهای وزن  $w^*$  از حل دستگاه (۱۳) برای همه‌ی  $x^* \in \Omega$  به دست آمد، در یک ماتریس به صورت اسپارس جمع آوری می‌شوند و  $f$  به عنوان مقادیر سمت راست در نظر گرفته می‌شوند. توجه شود که برای شرایط مرزی که شامل عملگر

دیفرانسیلی هستند، مانند شرط نیومن (۷) و شرط تشعشی (۹)، عملگر دیفرانسیلی نیز مانند عملگر  $L$  به روش FD-RBF گسسته سازی می‌شوند. به این ترتیب با حل دستگاه جدید تقریبی از  $u$  در نقاط دورن و مرز دامنه به دست می‌آید.

### ۳. نتایج عددی

در این بخش حل مسأله پراکندگی امواج الکترومغناطیس از یک استوانه نامتناهی ناهمسانگرد با سطح مقطع دلخواه که مورد تابش یک موج تخت با قطبش  $TM^z$  قرار گرفته است، با استفاده از روش عددی ذکر شده مورد بررسی قرار گرفته است. معادله موج تخت فرودی

$$u^i = \exp(jk_0(x\cos\theta^i + y\sin\theta^i))$$

است که در آن  $\theta^i$  زاویه فرود می‌باشد. در محاسبات مسائل پراکندگی داخل و خارج پراکنده‌گر به طور همزمان حل می‌شوند و در همه محاسبات فرکانس برابر  $30 \text{ MHz}$  در نظر گرفته شده است. توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی تعمیم یافته،  $\phi(r) = (r^2 + \varepsilon^2)^q$  [۱۹] عنوان توابع پایه‌ای شعاعی در (۱۲) استفاده شده است. تابع چندربعی تعمیم یافته به پارامترهای شکل  $\varepsilon = \alpha_c d_c$  و  $q$  وابسته است که نقش مهمی در دقت و پایداری جواب دارند. اگرچه مقدار بهینه برای این پارامترهای شکل هنوز یک مسأله باز است، اما کانسوا و همکارانش در [۱۹] پیشنهاد داده‌اند که  $q = 2/5$  مقداری قابل قبول است که دقت تقریب را افزایش می‌دهد. لذا ما در محاسبات خود  $q = 2/5$  در نظر می‌گیریم. برای مسائل دوبعدی میانگین فاصله نقاط،  $d_c$  طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$d_c = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{An_A - 1}}$$

که  $A$  مساحت دامنه محمل و  $n_A$  تعداد نقاط در این دامنه می‌باشد. از آنجایی که برای مقابله با عدم پیوستگی مواد در دو ناحیه متفاوت، دو مجموعه مجزا از توابع پایه شعاعی چندربعی تعمیم یافته برای دامنه داخلی و خارجی در نظر گرفته می‌شود،  $d_c$  در هر ناحیه به طور جداگانه تعیین می‌شود و مقدار بهینه  $\alpha_c$  در هر مثال برآورد می‌شود.

#### ۳.۱. پراکندگی از استوانه ناهمسانگرد با سطح مقطع دایره

در این مثال، مسأله پراکندگی از یک استوانه ناهمسانگرد با سطح مقطع دایره و مشخصات  $\epsilon_r = 0.75$ ،  $k \cdot a = 1$  و

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

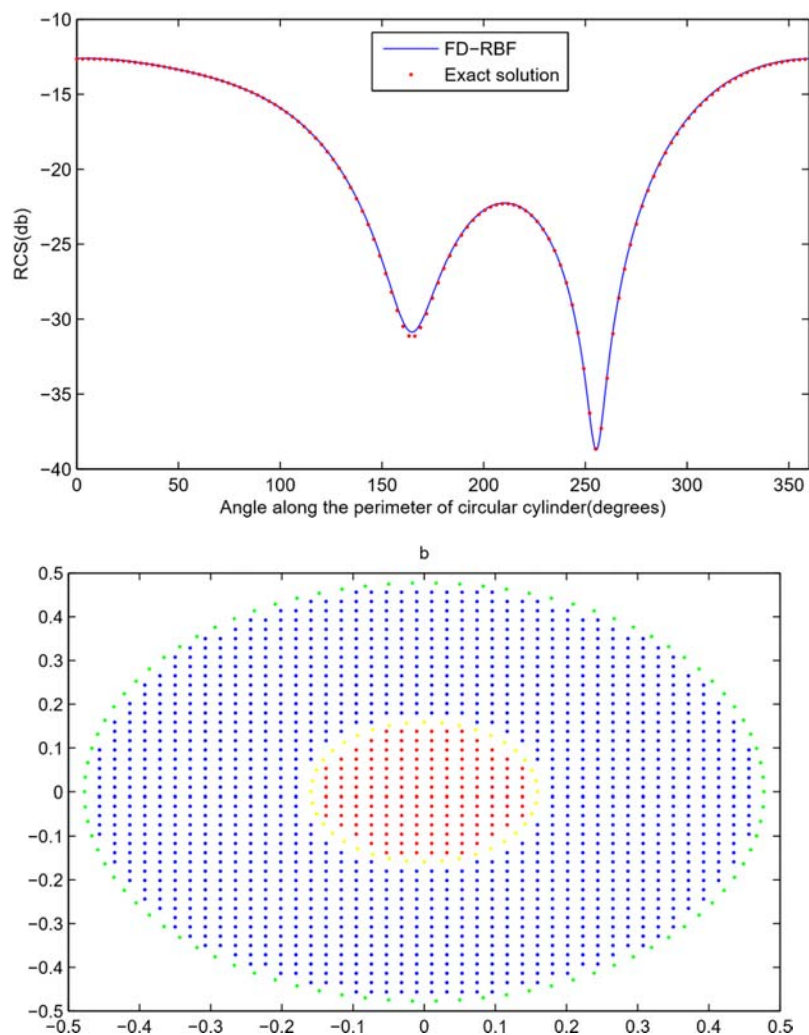
با روش FD-RBF حل شده است. سطح مقطع راداری از رابطه (۱۰) محاسبه شده و در شکل ۲a

رسم شده است. زاویه تابش موج فرودی  $\theta^i = \frac{\pi}{4}$  و  $N = 1646$  نقطه به طور یکنواخت در دامنه محاسباتی  $\Omega$  و روی مرز

ساختگی  $\partial\Omega$  با شعاع  $r_b = 3a$  مطابق شکل ۲b پراکنده شده‌اند. برای مقایسه جواب عددی با جواب تحلیلی، خطای جذر میانگین مربعات (RMS)

$$RMS - Error = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [u_{exact}(x_i) - u_{approximate}(x_i)]^2},$$

محاسبه شده است. در این مثال به ازای پارامتر شکل  $\alpha_c = 3$ ، خطای مربوط به میدان الکتریکی کل درون استوانه برابر  $10^{-4} \times 0.202 \times 3$  و خطای مربوط به میدان پراکنده شده در خارج از آن برابر  $10^{-5} \times 0.89 \times 8$  بدست آمده است که توافق بسیار خوبی را با جواب تحلیلی مسأله [۲۰] نشان می‌دهد.



شکل ۲: سطح مقطع راداری استوانه ناهمسانگرد دایره ای مربوط به مثال ۱ (b) توزیع نقاط درون دامنه محاسباتی

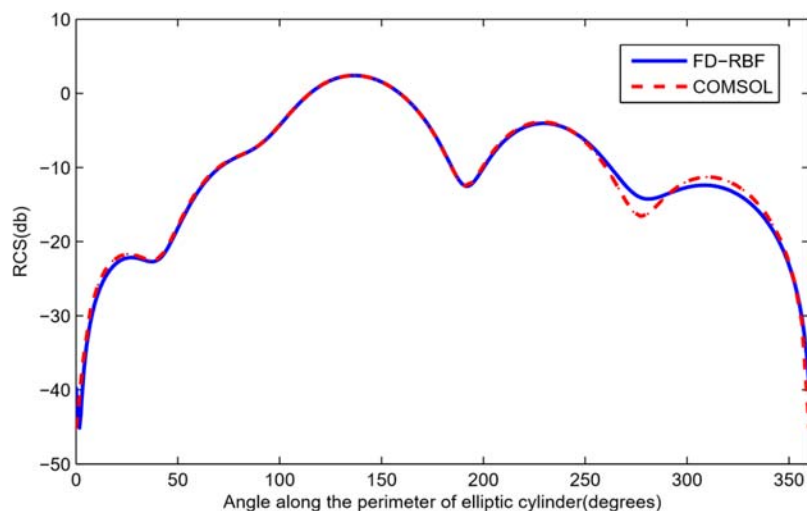
## ۳.۲. پراکندگی از یک استوانه ناهمسانگرد با سطح مقطع بیضوی

برای آن که نشان دهیم روش تفاضل متناهی بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی برای حل مسأله پراکندگی از استوانه‌هایی با سطح مقطع دلخواه کاربرد دارد، سطح مقطع راداری یک استوانه ناهمسانگرد با سطح مقطع بیضی با مشخصات  $k_0 a = \pi$

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, k_0 b = \frac{\pi}{2}, \epsilon_r = 1$$

و زاویه فرود  $\theta^i = 0$  در شکل (۳) در نظر گرفته شده است. تعداد کل نقاط

پراکنده شده در داخل دامنه محاسباتی برابر  $N = 1642$  می‌باشد  $r_b = 2a$  و  $\alpha_c = 4/5$  فرض شده‌اند. بدلیل آنکه برای این مدل جواب دقیق در دسترس نیست، جواب‌های محاسبه شده با این روش، با نتایج حاصل از نرم افزار COMSOL5 مقایسه شده است و دقت و کارایی این روش اثبات شده است.



شکل ۳: سطح مقطع راداری استوانه ناهمسانگرد بیضوی با ویژگی‌های  $k_0 a = \pi, k_0 b = \frac{\pi}{2}, \epsilon_r = 1$

$$\mu_{xx} = 4, \mu_{yy} = 2, \mu_{xy} = 2, \theta^i = 0$$

مربوط به مثال ۲.

## References

1. S. Abbasbandy, H. Roohani Ghehsareh, M. S. Alhuthali and H. Alsulami, Comparison of meshless local weak and strong forms based on particular solutions for a non-classical 2-diffusion model, *Eng Anal Bound Elem*, **39** (2014), 121-128.
2. S. N. Atluri and S. Shen, The basis of meshless domain discretization: the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, *Advances in Computational Mathematics*, **23** (2005), 73-93.
3. V. Bayona, M. Moscoso and M. Kindelan, Optimal variable shape parameter for multiquadric based RBF-FD methods, *Journal of Computational Physics*, **231** (2012), 2466-2481.

4. B. Beker, K. R. Umashankar and A. Taflove, Numerical analysis and validation of the combined field surface integral equations for electromagnetic scattering by arbitrary shaped two-dimensional anisotropic objects, *IEEE Trans. Antennas Propagat*, **37** (1989), 1573-1581.
5. B. Beker and K. R. Umashanka, Analysis of electromagnetic scattering by arbitrary shaped two-dimensional anisotropic objects: Combined field surface integral equation formulation, *Electromagnetics*, **9** (1989), 215-229.
6. E. F. Bolling and N. Flyer Erlebacher, Solution to PDEs using radial basis function finite difference (RBF-FD) on multiple GPUs, *Journal of Computational Physics*, **231** (2012), 7133–7151.
7. G. Chandhini and Y. V. S. S. Sanyasiraju, Local RBF-FD solutions for steady convection-difusion problem, *Numerical Methods in Engineering* **72** (2007), 352–378.
8. Z. N. Chen, W. Hong and W. X. Zhang, Application of FD-MEI to Electromagnetic Scattering from Transversally Anisotropic Inhomogeneous Cylinders, *IEEE Trans. Elec- tromagnetic Compat*, **40** (2) (1998), 103-110.
9. M. Dehghan, N. Shafieeabyaneh, Local radial basis function–finite-difference method to simulate some models in the nonlinear wave phenomena: regularized long-wave and extended Fisher–Kolmogorov equations, *Engineering with Computers*, (2019) <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00877-z>.
10. T.A. Driscoll and B. Fornberg, Interpolation in the limit of increasingly flat radial basis functions, *Computers and Mathematics with Applications*, **43** (2002), 413–422.
11. N. Flyer, E. Lehto, S. Blaise, G. B. Wright and A. St-Cyr, A guide to RBF-generated finite differences for nonlinear transport: shallow water simulations on a sphere, *Journal of Computational Physics* **231** (2012), 4078–4095.
12. R. D. Graglia and P. L. E. Vslenghi, Electromagnetic scattering from anisotropic materials, Part I: General theory, *IEEE Trans. Antennas Propagat*, **32** (1984), 867- 869.
13. R. D. Graglia and P. L. E. Vslenghi., Electromagnetic scattering from anisotropic materials, Part II: Computer code and numerical results in two-dimensions, *IEEE Trans. Antennas Propagat*, **35** (1987), 225-232.
14. F. G., Guimares, R. R. Saldanha, R. C. Mesquita, D. A. Lowther and J. A. Ramrez, A meshless method for electromagnetic field computation based on the multiquadratic technique, *IEEE Trans. Magn*, **43**(4) (2007), 1281-1284.
15. M. Hajisadeghi Esfahani, H. Roohani Ghehsareh, and S. K. Etesami, A meshless method for the investigation of electromagnetic scattering from arbitrary shaped anisotropic cylindrical objects, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **31**(5) (2017), 477–494.
16. M. Hajisadeghi Esfahani, H. Roohani Ghehsareh, and S. K. Etesami, The extended method of approximate particular solutions to simulate two-dimensional electromagnetic scattering from arbitrary shaped anisotropic objects, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **82** (2017), 91– 97.
17. A. Javed, K. Djijdeli and J. T. Xing, Shape adaptive RBF-FD implicit scheme for incompressible viscous Navier–Stokes equations, *Comput Fluids* **89** (2014), 38–52.
18. J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, NewYork: Wiley, 1993.

19. E. J. Kansa, R. C. Aldredgea and L. Ling, Numerical simulation of two-dimensional combustion using mesh-free methods, *Engineering Analysis with boundary Elements*, **33** (7) (2009), 940-970.
20. J. C. Monzon and N. J. Damasks, Two-dimensional scattering by homogeneous anisotropic rod, *IEEE Trans. Antennas Propagat*, **34** (1986), 1243-1249.
21. J. C. Monzon, Three-dimensional scattering by an infinite homogeneous circular cylinder: A spectral approach, *IEEE Trans. Antennas Propagat*, **35** (1987), 670-682.
22. M. A. Morgan, *Finite Element and Finite Difference Methods in Electromagnetic Scattering*, Elsevier, 1990.
23. W. L. Nicomedes, R. C. Mesquita and F. J. S. Moreira, The meshless local Petrov-Galerkin method in two-dimensional electromagnetic wave analysis, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* **60** (2012), 1957-1968.
24. W. L. Nicomede, R. C. Mesquita and F. J. S. Moreira, A Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Three-Dimensional Scalar Problems, *IEEE Transactions on Magnetics*, **47** (2011), 1214-1217.
25. H. Roohani Ghehsareh, S. K. Etesami and M. Hajisadeghi Esfahani, Numerical investigation of electromagnetic scattering problems based on the compactly supported radial basis functions, *Zeitschrift fur Naturforschung A.*, **71** (8) (2016), 677- 690.
26. H. Roohani Ghehsareh, M. Hajisadeghi Esfahani and S.K. Etesami, Numerical simulation of electromagnetic wave scattering from perfectly conducting cylinders using the local radial point interpolation technique, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **33**(3) (2019), 335-349.
27. Y. Y. Shan, C. W. Shu and N. Qin, Multiquadric finite difference (MQ-FD) methods and its application, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **1** (2009), 615-638.
28. C. W. Shu, H. Ding and K. S. Yeo, Local radial basis function based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **192** (2003), 941-954.
29. W. Sun and C. A. Balanis, Edge-based FEM solution of scattering from inhomogeneous and anisotropic objects, *IEEE transactions on antennas and propagation*, **42** (5) (1994), 627-632.
30. A. Taflove and M. E. Brodwin, Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time dependent Maxwell's equations, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, **23**(8) (1975), 623-630.
31. A. I. Tolstykh, On using RBF-based differencing formulas for unstructured and mixed structured-unstructured grid calculation, In: *Proceeding of the 16th IMACS, World Congress* (2000), Lausanne.
32. I. Tolstykh and D. A. Shirobokov, On using basis functions in a finite difference method with applications to elasticity problem, *Computational Mechanics*, **33** (2003), 68-79.
33. M. S. Tong, Meshfree solutions of volume integral equations for electromagnetic scattering by anisotropic object, *IEEE Trans. Antennas Propag*, **60** (9) (2012), 4249- 4258.
34. K. R. Umashankar and A. Taflove, A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects, *IEEE Trans. Electromagn. Compat*, **24** (1982), 397- 405.



35. S. A. Viana, D. Rodger and H. C. Lai, Meshless local Petrov-Galerkin method with radial basis functions applied to electromagnetics, *Inst. Elect. Eng. Proc., Sci. Meas. Technol*, **151**(6) (2004), 449-451.
36. R. B. Wu and C. H. Chen, Variation reaction formulation of scattering for anisotropic dielectric cylinders, *IEEE Trans. Antennas Propagat*, **34** (1986), 640-646.
37. L. Xuan, Z. Zeng, B. Shanker and L. Udupa, Element-free Galerkin method for static and quasi-static electromagnetic field computation, *IEEE Trans. Magn*, **40** (1) (2004), 12-20.
38. Y. Zhang, K. R. Shao, D. X. Xie and J. D. Lavers, Meshless method based on orthogonal basis for computational electromagnetics, *IEEE Trans. Magn*, **41** (5) (2005), 1432-1435.