Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

# Optimal Time to Standby Redundancy Allocation to the k-out-of n: G System in the Stress-Strength H-Weibull Models

**Z. Pakdaman**[1] ✉, **S. Ghafouri**[2]

1. Corresponding Author, Department of Statistics, Faculty of Science, University of Hormozgan, Bandar Abbas, Iran.
✉ E-mail: zpakdaman@hormozgan.ac.ir
2 Department of Mathematics, Faculty of Science, Arak University, 384817758, Arak, Iran.
E-mail: s-ghafouri@araku.ac.ir

**Article Info**

**Article type:**
Research Article

**Article history:**
Received: 27 April 2022
Received in revised form: 19 November 2022
Accepted: 10 January 2023
Published online: 29 February 2024

**Keywords**:
Optimization,
Cost Function,
Standby Redundancy,
Stress-Strength Reliability.

**ABSTRACT**

**Introduction**

One of the ways to increase the reliability of the system is redundancy allocation to the system. The standby redundancy is divided into three categories, cold, hot, and warm, depending on the environmental conditions in which they are placed in standby mode. The cold standby redundancy is inactive in standby mode, and the possibility of its failure in this mode is considered zero. A hot standby redundancy is active in standby mode and has the same failure rate as active system components. A warm standby redundancy is also active in standby mode, but it is not subjected to the same stress as the active system components as a hot standby redundancy.

In this article, we investigate the reliability of stress-strength in k out of n:G system in an H-Weibull model equipped with three types of standby redundancy and we get results about the time to add the standby component to this system. The baseline distribution function of the model is H, which is the distribution of the stress system. The contents of this article are categorized as follows. In the second part, in the general case, we will calculate the reliability of stress-strength in a k out of n:G system in an H-Weibull model equipped with a standby redundancy in H-Weibull models. In addition, we obtain a closed form for the stress-strength reliability of these systems under the exponential baseline distribution in the three standby states of cold, hot, and hot. In the third part, we study the time and cost of adding the standby component to this system. In this section, by introducing the cost function, we obtain the optimal time to add the standby component of the system with the aim of simultaneously reducing the costs and increasing the reliability of the stress-strength model under different values of the model parameters. In the last part, the conclusion of the content of the article is presented.

**Material and Methods**

In this paper, we present the general case for adding a standby component to a k out of n:G stress-strength system. Then, in the H-Weibull model, we investigate the reliability behavior of stress-strength in this system. A k out of n:G system is active, whenever at least k components out of n components are active. Consider a k out of n:G system with independent identically distributed

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

(i.i.d) $Y_1, \cdots, Y_n$ with distribution function $G$. Assume that the components of the above system are independent of each other putting into a common random stress $Z$ with cumulative distribution function $H$ and random variables $Z$ and $Y_i$ for $i = 1, \cdots, n$. In this case, the stress-strength reliability of this system is given as $R(n.k) = P(Z < Y_{n-k+1:n})$, where $Y_{i:n}$, is i th order statistic in the random sample $Y_1, \cdots, Y_n$. Suppose that the random variable $X$ is the lifetime of a standby redundant with the distribution function $F$ in normal environmental conditions and with the cumulative distribution function $F(\gamma(t))$ in the standby state, where $\gamma(t)$ is any ascending function meeting two requirements for every $t > 0$, $\gamma(0) = 0$ and $\gamma(t) \leq t$. On the other hand, the ascending function $w(t)$ is the transformed age of the standby redundant, from the standby state to the normal condition applying to every $t > 0$ in two conditions $w(0) = 0$ and $w(t) \leq t$. The hot and cold ready add-ons are special modes of the above model and are obtained when $w(t) = \gamma(t) = 0$ and $w(t) = \gamma(t) = t$, respectively. Let $k$ out of $n$:$G$ mentioned stress-strength system equipped with the standby redundant with lifetime $X$. Here, the standby redundancy enters the system operation after observing the $(n-k-m+1)$th failure among the system components, where $m = 0 \ldots n-k$, and the system until the failure of the $(m+1)$th component out of $m+k$ remaining components is kept active.

**Results and Conclusion**

In this article, the importance of the time allocation of the standby redundant to the $k$-out-of-$n$:$G$ stress-strength system and its effect on the stress–strength reliability and costs in the H-Weibull model are investigated. Also, the behavior of the cost function based on the H-Weibull model parameters is studied. The optimal time to add the standby component to the system performance in a $k$-out-of-$n$:$G$ stress-strength system in the H-Weibull model is presented.

Based on the results of this article, the adding time of the standby component with the aim of increasing the stress–strength reliability is dependent on the parameters of H-Weibull model, and the time changes by changing these parameters. On the other hand, the time to add the standby component to the stress-strength system in the model with the aim of increasing the stress-strength reliability and reducing the system costs simultaneously, in addition to the system parameters is dependent on the number of system components and the value of $k$.

In any case, we can conclude that for large values of $n$ and $k$, the optimal time to add is $m = 0$ and for small values of $k$ and large $n$, this value is usually $m = n - k$ and based on the distance between the values of $n$ and $k$ from each other, the value of $m$ will be changeable.

**How to cite:** Pakdaman, Z., & Ghafouri, S. (2023). Optimal Time to Standby Redundancy Allocation to the k-out-of n: G System in the Stress-Strength H-Weibull Models. *Mathematical Researches*, 9 (4), 49 – 69.

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# زمان بهینه برای تخصیص افزونه آماده به کار به G سیستم تنش–مقاومت k از n در مدل‌های H-وایبول

زهره پاکدامن[1]✉، سمیه غفوری[2]

۱. نویسنده مسئول، گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران. رایانامه: zpakdaman@hormozgan.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، ۳۸۴۸۱۷۷۵۸، اراک، ایران. رایانامه: s-ghafouri@araku.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

**نوع مقاله:** مقاله پژوهشی

**تاریخ دریافت:** ۱۴۰۱/۲/۷
**تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۱/۸/۲۸
**تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۱/۱۰/۲۰
**تاریخ انتشار:** ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

**واژه‌های کلیدی:**
قابلیت اعتماد تنش-مقاومت،
افزونهٔ آماده به‌کار،
بهینه‌سازی،
تابع هزینه.

**چکیده**

اختصاص افزونگی‌ها به سیستم، یکی از روش‌های ارتقاء قابلیت اعتماد و بهبود کارایی سیستم است. زمان اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار عامل مهمی در بهبود کارایی سیستم است و معمولاً هزینه‌هایی برای سیستم دارد. در این مقاله، به بررسی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در $G$ سیستم $k$ از $n$ در یک مدل $H$–وایبول می‌پردازیم. همچنین، به‌منظور افزایش قابلیت اعتماد تنش-مقاومت سیستم و کاهش هم‌زمان هزینه‌ها، در برخی از حالات مربوط به مدل $H$–وایبول، زمان بهینه برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به سیستم را به‌دست می‌آوریم.

**استناد**: پاکدامن، زهره؛ غفوری، سمیه (۱۴۰۲). زمان بهینه برای تخصیص افزونه آماده به کار به G سیستم تنش-مقاومت k از n در مدل‌های H-وایبول. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۴۹ – ۶۹.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.

CC BY NC

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

## مقدمه

هر سیستم ممکن است در طول دورهٔ فعالیت خود تحت تنش‌های مختلفی قرار بگیرد. این تنش‌ها می‌توانند عوامل محیطی بیرونی مانند دما، رطوبت، گرد و غبار، خوردگی، خشکی و غیره باشند که طول عمر سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهند. بنابراین اکثر سیستم‌هایی که با آنها سروکار داریم، نوعی سیستم تنش-مقاومت هستند و مطالعهٔ ویژگی‌های آنها حائز اهمیت است. فرض کنید یک سیستم دارای مقاومتی تصادفی به اندازهٔ $Y$ باشد که تحت تنش تصادفی‌ای به اندازهٔ $X$ است. اگر این سیستم در مقابل تنش فوق مقاومت کند. یعنی $Y > X$، سیستم به فعالیت خود ادامه می‌دهد و در غیر این صورت اگر $Y < X$ باشد سیستم موردنظر در مقابل تنش وارده شکست می‌خورد. میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت این سیستم به‌صورت $R = P(X < Y)$ نشان داده می‌شود. در مباحث قابلیت اعتماد به $R = P(X < Y)$ پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت نیز می‌گویند. قابلیت اعتماد تنش-مقاومت نه تنها در قابلیت اعتماد بلکه در سایر علوم به‌عنوان اندازه‌ای برای مقایسهٔ جوامع در صفت مورد بررسی به‌کار می‌رود. به‌طور مثال در پزشکی، اگر متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ نشان‌دهندهٔ تعداد دفعات بهبود بیماران سرطانی از دو روش شیمی‌درمانی متفاوت که روی آنها اجرا شده باشند، در این‌صورت، $R$ یک مقایسه بین دو روش فوق برای یافتن روش موثرتر در درمان است. همچنین، در علوم مهندسی اگر متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ نشان‌دهندهٔ مقاومت دو ماده در یک طراحی مهندسی باشند، آنگاه $R$ یک مقایسه بین دو ماده فوق برای یافتن ماده مستحکم‌تر در این طراحی مهندسی است. برای بسیاری از توزیع‌های خاص از متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ استنباط‌های پارامتری و ناپارامتری زیادی در مورد $R$ براساس طرح‌های مختلف نمونه‌گیری انجام شده است. برای مطالعهٔ بیشتر خوانندگان می‌توانند به [۱, ۲, ۳, ۴, ۷, ۸ , ۱۵, ۱۹, ۲۰, ۲۱, ۲۳, ۲۶ ] مراجعه کنند.

می‌دانیم که $G-$ سیستم $k$ از $n$ زمانی کار می‌کند که حداقل $k$ مؤلفهٔ آن فعال باشد. اگر $X_i$ نشان‌دهندهٔ طول عمر مؤلفهٔ $i$ ام باشد، آن‌گاه طول عمر یک $G-$ سیستم $k$ از $n$ عبارت است از $X_{n-k+1:n}$ که $(n-k-m+1)$ امین آماره مرتب در نمونه ای به حجم $n$ است. در این مقاله، ما زمان اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار را به یک سیستم تنش-مقاومت $k$ از $n$ در خانواده مدل‌های $H-$وایبول مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بسیاری از مسائل واقعی، استفاده از برخی تعمیم‌های توزیع وایبول مطلوب‌تر است زیرا تابع نرخ خطر آنها می‌تواند هر یک از اشکال مختلف را به ازای مقادیر مختلف پارامتر داشته باشد. کلاسی تبدیل‌پذیر از خانوادهٔ توزیع‌های $G-$گاما براساس توزیع گامای تعمیم‌یافته و نظریهٔ رکوردها در [۲۷] توسعه داده شد. اخیراً خانواده توزیع‌های $H-$وایبول ناشی از خانواده توزیع‌های معرفی شده در [۲۷] در پژوهش [۵] ارائه شد. براساس این پژوهش برای هر تابع توزیع پایه‌ای پیوسته $H$، تابع توزیع $H-$وایبول متناظر با آن که آن را با نماد $WF(\alpha.\beta.H)$ نشان می‌دهند، دارای تابع توزیع تجمعی (CDF) به‌صورت

$$G(y;\alpha.\beta) = 1 - e^{-\alpha\left(\frac{H(y)}{\bar{H}(y)}\right)^{\beta}} \tag{۱}$$

و تابع چگالی احتمال (PDF) به‌صورت زیر

(۲)

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

$$g(y;\alpha.\beta)=\alpha\beta\frac{h(y)}{\bar{H}^2(y)}\left(\frac{H(y)}{\bar{H}(y)}\right)^{\beta-1}e^{-\alpha\left(\frac{H(y)}{\bar{H}(y)}\right)^{\beta}}.$$

است که در آن $H(y)$ نشان‌دهندهٔ CDF پایه‌ای و $\alpha$ و $\beta$ نشان‌دهندهٔ پارامترهای مثبت این خانواده هستند. تعبیر شهودی خانواده توزیع‌های H–وایبول به این صورت است که اگر فرض کنید که متغیر تصادفی X نشان‌دهندهٔ طول عمر تصادفی یک مؤلفه با CDF، H باشد آنگاه نسبت بخت این مؤلفه با طول عمر تصادفی X که در زمان y شکست می‌خورد برابر $\frac{H(y)}{\bar{H}(y)}$ خواهد بود. فرض کنید که تغییرپذیری نسبت شکست با متغیر تصادفی Y نشان داده شود که دارای توزیع وایبول با پارامتر مقیاس $\alpha$ و پارامتر شکل $\beta$ می‌باشد که مطابق معادلهٔ (۱) است. معادلهٔ (۱) خانواده گسترده‌ای از توزیع‌ها را شامل می‌شود. هر کدام از توزیع‌های H–وایبول توسط توزیع پایه‌ای خاصی مشخص می‌شوند. به‌طور مثال، توزیع وایبول-فرشه با درنظر گرفتن H به‌عنوان CDF توزیعِ فرشه به‌دست می‌آید. به‌طور مشابه، توزیع‌های وایبول-گامپرتوز، وایبول-لگ-لوژستیک، وایبول-پارتو و وایبول-نرمال می‌توانند به‌ترتیب با درنظر گرفتن H به‌عنوان CDF توزیع‌های گامپرتوز، لگ-لوژستیک، پارتو و نرمال به‌دست می‌آیند.

یکی از روش‌هایی که باعث افزایش قابلیت اعتماد سیستم می‌شود، اختصاص افزونگی‌ها به سیستم است. افزونه‌های آماده به‌کار وابسته به شرایط محیطی که در حالت آماده به کار در آن قرار می‌گیرند به سه دستهٔ سرد، داغ و گرم تقسیم می‌شوند. افزونهٔ آماده به‌کار سرد در حالت آماده به‌کار، غیر فعال می‌باشد و احتمال خرابی آن در این حالت را صفر درنظر می‌گیرند. افزونهٔ آماده به‌کار داغ در حالت آماده به‌کار، فعال می‌باشد و دارای نرخ خرابی یکسان با مؤلفه‌های فعال سیستم است. افزونهٔ آماده به‌کار گرم نیز در حالت آماده به‌کار فعال است، امّا مانند افزونهٔ آماده به‌کار داغ تحت تنش یکسانی با مؤلفه‌های فعال سیستم قرار نمی‌گیرد. برای مطالعهٔ بیشتر در خصوص افزونهٔ آماده به‌کار می توان به [ ۹, ۱۴ , ۱۶, ۲۲] مراجعه کرد.

مسائل مختلف بهینه سازی مانند تخصیص افزونگی و تخصیص قابلیت اعتماد در G سیستم‌های k از n و حالت های خاصی از آنها مانند G سیستم‌های ۱ از n بررسی و فرمول‌بندی شده‌اند. برای این منظور، می‌توان به [۱۰، ۱۲، ۱۸، ۲۴، ۲۵] مراجعه نمود. برای مثال، روش‌های بهینه‌سازی دقیق مانند برنامه‌نویسی پویا، برنامه‌ریزی عدد صحیح و ضرایب لاگرانژی به‌منظور حل مسائل تخصیص افزونگی (RAP) برای G سیستم همگن۱ از n مجهز به افزونهٔ آماده به‌کار گرم پیشنهاد شده‌اند[۱۳]. روش‌های بهینه‌سازی فراابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک، جستجوی تابو[1] ، الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها و الگوریتم کلونی زنبورهای مصنوعی به‌منظور حل مسائل تخصیص افزونگی برای G سیستم۱ از n و G سیستم ناهمگن k از n مجهز به افزونهٔ آماده به‌کار داغ به‌کار رفته‌اند. در این باره، به [۶، ۱۱، ۱۷] مراجعه کنید.

در ادامه، یک کاربرد از سیستم تنش-مقاومتی که مجهز به یک افزونهٔ آماده به‌کار سرد است را ارائه می‌دهیم. یک اتومبیل را با چهار لاستیک و یک لاستیک اضافه در طی یک سفر درنظر بگیرید. فرض کنید هدف رسیدن به مقصد باشد. اگر یکی از لاستیک‌ها خراب شود، لاستیک اضافی جایگزین آن خواهد شد. فرض کنید متغیر تصادفی T طول عمر این پنج لاستیک باشد (به‌طور مثال، اگر فرض کنید که برای $i=1.\dots.5$ ، متغیر تصادفی $Y_i$ نشان‌دهندهٔ طول عمر لاستیک i ام باشد،

[1] Tabu

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

آنگاه $T = \min_{1\le i\le 4} Y_i + Y_5$ خواهد بود) و متغیر تصادفی Z تنش حاصل از عوامل محیطی مانند حرارت و عوامل خوردگی باشد که روی طول عمر لاستیک‌ها مؤثر است. در این صورت، $P(T > Z)$ احتمال رسیدن به مقصد در یک سفر است. در این مقاله، به بررسی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در یک G سیستم k از n در یک مدل H–وایبول مجهز به سه نوع افزونهٔ آماده به‌کار می‌پردازیم و نتایجی در مورد زمان اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به این سیستم به‌دست می‌آوریم که در آن، توزیع پایه‌ای مدل، تابع توزیع H می‌باشد که توزیع سیستم تنش است. مطالب این مقاله به‌صورت زیر دسته‌بندی شده است.

در بخش دوم، در حالت کلی، به محاسبه میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در یک G سیستم تنش-مقاومت k از n مجهز به یک افزونهٔ آماده به‌کار در مدل‌های H–وایبول می‌پردازیم. علاوه‌برآن، در سه حالت افزونهٔ آماده به‌کار سرد، گرم و داغ، فرم بسته‌ای برای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت این سیستم‌ها تحت توزیع پایه‌ای نمایی به‌دست می‌آوریم. در بخش سوم، زمان و هزینه اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به این سیستم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این بخش، با معرفی تابع هزینه، زمان بهینه برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار سیستم با هدف کاهش همزمان هزینه‌ها و افزایش میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت مدل را تحت مقادیر مختلف پارامترهای مدل به‌دست می‌آوریم. در بخش آخر، نتیجه‌گیری محتوای مقاله ارائه می‌شود.

## ۱. قابلیت اعتماد تنش-مقاومت $G$ سیستم $k$ از $n$ مجهز به یک افزونهٔ آماده به‌کار در مدل $H$-وایبول

دراین بخش، ابتدا حالت کلی را برای اضافه کردن یک مؤلفهٔ آماده به‌کار به یک $G$ سیستم تنش-مقاومت $k$ از $n$ ارائه می‌دهیم. سپس در مدل H–وایبول به بررسی رفتار قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در این سیستم می‌پردازیم. یک $G$ سیستم $k$ از $n$ فعال است، هر گاه حداقل $k$ مؤلفه از $n$ مؤلفه آن فعال باشد. یک $G$ سیستم $k$ از $n$ با مؤلفه‌های مستقل و هم‌توزیع $Y_1, \cdots, Y_n$ با تابع توزیع $G$ را درنظر بگیرید. فرض کنید که مؤلفه‌های سیستم فوق تحت تنش تصادفی $Z$ با تابع توزیع تجمعی $H$ و متغیرهای تصادفی $Z$ و $Y_i$ برای $i = 1. \dots . n$ از هم مستقل هستند. در این صورت قابلیت اعتماد تنش-مقاومت این سیستم به‌صورت $R(n.k) = P(Z < Y_{n-k+1:n})$ داده می‌شود، که در آن $Y_{i:n}$، (i) امین آمارهٔ مرتب در نمونه تصادفی $Y_1, \cdots, Y_n$ است. فرض کنید متغیر تصادفی X طول عمر یک افزونهٔ آماده به‌کار با تابع توزیع $F$ در شرایط محیطی عادی و با تابع توزیع $F(\gamma(t))$ در حالت آماده به‌کار باشد، که در آن $\gamma(t)$ یک تابع صعودی است که برای هر $t > 0$ در دو شرط $\gamma(0) = 0$ و $\gamma(t) \le t$ صدق می‌کند. از طرفی، تابع صعودی $w(t)$ سن تبدیل‌شدهٔ افزونهٔ آماده به‌کار، از حالت آماده به‌کار به شرایط معمولی است که برای هر $t > 0$ در دو شرط $w(0) = 0$ و $w(t) \le t$ صدق می‌کند. افزونهٔ آماده به‌کار سرد و داغ حالت خاصی از مدل فوق می‌باشند و به‌ترتیب به‌ازای $0 = w(t) = \gamma(t)$ و $t = w(t) = \gamma(t)$ به‌دست می‌آیند. فرض کنید G سیستم تنش-مقاومت k از n مذکور، مجهز به یک افزونه آماده به‌کار با طول عمر $X$ باشد. دراینجا افزونهٔ آماده به‌کار بعد از رخ دادن $(n-k-m+1)$ امین خرابی در بین مؤلفه‌های سیستم، که در آن $m = 0. \dots . n-k$، وارد عملکرد سیستم می‌شود و سیستم تا زمان خرابی $(m+1)$ امین مؤلفه از بین $m+$

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

$k$ مؤلفه باقیمانده، فعال نگه داشته می‌شود. فرض کنید طول عمر یک G سیستم مقاومت $k$ از $n$ مجهز به یک افزونهٔ آماده به‌کار که در زمان خرابی $(n-k-m+1)$ امین مؤلفه وارد عملکرد سیستم می‌شود را با $T^{s}_{n-k-m+1}$ نشان دهیم. در این صورت بنا بر [۲۰]، به ازای $m=0.\dots.n-k$ تابع بقای سیستم به‌صورت

(۳)

$$\bar{F}_{T^{s}_{n-k-m+1}}(t)=\frac{n!\,\bar{G}^{k-1}(t)}{m!\,(n-k-m)!\,(k-1)!}\int_0^t\frac{\bar{F}(w(y)+t-y)}{\bar{F}\big(w(y)\big)}\bar{F}\big(\gamma(y)\big)G^{n-k-m}(y)$$
$$\times\,[G(t)-G(y)]^m dG(y)+P(Y_{n-k+1:n}>t).$$

به‌دست می‌آید. حال، یک G سیستم تنش-مقاومت k از n مجهز به یک افزونهٔ آماده به‌کار را درنظر بگیرید که مؤلفه‌های مقاومت و افزونهٔ آماده به‌کار آن به‌ترتیب از مدل $H$–وایبول، $Y_i\sim WG(\alpha.\beta.\mathrm{H})$ برای $i=1.\dots.n$ و $X\sim \mathrm{W}G(\lambda.\theta.\mathrm{H})$ پیروی می‌کنند. همان‌طور که قبلاً گفته شد، $T^{s}_{n-k-m+1}$ طول عمر این $G$–سیستم تنش-مقاوت $k$ از $n$ مجهز به یک افزونهٔ آماده به‌کار بوده و تا زمانی که طول عمر این سیستم یعنی $T^{s}_{n-k-m+1}$، بزرگتر از فشار وارد بر آن یعنی متغیر تصادفی Z است، سیستم به فعالیت خود ادامه می‌دهد و در غیر این‌صورت سیستم از کار می‌افتد. در این صورت، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت سیستم فوق با تابع توزیع ارائه شده در (۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

(۴)

$$R^{s}(n.k.m)=P(T^{s}_{n-k-m+1}>Z)$$
$$=R(n.k)+b\int_0^\infty\int_0^z\frac{e^{-\lambda\left(\frac{H(w(y)+z-y)}{\bar{H}(w(y)+z-y)}\right)^{\theta}}}{e^{-\lambda\left(\frac{H(w(y))}{\bar{H}(w(y))}\right)^{\theta}}}e^{-\lambda\left(\frac{H(\gamma(y))}{\bar{H}(\gamma(y))}\right)^{\theta}}$$
$$\times\left(1-e^{-\alpha\left(\frac{H(y)}{\bar{H}(y)}\right)^{\beta}}\right)^{n-k-m}e^{-\alpha(k-1)\left(\frac{H(z)}{\bar{H}(z)}\right)^{\beta}}$$
$$\times\left[e^{-\alpha\left(\frac{H(y)}{\bar{H}(y)}\right)^{\beta}}-e^{-\alpha\left(\frac{H(z)}{\bar{H}(z)}\right)^{\beta}}\right]^{m}\frac{\alpha\beta}{\bar{H}^2(y)}\;h(y)\;\left(\frac{H(y)}{\bar{H}(y)}\right)^{\beta-1}e^{-\alpha\left(\frac{H(y)}{\bar{H}(y)}\right)^{\beta}}h(z)\;dydz.$$

که در آن

$$R(n.k)=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j-1}{k-1}\binom{n}{j}\int_0^1 e^{-\alpha_j\left(\frac{u}{1-u}\right)}du\,.$$

و

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

$$b=\frac{n!}{m!\,(n-k-m)!\,(k-1)!}\cdot$$

می‌باشد. در ادامه، به مطالعه و بررسی برخی ویژگی‌های $R^s(n.k.m)$ در (۴) می‌پردازیم.

**الف)** در حالتی که افزونه، آماده به‌کار داغ باشد رابطهٔ شماره (۴) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

(۵)

$$R^s(n.k.m)=R(n.k)+\binom{n}{k-1}\ \sum_{i=0}^{n-k+1}\binom{n-k+1}{i}(-1)^i\int_0^1 e^{-\lambda(\frac{u}{1-u})^\theta}\ e^{-\alpha(i+k-1)(\frac{u}{1-u})^\beta}\ du\cdot$$

ملاحظه می‌کنید که در حالتی که افزونه، آماده به‌کار داغ است، میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت این G سیستم $k$ از $n$ به m بستگی ندارد. بنابراین، در حالتی که افزونه، آماده به‌کار داغ باشد، زمان اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به سیستم تأثیری در افزایش میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت آن ندارد.

**ب)** در حالتی که افزونه، آماده به‌کار سرد باشد رابطهٔ شماره (۴) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$R^s(n.k.m)=R(n.k)+\alpha\beta b\ \sum_{i=0}^{m}\ \sum_{j=0}^{m-i}\ \sum_{l=0}^{n-k-m+i}\binom{m}{i}\binom{m-i}{j}\binom{n-k-m+i}{l}(-1)^{i+j+l}$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^z e^{-\alpha(k-1+j)\left(\frac{H(z)}{\overline{H}(z)}\right)^\beta}\ e^{-\alpha(\varepsilon+1)\left(\frac{H(y)}{\overline{H}(y)}\right)^\beta}\ e^{-\lambda\left(\frac{H(z-y)}{\overline{H}(z-y)}\right)^\theta}\ \frac{(H(y))^{\beta-1}}{(\overline{H}(y))^{\beta+1}}\ \ dH(y)dH(z)\cdot$$

**نتیجهٔ ۱:** یک $G$ سیستم تنش-مقاومت $k$ از $n$ مجهز به یک افزونهٔ آماده به‌کار سرد را درنظر بگیرید به‌طوری‌که مؤلفه-های مقاومت آن به‌صورت $Y_i\sim WG(\alpha.\beta.\mathrm{H})$ و افزونهٔ آماده به‌کار آن به‌صورت $X\sim \mathrm{W}G(\lambda.\beta.\mathrm{H})$ توزیع شده باشند. در این صورت می‌توان نوشت:

$$R^s(n.k.m)\geq R(n.k)+\alpha\beta b\ \sum_{i=0}^{m}\ \sum_{j=0}^{m-i}\ \sum_{l=0}^{n-k-m+i}\binom{m}{i}\binom{m-i}{j}\binom{n-k-m+i}{l}(-1)^{i+j+l}$$

$$\times\int_0^1 e^{-(\alpha(k+l)+j+\lambda)(\frac{u}{1-u})^\beta}\ du\cdot$$

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

## ۲. زمان بهینه برای فعال کردن افزونهٔ آماده به‌کار

در این بخش، زمان فعال کردن افزونهٔ آماده به‌کار به یک $G$-سیستم تنش-مقاومت $k$ از $n$ که دارای مؤلفه‌هایی از خانواده $H$–وایبول می‌باشد مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف این بخش، افزایش میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت سیستم و کاهش هم‌زمان هزینه‌ها در مدل $H$– وایبول مطرح شده است.

فرض کنید $\overline{H}(z) = 1 - e^{-\mu z}$ و مؤلفه‌های مقاومت از توزیع $WG(\alpha.\beta.H)$ و افزونهٔ آماده به‌کار از توزیع $WG(\lambda.\theta.H)$ پیروی کنند. همچنین، فرض کنید که قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در $G$ سیستم $k$ از $n$ مجهز به افزونهٔ آماده به‌کار سرد، گرم و داغ را به‌ترتیب با نمادهای $R_1^s(n.k.m)$، $R_2^s(n.k.m)$ و $R_3^s(n.k.m)$ نشان دهیم. با فرض $w(y) = \gamma(y) = \frac{y}{2}$ ، برای افزونهٔ آماده به‌کار گرم و با استفاده از رابطهٔ (۴) و به ازای p=1,2 داریم:

(۶)

$$R_p^s(n.k.m) = R(n.k) + \alpha\beta b\mu^2 \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{l=0}^{n-k-m+i} \binom{m}{i}\binom{m-i}{j}\binom{n-k-m+i}{l}(-1)^{i+j+l}$$

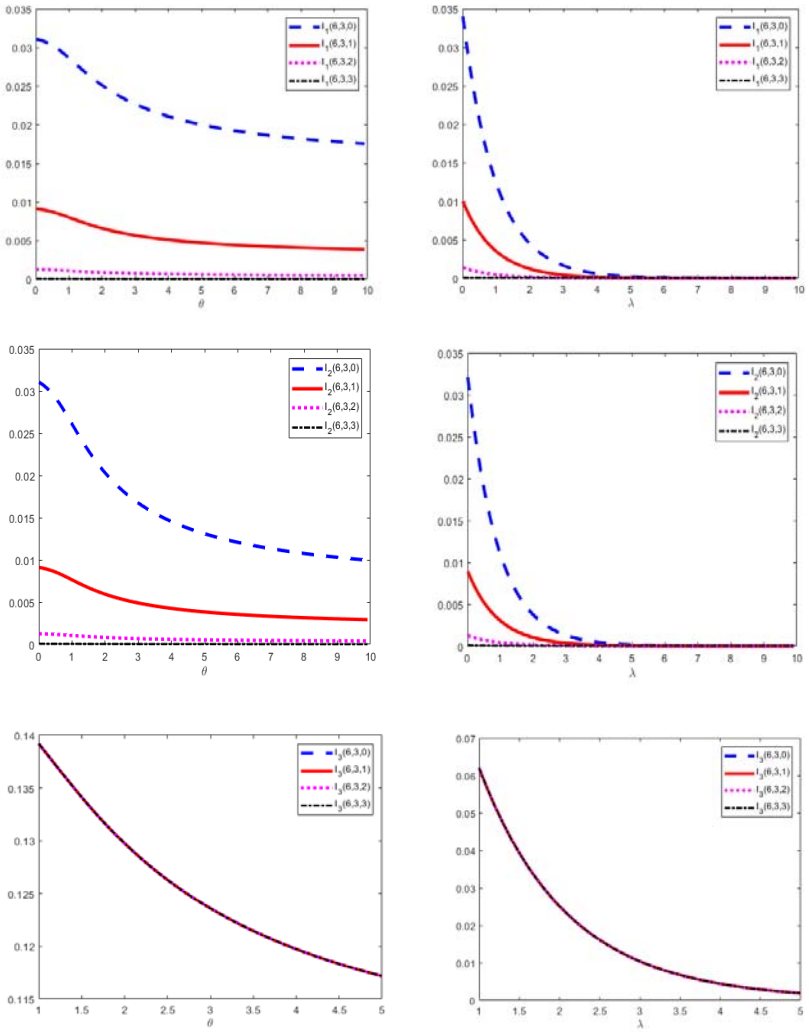
$$\times \int_0^\infty \int_0^z e^{-\alpha(k-1+j)(e^{\mu z}-1)^\beta} e^{-\alpha(l+1)(e^{\mu y}-1)^\beta} e^{-\lambda\left(e^{\mu\left(z-\frac{y}{p}\right)}-1\right)^\theta} (e^{\mu y}-1)^\beta$$

$$\times (1-e^{-\mu y})^{-1} e^{-\mu z}\ dydz \cdot$$

میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت $G$ سیستم $k$ از $n$ مطرح شده در حالتی که افزونه، آماده به‌کار داغ باشد با استفاده از رابطهٔ (۵) قابل محاسبه است.

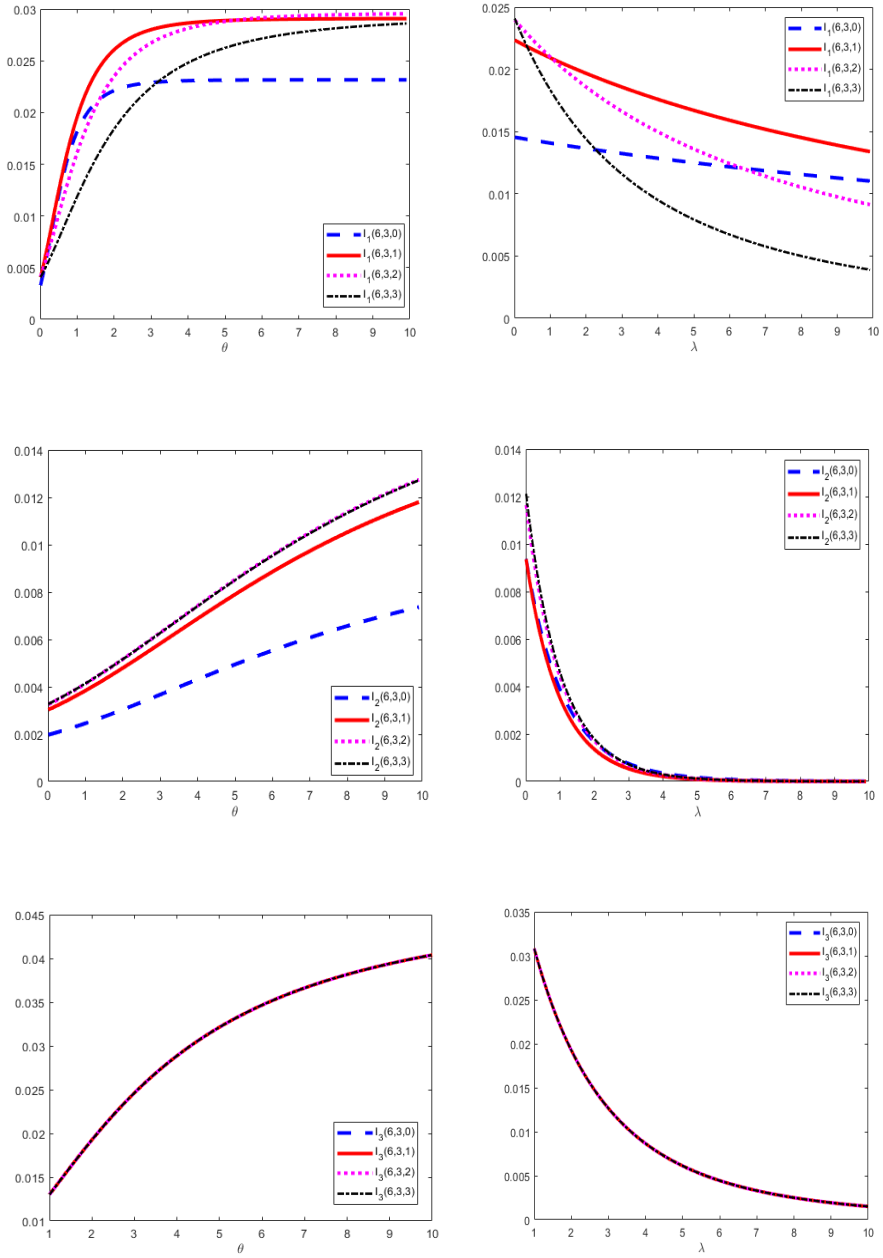
فرض کنید برای افزونهٔ آماده به‌کار سرد، گرم و داغ، اختلاف $R_p^s(n.k.m) - R(n.k)$ را به‌ترتیب با نمادهای $I_1^s(n.k.m)$، $I_2^s(n.k.m)$ و $I_3^s(n.k.m)$ نشان دهیم. درادامه، برای $p = 1.2.3$ به بررسی رفتار $I_p^s(n.k.m)$ در یک $G$ سیستم ۲ از ۴ براساس پارامترهای $\alpha$، $\beta$، $\lambda$، $\theta$ و $\mu$ می‌پردازیم.

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]



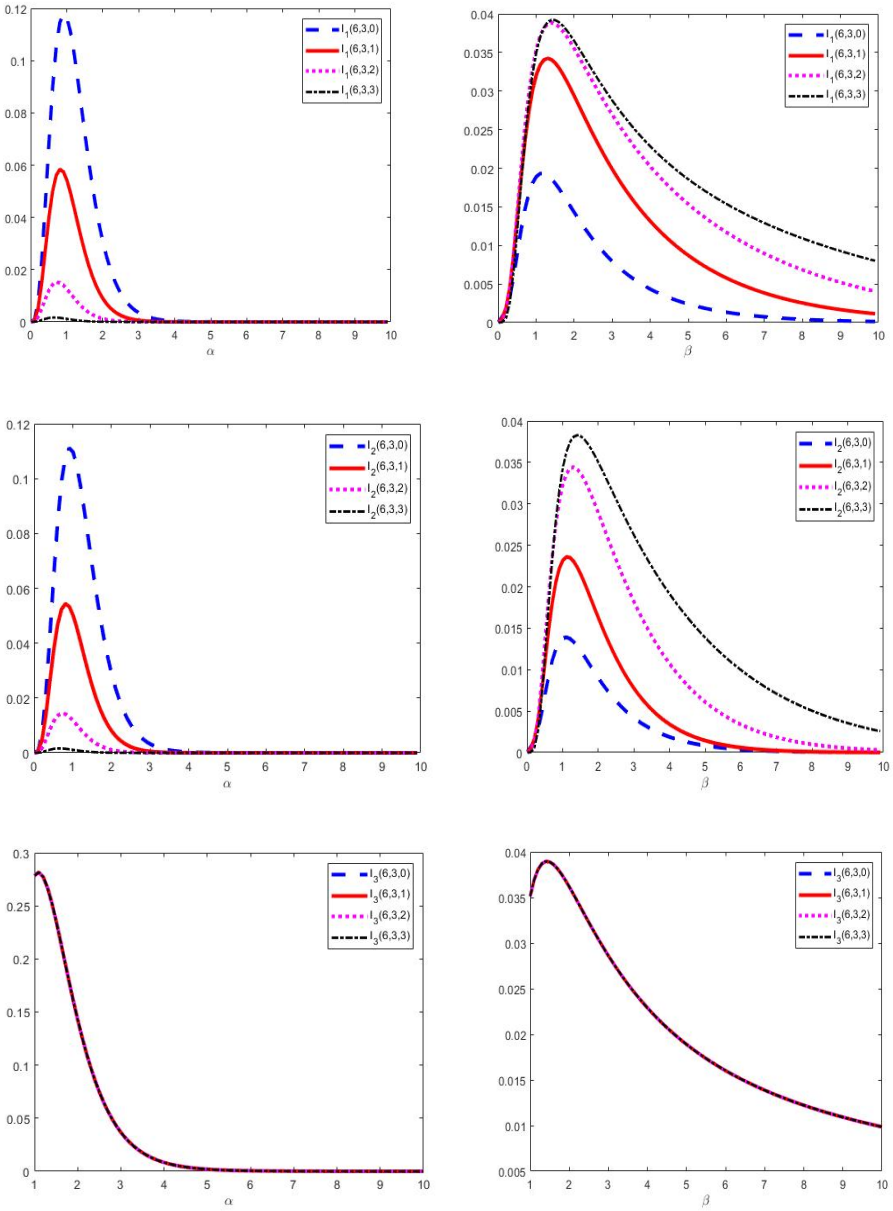

**نمودار۱: نمودار $I_p^s(n.k.m)$ برای $\alpha = \beta = \lambda = \theta = 0.1$ و $\mu = 0 \cdot 5$ براساس پارامترهای $\lambda$ و $\theta$. نمودارها از بالا به پایین برای افزونهٔ آماده به‌کار سرد، گرم و داغ می‌باشند.**

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]



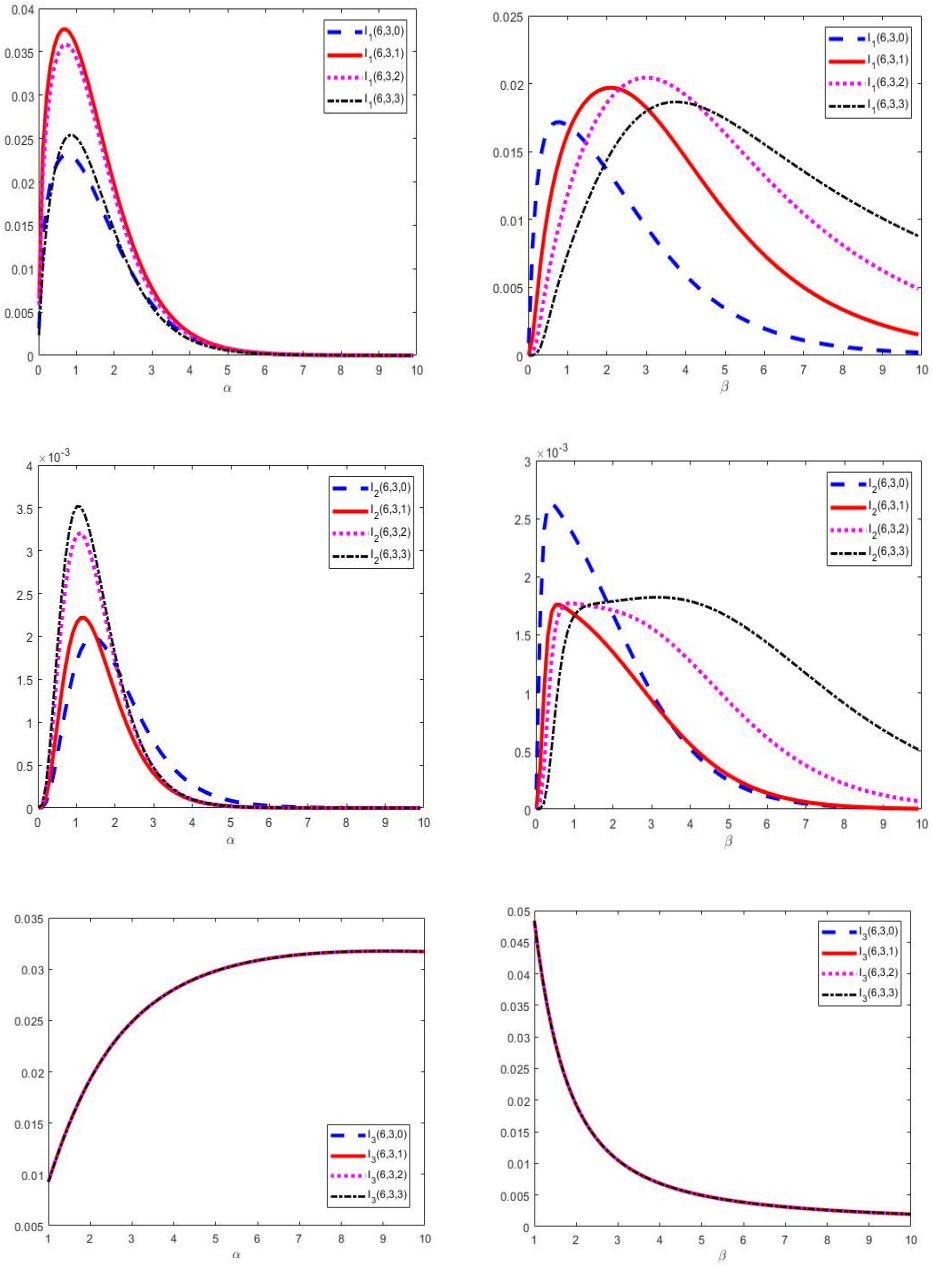

**نمودار۲: نمودار $I_p^s(n.k.m)$ برای $\alpha = \beta = \lambda = \theta = 2$ و $\mu = 0 \cdot 5$ براساس پارامترهای$\lambda$ و$\theta$. نمودارها از بالا به پایین برای افزونهٔ آماده به‌کار سرد، گرم و داغ می‌باشند.**

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]




**نمودار۳: نمودار $I_p^s(n.k.m)$ برای $\alpha = \beta = \lambda = \theta = 0.1$ و $\mu = 0 \cdot 5$. براساس پارامترهای $\alpha$ و $\beta$. نمودارها از بالا به پایین برای افزونهٔ آماده به‌کار سرد، گرم و داغ می‌باشند.**

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]




**نمودار۴: نمودار $I_p^s(n.k.m)$ برای $\alpha = \beta = \lambda = \theta = 2$ و $\mu = 0 \cdot 5$ براساس پارامترهای α و β. نمودارها از بالا به پایین برای افزونهٔ آماده به‌کار سرد، گرم و داغ می‌باشند.**

برای برخی مقادیر انتخاب‌شدهٔ پارامترها، رفتار $I_p^s(n.k.m)$ ، در نمودارهای ۱ و ۲ به‌عنوان تابعی از λ و θ رسم شده است. از نمودار ۱ می‌توان دریافت که $I_p^s(n.k.m)$ یک تابع نزولی نسبت به پارامترهای λ و θ به ازای مقدار ۰٫۱ برای سایر

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

پارامترهای مدل است. همچنین، از نمودار ۱ مشاهده می‌شود که در حالت افزونهٔ آماده به‌کار سرد، گرم و داغ، مقدار $I_p^s(n.k.m)$ به ازای $m = 0$ بیشترین مقدار خود را دارد. یعنی زمانی که افزونهٔ آماده به‌کار بعد از خرابی

$(n-k+1)$ امین مؤلفه (خرابی کل سیستم) وارد عملکرد آن شود، بیشترین میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را خواهیم داشت. به‌هرحال، مقادیر m به‌منظور داشتن بیشترین قابلیت اعتماد تنش-مقاومت به پارامترهای مدل تنش-مقاومت وابسته و حساس هستند.

به‌عنوان مثال، زمانی که پارامترهای مدل مقادیر بزرگتر از یک را اختیار می‌کنند در نمودار ۲، رفتار تابع $I_p^s(n.k.m)$ نسبت به λ و θ نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در حالت افزونهٔ آماده به‌کار سرد، برای $\theta < 5\cdot 61$ و $\alpha = \beta = \lambda = 2$ و $\mu = 0\cdot 5$ به ازای $m = 2$، $I_1^s(n.k.m)$ بیشترین مقدار خود را دارد. یعنی زمانی که افزونهٔ آماده به‌کار سرد بعد از خرابی $(n-k+1)$ امین مؤلفه وارد عملکرد سیستم شود، بیشترین میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را داریم. همچنین، از نمودار ۲ در حالت افزونهٔ آماده به‌کار گرم به ازای $\alpha = \beta = \lambda = 2$ و $\mu = 0\cdot 5$ و به ازای هر مقدار θ مشاهده می‌کنیم که برای $m = 2$ یا $m = 3$، $I_2^s(n.k.m)$ بیشترین مقدار خود را دارد. به‌طور مشابه، همان‌طور که مشاهده شد برای سایر مقادیر پارامترهای مدل $H$-وایبول نیز مقدار $m$ برای به‌دست آوردن بیشترین میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت به‌طور مستقیم وابسته به پارامترهای مدل است و با تغییر پارامترها مقدار $m$ یعنی زمان اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار $G$ سیستم تنش-مقاومت ۲ از ۴ تغییر می‌کند.

همچنین، به‌منظور بررسی حساسیت $I_p^s(n.k.m)$ نسبت به تمام مقادیر α و β، رفتار $I_p^s(n.k.m)$ در نمودارهای ۳ و ۴ به‌صورت تابعی از پارامترهای α و β رسم شده است. از نمودار ۳ معلوم می‌شود که به ازای مقدار ۰٫۱ برای سایر پارامترهای مدل، $I_p^s(n.k.m)$ نسبت به β و α یک تابع تک‌مُدی است. همچنین، ملاحظه می‌شود که به ازای مقدار ۰٫۱ فرض شده برای پارامترهای مدل در نمودار ۳، زمان اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار متفاوت است. به‌طور مثال، برای تمامی مقادیر $\alpha > 0$ و مقادیر مفروض برای پارامترهای دیگر بهتر است که افزونهٔ آماده به‌کار در زمان $m = 0$ به سیستم اضافه شود. درحالی‌که برای تمامی مقادیر $\beta > 0$ و مقادیر مفروض برای پارامترهای دیگر، بهتر است که افزونهٔ آماده به‌کار در زمان $m = 3$ به سیستم اضافه شود. در نمودار ۴ نیز ملاحظه می‌شود که با تغییر پارامترهای مدل، زمان اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به مدل تغییر می‌کند.

واضح است که افزودن مؤلفهٔ آماده به‌کار به سیستم باعث افزایش هزینه‌ها می‌شود. ازطرفی، افزودن مؤلفهٔ آماده به‌کار باعث افزایش میانگین زمان تا شکست (MTTF) می‌شود. با وجود این ممکن است که افزایش در میانگین زمان شکست باعث کاهش هزینه‌ها شود. در این حالت، ممکن است علاقه‌مند به نحوه تغییر میانگین نرخ هزینه با استفاده از اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به سیستم باشیم. برای رسیدن به این هدف، با استفاده از [۱۳]، میانگین نرخ هزینه در یک G سیستم k از n مجهز به افزونهٔ آماده به‌کار و فاقد افزونهٔ آماده به‌کار را، به‌ترتیب، به‌صورت

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

$$C^s(n.k.m) = \frac{(n+1)c}{\int_0^\infty \bar{F}_{T^s_{n-k-m+1}}(t)dt}$$

و

$$C(n.k) = \frac{nc}{\int_0^\infty \bar{G}_{n-k+1:n}(t)dt}.$$

تعریف می‌کنیم که در آن C هزینهٔ استفاده از هر مؤلفه می‌باشد. میانگین نرخ هزینه در یک G سیستم k از n مجهز به یک افزونهٔ آماده به‌کار سرد، گرم و داغ به‌ترتیب با نمادهای $C_1^s(n.k.m)$، $C_2^s(n.k.m)$ و $C_3^s(n.k.m)$ نشان داده می‌شوند و برای $p = 1.2$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_p^s(n.k.m) = \frac{(n+1)C}{\alpha\beta\mu b \quad \sum_{i=0}^{m} \quad \sum_{j=0}^{m-i} \quad \sum_{l=0}^{n-k-m+i} \binom{m}{i}\binom{m-i}{j}\binom{n-k-m+i}{l}(-1)^{i+j+l}}$$

$$\times \frac{1}{\int_0^\infty \int_0^t e^{-\alpha(k-1+j)(e^{\mu t}-1)^\beta} e^{-\alpha(l+1)(e^{\mu y}-1)^\beta} e^{-\lambda\left(e^{\mu\left(t-\frac{y}{p}\right)}-1\right)^\theta} (e^{\mu y}-1)^{\beta-1}e^{\mu y} \, dydt}.$$

همچنین، برای $p = 3$ داریم:

$$C_3^s(n.k.m) = \frac{(n+1)c}{\binom{n}{k-1} \sum_{i=0}^{n-k+1}\binom{n-k+1}{i}(-1)^i \int_0^\infty e^{-\lambda(e^{\mu t}-1)^\theta} e^{-\alpha(i+k-1)(e^{\mu t}-1)^\beta} dt}.$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در حالت افزونهٔ آماده به‌کار داغ، میانگین نرخ هزینه یعنی $C_3^s(n.k.m)$ به $m$ بستگی ندارد. برای مقادیر مختلف n، $k$ و $m$ و به ازای مقادیر مختلف پارامترهای α، β، λ، θ و $c = 1$، مقادیر $C_p^s(n.k.m)$ برای $p = 1.2$ و 3. در جدول ۱ ارائه شده است.

در جدول ۱، $c(n.k)$ میانگین نرخ هزینه برای $G$ سیستم $k$ از $n$ فاقد افزونهٔ آماده به‌کار می‌باشد و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$C(n.k) = \frac{nc}{\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j-1}{k-1}\binom{n}{j}\int_0^\infty e^{-\alpha_j(e^{\mu t}-1)^\beta} dt}.$$

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

**جدول ۱: میانگین نرخ هزینه برای $G$ سیستم $k$ از $n$ مجهز به افزونهٔ آماده به‌کار و فاقد افزونهٔ آماده به‌کار برای مقادیر $\alpha = \beta = 2$ و $\theta = \mu = \lambda = 0 \cdot 5$.**

| $n$ | $k$ | $m$ | $C_1^s(n.k.m)$ | $C_2^s(n.k.m)$ | $C_3^s(n.k.m)$ | $C(n.k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٦ | ١ | ٠ | ٣.٣٦٣٣ | ٣.٧٨١٣ | ٢.٢٧٢٨ | ٤.١٥٤٨ |
| | | ٣ | ٢.٩١٥٦ | ٣.٢١٣٨ | ٢.٢٧٢٨ | ٤.١٥٤٨ |
| | | ٥ | ٢.٦١٥٨ | ٢.٧٨٠٥ | ٢.٢٧٢٨ | ٤.١٥٤٨ |
| | ٣ | ٠ | ٦.٧٤٥٧ | ٦.٧٧٨٠ | ٦.١٩٣٤ | ٥.٩٣٤٠ |
| | | ٢ | ٦.٦٤٤٥ | ٦.٦٧٥٢ | ٦.١٩٣٤ | ٥.٩٣٤٠ |
| ١٢ | ١ | ٠ | ٦.٠٩٣٩ | ٦.٧٨٧٤ | ٤.١٤٤٢ | ٧.٥٦٧٩ |
| | | ٥ | ٥.٣٧٠٤ | ٥.٩٢٦٣ | ٤.١٤٤٢ | ٧.٥٦٧٩ |
| | | ١١ | ٤.٥٧٩٦ | ٤.٧٩٥٣ | ٤.١٤٤٢ | ٧.٥٦٧٩ |
| | ٧ | ٠ | ١٤.٦٦٠٨ | ١٤.٦٧٢٠ | ١٣.٨٠٠٣ | ١٣.٥٩٠٦ |
| | | ٣ | ١٤.٦٠٦٩ | ١٤.٦١٩٦ | ١٣.٨٠٠٣ | ١٣.٥٩٠٦ |
| | | ٥ | ١٤.٥٧٧٨ | ١٤.٥٨٥٦ | ١٣.٨٠٠٣ | ١٣.٥٩٠٦ |
| | ١١ | ٠ | ٢٦.٨٨٣١ | ٢٦.٨٨٣٣ | ٢٢.٦٦٧٧ | ٢٤.٨١٦٤ |
| | | ١ | ٢٦.٨٨٢٦ | ٢٦.٨٨٢٨ | ٢٢.٦٦٧٧ | ٢٤.٨١٦٤ |

از جدول ۱ مشاهده می‌شود که میانگین نرخ هزینه با اضافه کردن یک مؤلفهٔ آماده به‌کار به سیستم برای مقادیر کوچک $k$ کاهش می‌یابد و برای مقادیر بزرگ $k$ افزایش می‌یابد. ازطرفی، میانگین نرخ هزینه یک تابع صعودی از $k$ و یک تابع نزولی از $m$ است. همچنین، میانگین نرخ هزینه سیستم با اضافه کردن یک مؤلفهٔ آماده به‌کار داغ کمتر از میانگین نرخ هزینه با اضافه کردن یک مؤلفهٔ آماده به‌کار سرد یا گرم است. درادامه، برای $p = 1.2.3$، مسئله یافتن زمان بهینه برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به $G$ سیستم $k$ از $n$ را با بیشینه کردن قابلیت اعتماد تنش-مقاومت $R_p^s(n.k.m)$ و کمینه کردن همزمان هزینه $C_p^s(n.k.m)$ درنظر می‌گیریم. این مسئله می‌تواند به‌صورت زیر مطرح شود:

$$\text{بیشینه کردن} : \quad \frac{R_p^s(n.k.m)}{C_p^s(n.k.m)}.\ \mathrm{p} = 1.2.3$$

$$\text{نسبت به} : \quad 0 \le \mathrm{m} \le \mathrm{n} - \mathrm{k}$$

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

برای مقادیر مختلف پارامترهای مدل و به ازای $c = 1$، زمان بهینه $m$ برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به سیستم در جدول‌های ۲، ۳ و ۴ برای برخی مقادیر n و k ارائه شده است.

**جدول۲ : مقدار بهینه $m$ در $G$ سیستم تنش-مقاومت $k$ از $n$ برای مقادیر $\alpha = \beta = 2$ و $\theta = \mu = \lambda = 0.5$.**

| $n$ | $k$ | افزونهٔ آماده به‌کار سرد | افزونهٔ آماده به‌کار گرم | افزونهٔ آماده به‌کار داغ |
|---|---|---|---|---|
| ۶ | ۱ | ۱ | ۵ | ۰,...,۵ |
| | ۲ | ۱ | ۲ | ۰,...,۴ |
| | ۳ | ۱ | ۲ | ۰,...,۳ |
| | ۴ | ۱ | ۱ | ۰,۱,۲ |
| | ۵ | ۱ | ۱ | ۰,۱ |
| ۱۲ | ۱ | ۱ | ۱۱ | ۰,...,۱۱ |
| | ۲ | ۱ | ۲ | ۰,...,۱۰ |
| | ۴ | ۱ | ۲ | ۰,...,۸ |
| | ۶ | ۱ | ۲ | ۰,...,۶ |
| | ۷ | ۱ | ۲ | ۰,...,۵ |
| | ۱۰ | ۰ | ۰ | ۰,۱,۲ |
| | ۱۱ | ۰ | ۰ | ۰,۱ |

ملاحظه می‌کنید که زمان بهینه برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار سرد به سیستم فوق در بیشتر موارد در زمان $m = 1$ می‌باشد. درحالی‌که زمان بهینه برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار گرم به سیستم فوق در بیشتر موارد در زمان $m = 2$ بوده است. به‌هرحال، مقدار بهینهٔ m در این حالت علاوه‌بر اینکه به مقادیر $n$ و $k$ وابسته است، به پارامترهای سیستم تنش-مقاومت نیز وابسته بوده و نسبت به آنها حساس است.

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

**جدول ۳ : مقدار بهینه $m$ در $G$ سیستم تنش-مقاومت $k$ از $n$ برای مقادیر $\alpha = \beta = 0 \cdot 1$ و $\theta = \mu = \lambda = 0.5$.**

| $n$ | $k$ | افزونهٔ آماده به‌کار سرد | افزونهٔ آماده به‌کار گرم | افزونهٔ آماده به‌کار داغ |
|---|---|---|---|---|
| ۶ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰,...,۵ |
| | ۲ | ۰ | ۰ | ۰,...,۴ |
| | ۳ | ۰ | ۰ | ۰,...,۳ |
| | ۴ | ۰ | ۰ | ۰,۱,۲ |
| | ۵ | ۰ | ۰ | ۰,۱ |
| ۱۲ | ۱ | ۰ | ۶ | ۰,...,۱۱ |
| | ۲ | ۰ | ۷ | ۰,...,۱۰ |
| | ۴ | ۰ | ۰ | ۰,...,۸ |
| | ۶ | ۰ | ۰ | ۰,...,۶ |
| | ۷ | ۰ | ۰ | ۰,...,۵ |
| | ۱۰ | ۰ | ۰ | ۰,۱,۲ |
| | ۱۱ | ۰ | ۰ | ۰,۱ |

به ازای همه مقادیر n و k به جز مقادیر $k = 1$ و $n = 12$ و $k = 2$ و $n = 12$ مشاهده می‌شود که در جدول ۲، زمان بهینه برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به عملکرد سیستم بلافاصله بعد از خرابی سیستم است یعنی در زمان $m = 0$. همچنین، در جدول ۳، زمان بهینه برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به عملکرد سیستم برای تمامی مقادیر انتخاب شده، زمان $m = 0$ است. بنابراین، مقادیر پارامترهای $\alpha$، $\beta$، $\lambda$، $\theta$ و $\mu$ نیز در تعیین زمان بهینه برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به عملکرد سیستم مؤثر هستند.

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

**جدول ۴ : مقدار بهینه m در G سیستم تنش-مقاومت k از n برای مقادیر $\alpha = \beta = 0 \cdot 1$ و $\theta = \mu = \lambda = 2$.**

| n | $k$ | افزونهٔ آماده به‌کار سرد | افزونهٔ آماده به‌کار گرم | افزونهٔ آماده به‌کار داغ |
|---|---|---|---|---|
| ۶ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰,...,۵ |
| | ۲ | ۰ | ۰ | ۰,...,۴ |
| | ۳ | ۰ | ۰ | ۰,...,۳ |
| | ۴ | ۰ | ۰ | ۰,۱,۲ |
| | ۵ | ۰ | ۰ | ۰,۱ |
| ۱۲ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰,...,۱۱ |
| | ۲ | ۰ | ۰ | ۰,...,۱۰ |
| | ۴ | ۰ | ۰ | ۰,...,۸ |
| | ۶ | ۰ | ۰ | ۰,...,۶ |
| | ۷ | ۰ | ۰ | ۰,...,۵ |
| | ۱۰ | ۰ | ۰ | ۰,۱,۲ |
| | ۱۱ | ۰ | ۰ | ۰,۱ |

## ۳. نتیجه گیری

در این مقاله، اهمیت زمان تخصیص افزونهٔ آماده به‌کار G سیستم تنش-مقاومت k از n و تاثیر آن روی قابلیت تنش-مقاومت و هزینه‌های سیستم در مدل $H-$ وایبول مورد بررسی قرار گرفت. همچنین، رفتار تابع هزینه براساس پارامترهای مدل $H-$ وایبول مورد مطالعه قرار گرفت. زمان بهینه برای اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به عملکرد سیستم در یک G سیستم تنش-مقاومت k از n در مدل $H-$ وایبول ارائه شد.

براساس نتایج این مقاله، زمان افزودن مؤلفهٔ آماده به‌کار با هدف افزایش قابلیت اعتماد تنش-مقاومت به پارامترهای مدل $H-$وایبول وابسته است و با تغییر این پارامترها، زمان عوض می‌شود. ازطرفی، زمان اضافه کردن مؤلفهٔ آماده به‌کار به سیستم تنش-مقاومت در مدل با هدف افزایش میزان قابلیت اعتماد تنش-مقاومت و کاهش همزمان هزینه‌های سیستم نیز

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

علاوه‌بر اینکه به پارامترهای سیستم وابسته است به تعداد مؤلفه‌های سیستم و مقدار k وابسته خواهد بود. در هر صورت، می‌توان نتیجه گرفت برای مقادیر بزرگ n و k، زمان بهینهٔ اضافه کردن $m = 0$ است و برای مقادیر کوچک k و بزرگ n، این مقدار معمولاً مقدار $m = n - k$ است و براساس فاصلهٔ مقادیر n و k از یکدیگر مقدار m قابل تغییر خواهد بود.

## References


1. X. Bai, X. Li, N. Balakrishnan and M. He, Statistical inference for dependent stress-strength reliability of multi-state system using generalized survival signature, Journal of Computational and Applied Mathematics, **390** (2021), 113316.

2. X. Bai, Y. Shi, Y. Liu and B. Liu, Reliability estimation of multicomponent stress-strength Computational and model based on copula function under progressively hybrid censoring, Journal of Applied Mathematics, **344** (2018), 100–114.

3. X. Bai, Y. Shi, Y. Liu and B. Liu, Reliability inference of stress-strength model for the truncated proportional hazard rate distribution under progressively Type-II censored samples, Applied Mathematical Modelling, **65** (2019a), 377–389.

4. X. Bai, Y. Shi, Y. Liu and B. Liu, Reliability estimation of stress-strength model using finite mixture distributions under progressively interval censoring, Journal of Computational and Applied Mathematics, **348** (2019b), 509–524.

5. M. Bourguignon, R. B. Silva and G. M. Cordeiro, The Weibull-G family of probability distributions, Journal of Data Science, **12** (2014), 53–68.

6. T.-C. Chen and P.-S. You, Immune algorithms-based approach for redundant reliability problems with multiple component choices, Computers in Industry, **56** (2005), 195–205.

7. S. Eryilmaz, Consecutive k-out-of-n: G system in stress-strength setup, Communications in Statistics-Simulation and Computation, **37** (2008), 579–589.

8. S. Eryilmaz, A New Perspective to stress-strength models, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, **63** (2011), 101–115.

9. M. Finkelstein, On statistical and information-based virtual age of degrading systems, Reliability Engineering & System Safety, **92** (2007), 676–681.

10. M. Gen and Y. Yun, Soft computing approach for reliability optimization: State-of-the-art survey, Reliability Engineering and System Safety, **91** (2006), 1008–1026.

11. T.-J. Hsieh and W.-C. Yeh, Penalty guided bees search for redundancy allocation problems with a mix of components in series–parallel systems, Computers & Operations Research, **39** (2012), 2688–2704.

12. W. Kuo and R. Wan, Recent advances in optimal reliability allocation. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics- Part A: Systems and Humans, **37** (2007), 143–156.


[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]

13. G. Levitin, L. Xing and Y. Dai, Sequencing optimization in k-out-of-n cold-standby systems considering mission cost, International Journal of General Systems, **42** (2013), 870-882.

14. H. Li and X. Li, Stochastic orders in reliability and risk, In honor of professor Moshe Shaked. New York: Springer, 2013.

15. X. Ling and P. Li, Stochastic comparisons for the number of working components of a system in random environment, Metrika, **76** (2013), 1017–1030.

16. Y. Liu, Y. Shi, X. Bai and P. Zhan, Reliability estimation of a N-M-cold-standby redundancy system in a multicomponent stress–strength model with generalized half-logistic distribution, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **490** (2018), 231–249.

17. J. Onishi, S. Kimura, R. J. W. James and Y. Nakagawa, Solving the redundancy allocation problem with a mix of components using the improved surrogate constraint method, IEEE Transactions on Reliability, **56** (2007), 94–101.

18. M. Ouzineb, M. Nourelfath and M. Gendreau, An efficient heuristic for reliability design optimization problems, Computers & Operations Research. **37** (2010), 223–235.

19. Z. Pakdaman and J. Ahmadi, Some results on the stress-strength reliability under the distortion functions, International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, **5** (2018), 1850028.

20. Z. Pakdaman and J. Ahmadi, Switching time of the standby component to the k-out-of-n: G system in the stress-strength setup, Metrika, **82** (2019), 225–248.

21. Z. Pakdaman, J. Ahmadi and M. Doostparast, Signature-based approach for stress-strength systems, Statistical Papers, **60** (2019), 1631–1647.

22. J. She and M. G. Pecht, Reliability of a k-out-of-n warm-standby system, IEEE Transactions on Reliability, **41** (1992), 72–75.

23. K. C. Siju and M. Kumar, Estimation of stress-strength reliability of a parallel system with active, warm and cold standby components, Journal of Industrial and Production Engineering, **34** (2017), 590–610.

24. B. Soylu, and S. K. Ulusoy, A Preference ordered classification for a multi-objective max-min redundancy allocation problems, Computers & Operations Research, **38** (2011), 1855–1866.

25. P.-S. You and T.-C. Chen, An efficient heuristic for series-parallel redundant reliability problems, Computers & Operations Research, **32** (2005), 2117–2127.

26. L. Wang, X. Zuo, Y. M. Tripathi, and J. Wang, Reliability analysis for stress-strength model from a general family of truncated distributions under censored data, Communications in Statistics-Theory and Methods, **49** (2020), 3589–3608.

27. K. Zografos and N. Balakrishnan, On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference, Statistical Methodology, **6** (2009), 344–362.

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12 ]