Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Trace Ideals and Maximal Cohen-Macaulay Modules Over a Gorenstein Local Ring

M. Bagherpour [1], **A. Taherizadeh** [2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran.
   E-mail: bagherpour.mohammad.2019@gmail.com
2. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran. E-mail: taheri@khu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 28 November 2022
Received in revised form: 24 February 2023
Accepted: 4 April 2023
Published online: 29 February 2024

Keywords:
commutative Noetherian ring,
semidualizing module,
trace ideal,
Gorenstein ring,
Maximal Cohen-Macaulay module,
projective module,
free module,
tensor product,
canonical module,
Bass class.

ABSTRACT

Introduction

All rings throughout this paper are commutative and Noetherian. Semidualizing modules were studied independently by Foxby [4], Golod [5], and Vasconcelos [11]. A finite R-module C is called semidualizing if the natural homothety map $\chi_C^R: R \to Hom_R(C,C)$ is an isomorphism and $Ext_R^i(C,C) = 0$ for all $i > 0$. If a semidualizing R-module has finite injective dimension, it is called dualizing and is denoted by D. The ring itself is an example of a semidualizing R-module. Many researchers, in particular Sather-Wagstaff [12], have studied the semidualizing modules.
Let M be an R-module. The trace ideal of M, denoted by $tr_R(M)$, is the sum of images of all homomorphisms from M to R. Trace ideals have attracted the attention of many researchers in recent years. In particular, Herzog et al. [6] and Dao et al. [3] studied the trace ideals of canonical modules. Also, the trace ideals of semidualizing modules were studied in [1].
In this paper, we study the trace ideals of tensor product of two arbitrary modules. We prove some known facts with a different approach via trace ideals. For example, let C and C' be two semidualizing R-modules. We show that $C \otimes_R C'$ is projective if and only if C and C' are projective R-modules of rank 1. Also, we study the trace ideals of maximal Cohen-Macaulay modules over a Gorenstein local ring.

Material and Methods

The content of this paper is organized as follows. First, we present some definitions, lemmas, and basic results that will be used in the proofs of our theorems. Then, we use the trace ideals of modules for proving the results.

Results and discussion

The main objectives of this article are as follows: studying the trace ideals of tensor product of projective modules, proving some known facts with a different approach via trace ideals, generalizing some results about semidualizing modules, and discussing trace ideals of maximal Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings.

Conclusion

First, we prove the following Proposition.

Proposition 1: Let M, N be two arbitrary R-modules. Then $tr_R(M \otimes N) = R$ if and only if $tr_R(M) = R$ and $tr_R(N) = R$.

In the following, using Proposition 1, we prove the next known fact with a different approach via trace ideals.

Proposition 2: Let M and N be two finitely generated R-modules. If $M \otimes_R N$ is a non-zero free R-module, then M and N are projective and $tr_R(M) = tr_R(N) = R$.

From Proposition 2, we can prove the following corollary for the tensor product of two semidualizing modules with a different approach.

Corollary 3: Suppose that C and C' are two semidualizing R-modules. Then $C \otimes_R C'$ is projective if and only if C and C' are projective R-modules of rank 1.

Also, in the following proposition, we give new proof and generalize some parts of Corollary 4.1.6 [1۲] via trace ideals.

Proposition 4: Let C be a semidualizing R-module. Then $B_C(R)$ (Bass class) contains a finitely generated projective R-module M such that $Supp_R(M) = Spec(R)$ if and only if C is a projective R-module of rank 1.

Moreover, we prove the following theorem about the trace ideals of maximal Cohen-Macaulay modules over a Gorenstein local ring.

Theorem 5: Let (R, m) be a Gorenstein local ring of dimension d and M be a maximal Cohen-Macaulay R-module. Let $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ be an R-sequence. Then $tr_R(M) = R$ if and only if $tr_{R/XR}(M/XM) = R/XR$.

At the end of this paper, using theorem 5, we prove the next corollary.

Corollary 6: Let (R, m) be a Gorenstein local ring and M be a maximal Cohen-Macaulay R-module. Let $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ be an R-sequence. Then there exists a finitely generated R-module N such that $M \cong R \oplus N$ if and only if there exists a finitely generated R/XR-module $\overline{N}$ such that $M/XM \cong R/XR \oplus \overline{N}$.

How to cite: Bagherpour. Mohammad., Taherizadeh, Abdoljavad., (2023). Trace ideals and maximal Cohen-Macaulay modules over a Gorenstein local ring. *Mathematical Researches*, 9 (4), 111 – 121.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ایده‌آل‌های اثر و مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال روی یک حلقهٔ گرنشتاین

محمد باقرپور[۱] ✉، عبدالجواد طاهری‌زاده[۲]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: bagherpour.mohammad.2019@gmail.com
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: taheri@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله به بررسی ایده‌آل‌های اثر از ضرب تانسوری دو مدول می‌پردازیم. همچنین برخی از نتایج شناخته شده را به کمک ایده‌آل‌های اثر تعمیم و برای برخی دیگر اثبات جدید ارائه می‌کنیم. علاوه بر این، بررسی ایده‌آل‌های اثر از مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال روی حلقه‌های گرنشتاین جزو اهداف این مقاله است.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۹/۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۲/۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱/۱۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
حلقهٔ جابه‌جایی نوتری،
ایده‌آل اثر،
مدول نیم‌دوگانی،
حلقهٔ گرنشتاین،
مدول کوهن-مکالی ماکسیمال،
کلاس باس،
مدول متعارف،
مدول پروژکتیو،
مدول آزاد.

استناد: باقرپور، محمد؛ طاهری‌زاده، عبدالجواد؛ (۱۴۰۲). ایده‌آل‌های اثر و مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال روی یک حلقهٔ گرنشتاین. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۱۱۱ – ۱۲۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در سراسر این مقاله، R یک حلقهٔ جابه‌جایی نوتری با عضو همانی ناصفر است. مطالعهٔ مدول‌های نیم‌دوگانی روی حلقه‌های جابه‌جایی و نوتری توسط فاکسبی [۴]، گُلد [۵] و واسکانسلوس [۱۱] مستقل از هم (با نام‌های متفاوت) آغاز شد. مدول‌های نیم‌دوگانی توسط محققین زیادی مطالعه شده است. به عنوان نمونه می‌توانید مرجع [۱۲] را ببینید.

همچنین ایده‌آل‌های اثر از مدول‌ها مورد توجه بسیاری از محققین در سال‌های اخیر قرار گرفته است. به عنوان نمونه، هرزوگ و همکاران [۶] و همچنین دائو و همکاران [۳] ایده‌آل‌های اثر از مدول‌های متعارف را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین در منبع [۱] ایده‌آل‌های اثر از مدول‌های نیم‌دوگانی مورد مطالعه قرار گرفتند. توصیه می‌شود برای درک بهتر ایده‌آل‌های اثر به منبع [۷] مراجعه نمایید.

در این مقاله، ابتدا برخی از نتایج شناخته شده را با روشی جدید به کمک ایده‌آل‌های اثر ثابت می‌کنیم. به عنوان نمونه ثابت می‌کنیم که اگر ضرب تانسوری دو مدول یک مدول آزاد شود، آن‌گاه هر دو مدول پروژکتیو هستند. همچنین با استفاده از ایده‌آل‌های اثر ثابت می‌کنیم که اگر ضرب تانسوری دو مدول نیم‌دوگانی مدولی پروژکتیو شود، آن‌گاه هر دو مدول، مدولی پروژکتیو با رتبهٔ ۱ هستند. علاوه بر این، بعضی از ویژگی‌های مدول‌های نیم‌دوگانی را با استفاده از ایده‌آل‌های اثر تعمیم می‌دهیم. قضیهٔ اصلی این مقاله، به بررسی ایده‌آل‌های اثر مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال روی یک حلقهٔ موضعی گرنشتاین می‌پردازد.

۱. تعاریف و پیش نیازها

تعریف ۱٫۱. فرض کنید C یک R-مدول باشد. نگاشت تجانس طبیعی به صورت $\mathcal{X}_C^R: R \to Hom_R(C,C)$ نشان داده می‌شود. R-مدول متناهی‌مولد C را نیم‌دوگانی می‌نامند هرگاه $\mathcal{X}_C^R$ یکریختی باشد و برای هر $i > 0$ داشته باشیم $Ext_R^i(C,C) = 0$. برای نمونه خود حلقهٔ R یک R-مدول نیم‌دوگانی است.

در ادامه برخی از قضایای مورد نیاز در زمینهٔ مدول‌های نیم‌دوگانی را برای راحتی خواننده ذکر می‌کنیم.

گزاره ۲٫۱. [۱۲، گزارهٔ ۶٫۱٫۲] فرض کنید C یک R-مدول نیم‌دوگانی باشد. در این‌صورت

۱) $supp_R(C) = spec(R)$ و $Ass_R(C) = Ass_R(R)$.

۲) $ann_R(C) = 0$ و $dim_R(C) = dim(R)$.

گزاره ۳٫۱. [۱۲، گزارهٔ ۳٫۲٫۲] فرض کنید C یک R-مدول متناهی‌مولد باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادل هستند:

۱. C یک R-مدول نیم‌دوگانی است.

۲. برای هر ایده‌آل اول p از R، C_p یک R_p مدول نیم‌دوگانی است.

۳. برای هر ایده‌آل ماکسیمال m از R، C_m یک R_m مدول نیم‌دوگانی است.

نتیجه ۴،۱. [۱۲، نتیجهٔ ۸،۲،۲] فرض کنید C یک R–مدول نیم‌دوگانی با بعد پروژکتیو متناهی باشد. در این صورت C یک مدول پروژکتیو با رتبهٔ ۱ است.

گزاره ۵،۱. [۱۰، گزارهٔ ۲،۲] فرض کنید (R, m) یک حلقهٔ موضعی و C یک R–مدول نیم‌دوگانی باشد. در این صورت C تجزیه‌ناپذیر است.

تعریف ۶،۱. فرض کنید M و N دو R-مدول باشند. نگاشت ارزیابی طبیعی $\xi_N^M: M \otimes_R Hom_R(M, N) \to N$، که به صورت $\xi_N^M(m \otimes_R \psi) = \psi(m)$ ($m \in M$ و $\psi \in Hom_R(M, N)$) تعریف می‌شود، یک R-همریختی است. فرض کنید V یک R-مدول متناهی‌مولد باشد. کلاس باس $B_V(R)$ یک کلاس از همهٔ R-مدول‌هایی مانند M است به‌طوری‌که ξ_M^V یکریختی باشد و برای هر $i > 0$، $Ext_R^i(V, M) = 0 = Tor_i^R\big(V, Hom_R(V, M)\big)$.

تعریف ۷،۱. فرض کنید M یک R–مدول باشد. در این صورت ایده‌آل اثر از M با نماد $tr_R(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$tr_R(M) = \sum_{\varphi \in Hom_R(M,R)} \varphi\,(M).$$

در ادامه برخی از قضایا و نتایج دربارهٔ ایده‌آل‌های اثر که در بخش‌های بعدی به آن‌ها نیاز است را ذکر می‌کنیم.

گزاره ۸،۱. [۷، گزارهٔ ۸،۲ قسمت (viii)] فرض کنید M یک R–مدول متناهی‌مولد باشد. در این صورت برای هر $p \in Spec(R)$ داریم $tr_R(M)R_p = tr_{R_p}\big(M_p\big)$.

گزاره ۹،۱. [۶، گزارهٔ ۳،۱] فرض کنید M و N دو R–مدول دلخواه باشند. در این صورت

$$tr_R(M)tr_R(N) \subseteq tr_R(M \otimes N) \subseteq tr_R(M) \cap tr_R(N).$$

گزاره ۱۰،۱. [۱، گزارهٔ ۴،۳] فرض کنید C یک R–مدول نیم‌دوگانی باشد. در این صورت $tr_R(C) = R$ اگر و تنها اگر C یک R–مدول پروژکتیو متناهی‌مولد از رتبهٔ ۱ باشد.

گزارهٔ شناخته شدهٔ زیر را برای راحتی خواننده ذکر و ثابت می‌کنیم.

گزاره ۱۱،۱. فرض کنید (R, m) یک حلقهٔ موضعی و M یک R–مدول دلخواه باشد. اگر $tr_R(M) = R$، آن‌گاه یک R–همریختی پوشا مانند $\varphi: M \to R$ وجود دارد. علاوه بر این، اگر M تجزیه‌ناپذیر باشد، آن‌گاه هر R–همریختی پوشا $\varphi: M \to R$ یکریختی است. به ویژه $M \cong R$.

اثبات: ابتدا فرض کنید $tr_R(M) = R$. پس R–همریختی‌های $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in Hom_R(M, R)$ و اعضای $x_1, x_2, \dots, x_n$ از M وجود دارند، به‌طوری‌که $\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots + \varphi_n(x_n) = 1_R$. چون حلقه موضعی است، پس حداقل یک i وجود دارد به‌طوری‌که $\varphi_i(x_i) \notin m$. یعنی $\varphi_i(x_i)$ یک عنصر یکه از حلقهٔ R است. لذا φ_i یک R–همریختی پوشا است.

حال فرض کنید یک R–همریختی پوشا مانند $\varphi: M \to R$ وجود داشته باشد و M نیز یک R–مدول تجزیه‌ناپذیر باشد. چون R به عنوان R–مدول آزاد است، پس همریختی φ شکافته می‌شود. لذا یک R–مدول مانند N وجود دارد به‌طوری‌که $M \cong R \oplus N$. با توجه به تجزیه‌ناپذیر بودن M خواهیم داشت $N = 0$ و در نتیجه $M \cong R$. ■

در ادامهٔ مقاله به لم زیر نیاز داریم.

لم ۱۲,۱. [۱، لم ۱۳,۴] فرض کنید M یک R–مدول دلخواه و $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ یک دنباله از عناصر R در $tr_R(M)$ باشد. در این صورت خواهیم داشت $tr_R(M)/XR \subseteq tr_{R/XR}(M/XM)$.

تعریف ۱۳,۱. فرض کنید (R, m) یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی باشد. در این صورت R–مدول کوهن-مکالی ماکسیمال مانند K از نوع ۱ را که دارای بعد انژکتیو متناهی است، مدول متعارف می‌نامیم.

بر اساس قضیهٔ ۴,۳,۳ از منبع [۲] می‌دانیم مدول متعارف تحت یکریختی یکتا است. فرض کنید مدول متعارف برای حلقهٔ R وجود داشته باشد. ما یک انتخاب از مدول‌های متعارف برای R را با نماد ω_R نشان خواهیم داد.

قضیه ۱۴,۱. [۲، قضیهٔ ۷,۳,۳] فرض کنید (R, m) یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی باشد. در این صورت R گرنشتاین است اگر و تنها اگر $R \cong \omega_R$.

قضیه ۱۵,۱. [۲، قضیهٔ ۱۰,۳,۳] فرض کنید (R, m) یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی با مدول متعارف ω_R باشد. اگر M یک R–مدول کوهن-مکالی ماکسیمال باشد، آن‌گاه برای هر $i > 0$ داریم $Ext_R^i(M, \omega_R) = 0$.

۲. نتایج اصلی

۱,۲. ایده‌آل‌های اثر و ضرب تانسوری مدول‌های پروژکتیو

در این قسمت از مقاله ابتدا برخی از قضایا و نتایج شناخته شده را با روش جدید و به کمک ایده‌آل‌های اثر ثابت می‌کنیم و برخی را نیز تعمیم می‌دهیم.

گزاره زیر را که در ادامهٔ مقاله به آن نیاز داریم ثابت می‌کنیم.

گزاره ۱٫۲. فرض کنید M و N دو R–مدول باشند. در این صورت $tr_R(M \otimes_R N) = R$ اگر و تنها اگر $tr_R(M) = R$ و $tr_R(N) = R$.

اثبات: فرض کنید $tr_R(M \otimes_R N) = R$. در این صورت بر اساس گزارهٔ ۹٫۱ خواهیم داشت:

$$R = tr_R(M \otimes_R N) \subseteq tr_R(M) \cap tr_R(N) \subseteq R.$$

بنابراین نتیجه می‌شود $tr_R(M) = R$ و $tr_R(N) = R$.

حال عکس مطلب را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $tr_R(M) = R$ و $tr_R(N) = R$. یک بار دیگر می‌توان از گزارهٔ ۹٫۱ استفاده کرد و نتیجه‌گیری زیر را انجام داد:

$$R = tr_R(M)tr_R(N) \subseteq tr_R(M \otimes_R N) \subseteq R.$$

با توجه به رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود $tr_R(M \otimes_R N) = R$. ■

گزارهٔ شناخته شدهٔ زیر را به کمک ایده‌آل‌های اثر به روشی جدید ثابت می‌کنیم.

گزاره ۲٫۲. فرض کنید (R, m) یک حلقهٔ موضعی و M و N دو R–مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند. در این صورت اگر $M \otimes_R N$ یک R–مدول آزاد باشد، آن‌گاه M و N دو R–مدول آزاد هستند.

اثبات: فرض کنید $M \otimes_R N$ یک R–مدول آزاد باشد. از آن‌جایی‌که M و N دو R–مدول متناهی‌مولد هستند، پس می‌توان آن‌ها را به صورت جمع مستقیم متناهی از مدول‌های تجزیه‌ناپذیر نوشت (به گزارهٔ ۴۷٫۴ منبع [۹] مراجعه کنید). بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ و $N \cong \bigoplus_{j=1}^{t} N_j$ که به ازای هر i و هر j، M_iها و N_jها R–مدول‌هایی تجزیه‌ناپذیر هستند. پس نتیجه می‌شود $M \otimes_R N \cong \bigoplus_{i,j} \left(M_i \otimes_R N_j\right)$. از آن‌جایی‌که حلقه موضعی و $M \otimes_R N$ یک R–مدول آزاد در نظر گرفته شده است، پس برای هر i و j مدول $M_i \otimes_R N_j$ مدولی آزاد ناصفر است. در نتیجه $tr_R\left(M_i \otimes_R N_j\right) = R$. بنابر گزاره ۱٫۲ داریم $tr_R(M_i) = R$ و $tr_R\left(N_j\right) = R$. اکنون بر اساس گزارهٔ ۱۱٫۱ برای هر i و هر j، خواهیم داشت $M_i \cong R$ و $N_j \cong R$. در نتیجه M و N دو R–مدول آزاد هستند. ■

قضیه ۳٫۲. فرض کنید M و N دو R–مدول متناهی‌مولد باشند. در این صورت اگر $M \otimes_R N$ یک R–مدول آزاد ناصفر باشد، آن‌گاه M و N دو R–مدول پروژکتیو هستند. همچنین $tr_R(M) = R = tr_R(N)$.

اثبات: فرض کنید $p \in Spec(R)$. می‌دانیم $(M \otimes_R N)_p \cong M_p \otimes_{R_p} N_p$. با توجه به مفروضات قضیه نتیجه می‌شود $M_p \otimes_{R_p} N_p$ یک R_p–مدول آزاد و ناصفر است. لذا بنابر گزارهٔ ۲٫۲ نتیجه می‌شود که M_p و N_p دو R_p–مدول متناهی‌مولد ناصفر آزاد می‌باشند. بنابراین M و N دو R–مدول پروژکتیو هستند (از نتیجهٔ ۴۰٫۷ منبع [۹] استفاده کنید).

حال قسمت دوم را ثابت می‌کنیم. از آنجاکه $M \otimes_R N$ یک R–مدول آزاد ناصفر در نظر گرفته شده است، پس به‌راحتی نتیجه می‌شود $tr_R(M \otimes_R N) = R$. حال با استفاده از گزاره ۱,۲ خواهیم داشت $tr_R(M) = R = tr_R(N)$. ■

نتیجه ۴,۲. فرض کنید M و N دو R–مدول متناهی‌مولد باشند به‌طوری‌که $Supp_R(M) = Supp_R(N) = Spec(R)$. در این صورت اگر $M \otimes_R N$ یک R–مدول پروژکتیو باشد، آن‌گاه M و N دو R–مدول پروژکتیو هستند. همچنین

$$tr_R(M) = tr_R(N) = R.$$

اثبات: فرض کنید $p \in Spec(R)$. با توجه به مفروضات $M_p \neq 0 \neq N_p$. از آن‌جاکه R_p حلقه‌ای موضعی است خواهیم داشت $M_p \otimes_{R_p} N_p \neq 0$. همچنین می‌دانیم $M_p \otimes_{R_p} N_p \cong (M \otimes_R N)_p$. پس می‌توان نتیجه گرفت $M_p \otimes_{R_p} N_p$ یک R_p–مدول آزاد و ناصفر است. از این رو، قضیهٔ ۳,۲ ایجاب می‌کند که M_p و N_p دو R_p–مدول آزاد می‌باشند و همچنین خواهیم داشت $tr_{R_p}(M_p) = tr_{R_p}(N_p) = R_p$. لذا بنابر نتیجهٔ ۴۰,۷ منبع [۹]، M و N دو R–مدول پروژکتیو هستند.

حال با برهان خلف ثابت می‌کنیم $tr_R(M) = R$. فرض کنید چنین نباشد و یک ایده‌آل ماکسیمال مانند m از حلقهٔ R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $tr_R(M) \subseteq m$. در این صورت، بنابر گزارهٔ ۸,۱ خواهیم داشت

$$mR_m \supseteq tr_R(M)R_m = tr_{R_m}(M_m).$$

ولی ما برای هر $p \in Spec(R)$ ثابت کردیم $tr_{R_p}(M_p) = R_p$. پس خواهیم داشت $tr_{R_m}(M_m) = R_m$ و این تناقض است. پس فرض خلف باطل است و $tr_R(M) = R$. به طریق مشابه ثابت می‌شود $tr_R(N) = R$. ■

می‌توان با استفاده از قضایای بالا نتیجهٔ زیر را برای حاصل‌ضرب تانسوری مدول‌های نیم‌دوگانی ثابت کرد.

نتیجه ۵,۲. فرض کنید C و C' دو R–مدول نیم‌دوگانی باشند. در این صورت $C \otimes_R C'$ یک R–مدول پروژکتیو است اگر و تنها اگر C و C' دو R–مدول پروژکتیو با رتبهٔ ۱ باشند.

اثبات: با توجه به گزارهٔ ۲,۱ و نتیجهٔ ۴,۲ خواهیم داشت $tr_R(C) = tr_R(C') = R$. لذا بر اساس گزارهٔ ۷,۱ نتیجه می‌شود C و C' دو R–مدول پروژکتیو با رتبهٔ ۱ هستند. اثبات طرف دیگر واضح است. ■

گزاره زیر تعمیم جزیی برای برخی از قسمت‌های نتیجهٔ ۶,۱,۴ منبع [۱۲] است.

گزاره ۶,۲. فرض کنید C یک R–مدول نیم‌دوگانی باشد. در این صورت C پروژکتیو با رتبهٔ ۱ است اگر و تنها اگر $B_C(R)$ شامل یک R–مدول متناهی‌مولد پروژکتیو مانند M با ویژگی $Supp_R(M) = Spec(R)$ باشد.

اثبات: فرض کنید C به عنوان R–مدول پروژکتیو با رتبهٔ ۱ باشد. از آنجاکه C متعلق به $B_C(R)$ است و بنابر گزارهٔ ۲,۱ $Supp_R(C) = Spec(R)$، لذا کافی است M را همان C در نظر بگیریم.

حال فرض کنید M یک R–مدول متناهی‌مولد پروژکتیو در $B_C(R)$ باشد به‌طوری‌که $Supp_R(M) = Spec(R)$. در این صورت با توجه به تعریف کلاس باس خواهیم داشت $M \cong C \otimes_R Hom_R(C, M)$. حال فرض کنید $p \in Spec(R)$. می‌توان نتیجه گرفت $0 \neq M_p \cong C_p \otimes_{R_p} \left(Hom_R(C, M)\right)_p$. با توجه به آن‌چه در مورد M فرض شد، خواهیم داشت M_p یک R_p–مدول آزاد ناصفر است، لذا بنابر گزارهٔ ۲,۲ نتیجه می‌شود C_p یک R_p–مدول آزاد است. بنابر گزارهٔ ۳,۱ می‌دانیم C_p به عنوان R_p–مدول نیم‌دوگانی است و همچنین بنابر گزارهٔ ۵,۱ می‌دانیم C_p به عنوان R_p-مدول تجزیه‌ناپذیر است. پس می‌توان نتیجه گرفت $C_p \cong R_p$. این نتیجه می‌دهد C به عنوان R–مدول پروژکتیو با رتبهٔ ۱ می‌باشد (به گزارهٔ ۳,۴,۱ منبع [۲] مراجعه کنید). این مطلب اثبات را کامل می‌کند. ■

۲,۲ . ایده‌آل‌های اثر از مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال روی حلقه‌های گرنشتاین

در این قسمت از مقاله به بررسی ایده‌آل‌های اثر مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال روی حلقه‌های گرنشتاین می‌پردازیم. جهت یادآوری تعاریف و خواص حلقه‌های گرنشتاین به منبع [۸] مراجعه نمایید.

ابتدا قضیهٔ زیر را برای مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال روی حلقه‌های گرنشتاین ثابت می‌کنیم.

قضیه ۷,۲. فرض کنید (R, m) یک حلقهٔ موضعی گرنشتاین و M یک R–مدول کوهن-مکالی ماکسیمال باشد. همچنین فرض کنید $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ یک R–رشتهٔ منظم باشد. در این‌صورت $tr_R(M) = R$ اگر و تنها اگر $tr_{R/XR}(M/XM) = R/XR$.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم $tr_R(M) = R$. بر اساس لم ۱۲,۱ نتیجه می‌شود

$$R/XR = tr_R(M)/XR \subseteq \ tr_{R/XR}(M/XM) \subseteq R/XR.$$

پس خواهیم داشت $tr_{R/XR}(M/XM) = R/XR$.

حال فرض کنید $tr_{R/XR}(M/XM) = R/XR$. در این‌صورت $1_{R/XR} \in tr_{R/XR}(M/XM)$. بنابراین R/XR-همریختی‌هایی مانند $h_1, h_2, \dots h_3 \in Hom_{R/XR}(M/XM, R/XR)$ و همچنین عناصری متعلق به R/XR–مدول M/XM مانند $b_1 + XM, b_2 + XM, \dots, b_t + XM$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$h_1(b_1 + XM) + h_2(b_2 + XM) + \cdots + h_t(b_t + XM) = 1_R + XR.$$

از آن‌جاکه بر اساس فرض قضیه حلقه موضعی گرنشتاین است لذا بر اساس قضیهٔ ۱۴،۱ خواهیم داشت $R \cong \omega_R$. بنابراین از قضیهٔ ۱۵،۱ نتیجه می‌شود برای هر $i > 0$ داریم $Ext_R^i(M,R) = 0$. از این‌رو، بر اساس گزارهٔ ۳،۳،۳ منبع [۲] می‌توان نتیجه گرفت که یکریختی زیر موجود است

$$\theta: Hom_R(M,R)/\big(XHom_R(M,R)\big) \xrightarrow{\cong} Hom_{R/XR}(M/XM, R/XR).$$

بنابراین برای هر $i \in \{1,2,\dots,t\}$ یک R-همریختی مانند $\psi_i \in Hom_R(M,R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\theta(\overline{\psi_i}) = h_i$، که درآن

و برای هر $\overline{\psi_i} \in Hom_R(M,R)/\big(XHom_R(M,R)\big)$ و برای هر $m + XM \in M/XM$ داریم

$$\theta(\overline{\psi_i})(m + XM) = \psi_i(m) + XR.$$

بنابراین $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\psi_1(b_1) + \psi_2(b_2) + \cdots + \psi_t(b_t) = 1_R - (r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n).$$

از آن‌جا که $r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \in m$ نتیجه می‌شود $\psi_1(b_1) + \psi_2(b_2) + \cdots + \psi_t(b_t)$ عنصر یکه در R است. پس ایده‌آل $tr_R(M)$ از R شامل عنصر یکه است، لذا $tr_R(M) = R$. ■

نتیجه ۸،۲. فرض کنید (R,m) یک حلقهٔ موضعی گرنشتاین و M یک R–مدول ماکسیمال کوهن–مکالی باشد. همچنین فرض کنید $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ یک R–رشتهٔ منظم باشد. در این صورت یک R–مدول متناهی‌مولد مانند N وجود دارد به‌طوری‌که $M \cong R \oplus N$ اگر و تنها اگر یک R/XR–مدول متناهی‌مولد مانند $\overline{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M/XM \cong R/XR \oplus \overline{N}$.

اثبات: ابتدا فرض کنید یک R/XR–مدول متناهی‌مولد مانند $\overline{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که $M/XM \cong R/XR \oplus \overline{N}$. در این صورت یک R/XR-همریختی پوشا مانند $\varphi: M/XM \to R/XR$ وجود دارد. لذا نتیجه می‌شود که

$$R/XR = tr_{R/XR}(R/XR) \subseteq tr_{R/XR}(M/XM) \subseteq R/XR.$$

لذا $tr_{R/XR}(M/XM) = R/XR$. حال طبق قضیهٔ ۷،۲ داریم $tr_R(M) = R$. از این‌رو، از گزارهٔ ۱۱،۱ نتیجه می‌شود یک R-همریختی پوشا مانند $h: M \to R$ وجود دارد. از آن‌جاکه R به عنوان R-مدول آزاد است پس h شکافته می‌شود. پس نتیجه می‌شود که R–مدول متناهی‌مولد مانند N وجود دارد به‌طوری‌که $M \cong R \oplus N$. عکس مطلب به وضوح برقرار است. .....■

قدردانی: از سردبیر و داوران نشریه به خاطر پیشنهادهای ارزشمندشان درجهت بهبود مقاله تشکر می‌کنیم.

References

1. M. Bagherpoor and A. Taherizadeh, Trace ideals of semidualizing modules and two generalizations of nearly Gorenstein rings, Comm. Algebra, **51** (2023), 446-463.
2. W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, Revised Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
3. H. Dao, T. Kobayashi and R. Takahashi, Trace ideals of canonical modules, annihilators of Ext modules, and classes of rings close to being Gorenstein, J. Pure Appl. Algebra, **225**.9 (2021), 106655.
4. H. B. Foxby, Gorenstein modules and related modules, Math. Scand., **31**.2 (1972), 267-284.
5. E. S. Golod, G-dimension and generalized perfect ideals, Trudy Mat. Inst. Steklov., **165** (1984), 62-66.
6. J. Herzog, T. Hibi and D. I. Stamate, The trace of the canonical module, Isr. J. Math., **233**.1 (2019), 133-165.
7. H. Lindo, Trace ideals and centers of endomorphism rings of module over commutative rings, J. Algebra, **482**.2 (2017), 102-130.
8. H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
9. J. J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Second Edition. New York: Springer, 2009.
10. R. Takahashi, Syzygy modules with semidualizing or G-projective summands, J. Algebra, **295**.1 (2006), 179-194.
11. W.V. Vasconcelos, Divisor theory in module categories, Vol. 14. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 1974.
12. S. Sather-Wagstaff, Semidualizing Modules, 2009: http://ssather.people.clemson.edu/DOCS/sdm.pdf