Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

A Collocation Method for Solving Nonlinear Delay Fractional Optimal Control Systems with Constraint on the State and Control Variables

H. R. Marzban[1] ✉, **A. Nezami**[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.
   ✉ E-mail: hmarzban@iut.ac.ir
2. Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran. E-mail: a.nezami@math.iut.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 9 January 2023
Received in revised form: 13 March 2023
Accepted: 17 April 2023
Published online: 29 February 2024

Keywords:
Fractional optimal control problems,
Nonlinear time-delay systems,
Caputo derivative,
collocation method,
Inequality constraints.

ABSTRACT

Introduction

Fractional optimal control problems (FOCPs) have received considerable attention among researchers due to their extensive applications arising in various fields of science and engineering. The dynamical behavior of many complex physical systems and real-world phenomena can be described by fractional-order differential equations such as image processing, signal processing, robotics, mechanical systems, chemical reactions, water pollution, biological patterns, biomedical, and financial economics. In this research, an important class of delay fractional optimal control problems with inequality constraints on the input and output functions is examined. More precisely, we study the following fractional optimal control problem:

$$\min \qquad J\big(X(t),U(t)\big) = \mathcal{B}\big(X(1)\big) + \int_0^1 \mathcal{A}(X(t),U(t),t)\,dt,$$

subject to the state equation given by

$$\mathbb{D}_\alpha X(t) = \mathcal{C}(X(t),X(t-\tau_x),U(t),U(t-\tau_u),t), \qquad 0 \le t \le 1,$$

where $0 < \alpha \le 1$. The history functions and the path constraint are described below.

$$X(0) = X_0,$$

$$X(t) = \varphi(t), \qquad -\tau_x \le t < 0,$$

$$U(t) = \psi(t), \qquad -\tau_u \le t < 0,$$

$$\mathcal{E}(X(t),X(t-\tau_x),U(t),U(t-\tau_u),t) \le 0,$$

where X_0 is the initial condition of the system, $X(t)$ denotes the state vector and $U(t)$ represents the control vector. Additionally, $\mathbb{D}_\alpha$ shows the fractional Caputo derivative.

A novel spectral collocation technique is introduced by using the hybrid of block-pulse functions and fractional-order Legendre functions. The penalty function approach is employed to transform the inequality constraints on the state and control functions into equality ones. The fractional optimal control problems under discussion is converted into a static optimization one which can be solved by employing any well-established optimization procedure. The simulations results demonstrate the effectiveness and usefulness of the presented procedure.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

Material and Methods

In this paper, we introduce a new spectral collocation method to solve an important family of fractional optimal control problems including delay and constraints on the state and control variables. The proposed numerical scheme is based on the hybrid of block-pulse functions and fractional-order Legendre functions. The zeros of the fractional Legendre functions are selected as the collocation points. It is shown the devised collocation method is robust and provides accurate results.

Results and discussion

It is verified that the suggested framework can be considered as an effective tool for the investigation of various types of fractional-order systems. The accuracy and reliability of the new framework are demonstrated through investigating three benchmark control problems. The proposed procedure is easy to implement and provides accurate solutions. Although the proposed framework has some excellent features, it has two drawbacks described below.

- A drawback of the devised collocation method arises when the number of the block-pulse functions is sufficiently large. If the values of time delays corresponding to the system under discussion are small enough, then this issue might occur.
- If the order of the fractional system tends to zero, then developed procedure might be unstable. It is worth pointing out that in real-world applications, this issue occurs rarely.

Additionally, the convergence of the developed hybrid functions is established in the Hilbert and Sobolev spaces. The simulation results demonstrate the effectiveness and robustness of the developed numerical scheme.

Conclusion

A novel discretization scheme by employing a generalization of the fractional-order Legendre functions has been introduced to solve a challenging class of nonlinear fractional optimal control problems. The following results are obtained from this research:

- A new spectral collocation method has been introduced.
- A new fractional derivative operator related to the fractional hybrid functions has been constructed by utilizing the concept of the Caputo derivative.
- New theoretical results for the hybrid functions have been derived in the Hilbert space and the Sobolev space.

How to cite: Marzban, H. R., & Nezami, A. (2023). A collocation method for solving nonlinear delay fractional optimal control systems with constraint on the state and control variables. *Mathematical Researches*, 9 (4), 122 – 155.

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

یک روش هم‌مکانی برای حل سیستم‌های کنترل بهینه غیرخطی کسری تأخیری با محدودیت روی متغیرهای حالت و کنترل

حمیدرضا مرزبان[۱] ✉، عطیه نظامی[۲]

۱. نویسنده مسئول، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران. ✉ رایانامه: hmarzban@iut.ac.ir
۲. دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران. رایانامه: a.nezami@math.iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۱۹
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۲/۲۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱/۲۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

چکیده

در این تحقیق، یک روش عددی کارآمد برای حل یک کلاس از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری غیرخطی با محدودیت بر روی متغیرهای حالت و کنترل ارائه شده است. روش پیشنهادی مبتنی بر توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری است. با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی تأخیر و مشتق متناظر با توابع ترکیبی، مسأله کنترل بهینه اصلی به یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری تبدیل می‌شود. نتایج عددی، دقت و اعتبار روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی:
کنترل بهینه کسری غیرخطی تأخیری،
توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری،
عملگر مشتق کسری کاپوتو،
ماتریس عملیاتی مشتق،
ماتریس عملیاتی تأخیر،
روش هم مکانی.

استناد: مرزبان، حمیدرضا؛ و نظامی، عطیه (۱۴۰۲). یک روش هم‌مکانی برای حل سیستم‌های کنترل بهینه غیرخطی کسری تأخیری با محدودیت روی متغیرهای حالت و کنترل. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۱۲۲ – ۱۵۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.

CC BY NC

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

مقدمه

حسابان کسری یکی از شاخه‌های آنالیز ریاضی است که به بررسی و تحقیق در مورد خواص و کاربردهای انتگرال و مشتق توابع از مرتبه غیرصحیح می‌پردازد. ایده حسابان کسری از زمان شروع حسابان کلاسیک به وجود آمده است. در دو دهه گذشته، حسابان کسری در ریاضیات و علوم کاربردی، پیشرفت سریعی داشته است و امروزه به عنوان ابزاری مفید برای توصیف و مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی و مصنوعی به کار گرفته می‌شود. علاوه بر ریاضیات و فیزیک، در سایر علوم مانند مهندسی، زیست شناسی، پزشکی، مالی، اقتصادی، شیمی و غیره از حسابان کسری استفاده می‌شود. کاربرد حسابان کسری در سایر علوم به این دلیل است که مشتق و انتگرال‌های کسری، سیستم‌های پیچیده مهندسی و پدیده‌های فیزیکی را به طور دقیق‌تر نسبت به مشتق و انتگرال‌های از مرتبه صحیح، توصیف و تبیین می‌نماید [۱]-[۸]. بنابراین انواع مختلف معادلات دیفرانسیل کسری به یک موضوع مهم تبدیل شده است.

به طور کلی یک مسأله کنترل بهینه، یعنی کمینه و بیشینه کردن یک تابع هدف تحت دینامیک سیستم که متغیرهای حالت و کنترل روی یک مجموعه قابل قبول تعریف شده باشند. نظریه کنترل بهینه از مرتبه صحیح در مهندسی، علوم و بسیاری از زمینه‌های دیگر کاربرد دارند و محققان تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام داده‌اند. بررسی‌ها نشان می‌دهد که معادلات دیفرانسیل از مرتبه صحیح نمی‌توانند رفتار بسیاری از سیستم‌های پیچیده فیزیکی را توصیف نمایند؛ بنابراین نظریه کنترل بهینه کسری مطرح شده است. کاربرد این دسته از مسائل را می‌توان در شاخه‌های مختلف مهندسی، فیزیک، شیمی، اقتصاد، علوم زیستی و غیره یافت.

در حالت کلی، روش‌های موجود برای حل مسائل کنترل بهینه به دو دسته، روش مستقیم و روش غیرمستقیم تقسیم می‌شوند. در روش مستقیم، مسأله کنترل بهینه، گسسته‌سازی می‌شود و به یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری تبدیل می‌شود که با حل آن مسأله بهینه‌سازی پارامتری، تقریبی از جواب مسأله به دست می‌آید. در روش غیرمستقیم، اساس کار پیدا کردن جواب بر پایه یک مجموعه از شرایط لازم بهینگی می‌باشد که از اصل پونتریاگن به دست می‌آید.

در مسائل کنترل بهینه، استخراج شرایط لازم بهینگی در بسیاری از موارد با پیچیدگی همراه است و در غالب موارد نمی‌توان شرایط لازم بهینگی را به دست آورد. اما چالش مهم‌تر، حل معادلاتی است که از شرایط لازم بهینگی به دست می‌آید که در غالب موارد، به ویژه در سیستم‌های غیرخطی، نمی‌توان آن معادلات را حل کرد. برای حل معادلاتی که از شرایط لازم بهینگی به دست می‌آید، می‌توان از روش مستقیم استفاده کرد و یا از همان ابتدا، مسأله کنترل بهینه را با روش مستقیم و با استفاده از پایه‌های متعامد حل کرد.

در دو دهه اخیر، در زمینه نظریه کنترل بهینه کسری، تحقیقات گسترده‌ای انجام شده است. در سال ۲۰۰۴ آگروال، اولین کسی بود که مسائل کنترل بهینه کسری با مشتق کسری ریمان-لیوویل را مطرح کرد و برای آن پاسخی ارائه داد [۹] و تابع همیلتونی [۱۰] و معادلات اویلر لاگرانژ [۱۱] را مطرح کرد. اگر چه مسائل کنترل بهینه کسری دارای اهمیت می‌باشند و کاربردهای زیادی در علوم مختلف دارند، اما در حالت کلی حل تحلیلی و یافتن جواب‌های دقیق این مسائل بسیار دشوار و

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

در اغلب موارد غیرممکن است و جواب تحلیلی در دسترس نیست. بنابراین ارائه روش‌های موثر و کارا حائز اهمیت است.

در چند سال اخیر، در زمینه نظریه کنترل بهینه کسری مطالعات زیادی انجام شده است و برای حل این مسائل، روش‌های عددی گوناگونی ارائه شده است. به عنوان مثال، روش چندجمله‌ای‌های برنولی [۱۲]، چندجمله‌ای‌های بوباکر [۱۳]، روش توابع ترکیبی [۱۴]، موجک‌ها [۱۵]، روش شبه طیفی [۱۶] و روش شبکه‌های عصبی [۱۷]، ارائه شده است. در [۱۸]، انتگرال کسری در مسأله کنترل بهینه کسری، با سه روش سیمپسون، ذوزنقه‌ای و گرانوالد-لتنیکوف به صورت جداگانه تقریب زده شده است و مسأله کنترل با سه تقریب به صورت جداگانه حل و سپس نتایج با یکدیگر مقایسه شده است. هم‌چنین، حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری از مرتبه متغیر با روش موجک بسل مرتبه کسری [۱۹]، مسائل کنترل بهینه کسری با محدودیت مبتنی بر توابع چبیشف [۲۰]، مسائل کنترل بهینه غیرخطی کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنولی [۲۱]، مسائل کنترل بهینه کسری با زمان انتهایی آزاد [۲۲]، معادلات دیفرانسیل-انتگرال با مشتقات جزیی از مرتبه متغیر کسری [۲۳]، روش هم مکانی موجک‌های لژاندر [۲۴]، روش گالرکین و چندجمله‌ای‌های فیبونانچی [۲۵]، روش هم مکانی بی-اسپلاین‌ها [۲۶] و چندجمله‌ای‌های برنولی مرتبه کسری [۲۷] مطرح شده است.

دسته دیگری از مسائل کنترل بهینه، که توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است، مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری می‌باشد. اکثر پدیده‌های فیزیکی دارای رفتار غیرخطی وابسته به زمان با حضور عوامل تأخیری می‌باشند. تأخیرهای زمانی اغلب در سیستم‌های الکترونیکی، مکانیکی، بیولوژیکی، فرآیندهای شیمیایی، متالوژی، صنعتی، سیستم‌های حمل و نقل و در بسیاری از زمینه‌های دیگر نظیر مدل‌های مربوط به رشد اقتصادی و شبکه‌های عصبی رخ می‌دهند. به همین دلیل سیستم‌های تأخیر زمانی از اهمیت شایانی برخوردار می‌باشند. تا کنون روش‌های عددی گوناگونی برای حل سیستم‌های تأخیری ارائه شده است. به عنوان مثال، روش مبتنی بر چندجمله‌ای‌های برنولی [۲۸]، روش شبه طیفی [۲۹]، روش هم مکانی مبتنی بر توابع بلاک-پالس [۳۰]، توابع بوباکر از مرتبه کسری [۳۱]، توابع ترکیبی بلاک-پالس و موجک‌های چندگانه اسپلاین مکعبی هرمیت [۳۲]، توابع کلاهی بهبود یافته [۳۳] برای مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری ارائه شده است. هم‌چنین، می‌توان به روش شبه طیفی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری [۳۴]، حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال تأخیری فردهلم با ضرایب متغیر با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف [۳۵]، روش شبکه‌های عصبی با استفاده از توابع مونتس-لژاندر برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری با محدودیت‌های مساوی و نامساوی [۳۶]، روش شبکه‌های عصبی با استفاده از توابع چبیشف کسری برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری با مشتق کسری آتانگانا [۳۷] و یک روش عددی با استفاده از معادلات اویلر-لاگرانژ برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری [۳۸] اشاره کرد. در [۳۹]-[۴۱] روش‌های عددی موثر و گوناگون دیگری برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری و معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری ارائه شده است.

در این مقاله، یک کلاس از مسائل کنترل بهینه غیرخطی کسری تأخیری با محدودیت‌های نامساوی روی متغیرهای حالت و کنترل به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\min \qquad J\big(X(t),U(t)\big)=\mathcal{B}\big(X(1)\big)+\int_0^1 \mathcal{A}(X(t),U(t),t)\,dt, \tag{۱}$$

که دینامیک آن، معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbb{D}_\alpha X(t)=\ \mathcal{C}(X(t),X(t-\tau_x),U(t),U(t-\tau_u),t), \qquad 0\le t\le 1, \tag{۲}$$

با شرایط

$$X(0)=X_0, \tag{۳}$$

$$X(t)=\ \varphi(t), \qquad -\tau_x\le t<0, \tag{۴}$$

$$U(t)=\ \psi(t), \qquad -\tau_u\le t<0, \tag{۵}$$

$$\mathcal{E}(X(t),X(t-\tau_x),U(t),U(t-\tau_u),t)\le 0, \tag{۶}$$

که در آن

$$X(t)=\left[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_{l_1}(t)\right]^T, \tag{۷}$$

$$U(t)=\left[u_1(t),u_2(t),\cdots,u_{l_2}(t)\right]^T. \tag{۸}$$

در اینجا X_0، بیانگر شرط اولیه سیستم، $X(t)$، بردار حالت، $U(t)$، بردار کنترل و $\mathbb{D}_\alpha$، عملگر مشتق کسری کاپوتو می‌باشند که در آن $0<\alpha\le 1$. هم‌چنین

$$\mathcal{B}:\mathbb{R}^{l_1}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},$$

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^{l_1}\ \times\mathbb{R}^{l_2}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},$$

$$\mathcal{C}:\mathbb{R}^{l_1}\ \times\mathbb{R}^{l_1}\ \times\mathbb{R}^{l_2}\times\mathbb{R}^{l_2}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{l_1},$$

$$\mathcal{E}:\mathbb{R}^{l_1}\ \times\mathbb{R}^{l_1}\ \times\mathbb{R}^{l_2}\times\mathbb{R}^{l_2}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{l_3}, \qquad 0\le l_3.$$

خاطر نشان می‌شود که می‌توان α را عددی بزرگتر از یک در نظر گرفت. هدف از حل این مسأله، یافتن بردار کنترل بهینه $U(t)$ و بردار حالت بهینه $X(t)$، متناظر با آن است که در دینامیک مسأله و شرایط اولیه صدق کرده و تابع هدف تعریف شده در (۱) را کمینه کند. این مسأله، برای $\alpha=1$ با استفاده از توابع ترکیبی بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های درونیاب

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

لاگرانژ حل شده است [۴۲]. در این مقاله، روش حل مسأله کنترل بهینه تحت مطالعه، یک روش مستقیم مبتنی بر توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر از مرتبه کسری است. در اینجا، با استفاده از تابع جریمه [۴۳]، با اضافه کردن توابع کمکی مثبت، محدودیت‌های نامساوی روی متغیرهای حالت و کنترل به محدودیت‌های تساوی تبدیل می‌شوند. سپس با استفاده از مفهوم مشتق کسری کاپوتو، ماتریس عملیاتی مشتق متناظر با توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری ساخته می‌شود. با استفاده از ماتریس عملیاتی مشتق ساخته شده، دینامیک سیستم مسأله کنترل بهینه اصلی به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شود. بدین ترتیب، مسأله کنترل بهینه کسری اولیه به یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری غیرخطی تبدیل می‌شود که می‌توان آن را با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی موجود حل نمود. واضح است که حل مسأله بهینه‌سازی پارامتری به دست آمده بسیار ساده‌تر از حل مسأله کنترل بهینه اصلی است.

در این مقاله، در بخش دوم، مقدماتی از حسابان کسری و عملگر مشتق کسری کاپوتو و خواص مهم آن بیان می‌شود. سپس توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری و ویژگی‌های آنها مطرح می‌شود. در بخش سوم، به معرفی ماتریس‌های عملیاتی مشتق کسری و تأخیر متناظر با توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری می‌پردازیم و قضایایی در مورد تقریب و خطای ماتریس عملیاتی مشتق، بیان می‌کنیم. در بخش چهارم، گسسته‌سازی مسأله کنترل بهینه (۱) مطرح می‌شود و تکینک تابع جریمه برای محدودیت (۶) را بیان می‌کنیم. برای نشان دادن کارآیی و دقت روش، سه مثال در بخش پنجم در نظر گرفته شده است. در بخش آخر، به بیان نتایج می‌پردازیم.

۱. مفاهیم اساسی

۱.۱ عملگر مشتق

در این بخش، به تعریف و معرفی بعضی از ویژگی‌های عملگر مشتق کسری کاپوتو می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. (**مشتق کسری کاپاتو** [۴۴]). فرض کنیم f، تابعی n بار مشتق‌پذیر روی $[0,b]$، باشد. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha > 0$، $n-1 < \alpha < n$ و $n \in \mathbb{N}$، برای تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{D}_\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}ds = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(t)^{-\alpha-1+n} * f^{(n)}(t),$$

که در آن $t \in [0,b]$، $\Gamma(\cdot)$ نماد تابع گاما و $*$ نماد ضرب پیچشی می‌باشد.

عملگر مشتق کسری کاپوتو، یک عملگر خطی است. اگر $\alpha \to 1$، مشتق کسری بر مشتق کلاسیک مرتبه اول منطبق می‌شود. هم‌چنین، اگر $f(t) = c$، یک تابع ثابت باشد، آنگاه $\mathbb{D}_\alpha f(t) = 0$ و اگر $f(t) = t^\nu$، آنگاه

$$\mathbb{D}_\alpha t^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)}t^{\nu-\alpha}, \qquad \nu > [\alpha], \tag{۹}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

که در آن $[\cdot]$، نماد جز صحیح می‌باشد.

۲.۱. توابع لژاندر مرتبه کسری

توابع لژاندر مرتبه کسری از مرتبه α و درجه m، برای $m = 0, 1, \cdots$، روی بازه $[0,1]$ نسبت به تابع وزن $\omega(\alpha, t) = t^{\alpha-1}$، یک مجموعه متعامد کامل در فضای $L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]$ می‌باشند که با نماد $\mathcal{L}_{\alpha,m}(\mathrm{t})$، نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۴۵]:

$$\mathcal{L}_{\alpha,m}(\mathrm{t}) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^{m+l} \frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2} t^{l\alpha}. \tag{۱۰}$$

۳.۱. توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری

توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری از مرتبه α، $\mathcal{F}_{\alpha,n,m}(\mathrm{t})$ به ازای $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N$ و $m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M$ روی بازه $[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h_{\alpha,n,m}(\mathrm{t}) = \begin{cases} \mathcal{L}_{\alpha,m}(Nt - n + 1), & t \in \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right), \\ 0, & \text{o. w.} \end{cases} \tag{۱۱}$$

که در آن n مرتبه توابع بلاک-پالس و m درجه توابع لژاندر مرتبه کسری می‌باشد.

۴.۱. بسط توابع به کمک توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری

خاطر نشان می‌شود که به ازای هر n، توابع لژاندر مرتبه کسری از مرتبه α، یک پایه کامل در فضای $L^2_{\omega(\alpha,t,n)}\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right]$ می‌باشند، که در آن $\omega(\alpha, t, n) = (Nt - n + 1)^{\alpha-1}$. به عبارت دیگر در هر بلاک، اتحاد پارسوال برقرار است. در نتیجه در کل بازه یعنی $[0,1]$، اتحاد پارسوال برقرار خواهد شد. بنابراین، مجموعه توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری، یک پایه کامل برای فضای $L^2_{\omega(\alpha,\mathrm{t})}[0,1]$ می‌باشد. اگر $y \in L^2_{\omega(\alpha,\mathrm{t})}[0,1]$، آنگاه می‌توان تابع y را برحسب توابع ترکیبی یاد شده به صورت زیر بسط داد:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\, h_{\alpha,n,m}(t).$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

بسط متناهی تابع y بر حسب توابع ترکیبی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$y(t) \simeq h(t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{nm}\, h_{\alpha,n,m}(t) = \mathcal{F}_\alpha(t)^T A,$$

که در آن $\mathcal{F}_\alpha(t)$ بردار پایه توابع ترکیبی است. در ضمن، $\mathcal{F}_\alpha(t)$ و A بردارهای ستونی از مرتبه $N(M+1) \times 1$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{F}_\alpha(t) = \left[h_{\alpha,1,0}(t), h_{\alpha,1,1}(t), \dots, h_{\alpha,1,M}(t), \cdots, h_{\alpha,N,0}(t), h_{\alpha,N,1}(t), \cdots, h_{\alpha,N,M}(t)\right]^T, \qquad (۱۲)$$

$$A = \left[a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,M}, \cdots, a_{N,0}, a_{N,1}, \cdots, a_{N,M}\right]^T.$$

ضرایب بسط $a_{n,m}$ برای $n = 1, 2, 3, \cdots, N$ و $m = 0, 1, 2, \cdots, M$، از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$a_{n,m} = \frac{< h, h_{\alpha,n,m} >_{\omega(\alpha,t,n)}}{< h_{\alpha,n,m}, h_{\alpha,n,m} >_{\omega(\alpha,t,n)}}$$

$$= \frac{\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} h(t)\, h_{\alpha,n,m}(t)\, \omega(\alpha,t,n)\, dt}{\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} \left(h_{\alpha,n,m}(t)\right)^2 \omega(\alpha,t,n)\, dt}$$

$$= N(2m+1)\, \alpha \int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} h(t)\, h_{\alpha,n,m}(t)\, \omega(\alpha,t,n)\, dt,$$

که در آن $\omega(\alpha,t,n) = (Nt - n + 1)^{\alpha-1}$، تابع وزن توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری از مرتبه α، در بلاک $\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right)$ و نماد $<\cdot,\cdot>$، حاصلضرب داخلی در فضای هیلبرت $L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]$ است.

۲. ماتریس‌های عملیاتی مشتق کسری و تأخیر

۱.۲. عملگر مشتق کسری برای توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری

$\mathcal{F}_\alpha(t)$، بردار پایه توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری تعریف شده در (۱۲) را در نظر می‌گیریم. در این بخش، مشتق کسری کاپوتو، برای بردار $\mathcal{F}_\alpha(t)$ را به دست خواهیم آورد. عملگر $\mathbb{D}_\alpha$، $0 < \alpha < 1$، روی بردار $\mathcal{F}_\alpha(t)$ را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\mathbb{D}_\alpha \mathcal{F}_\alpha(t) = D_\alpha\, \mathcal{F}_\alpha(t), \tag{۱۳}$$

که در آن D_α ماتریس عملیاتی مشتق کسری متناظر با توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری با ابعاد $N(M+1) \times N(M+1)$، به صورت زیر می‌باشد:

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} & D^{13} & \cdots & D^{1(N-1)} & D^{1N} \\ D^{21} & D^{22} & D^{23} & \cdots & D^{2(N-1)} & D^{2N} \\ D^{31} & D^{32} & D^{33} & \cdots & D^{3(N-1)} & D^{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D^{(N-1)1} & D^{(N-1)2} & D^{(N-1)3} & \cdots & D^{(N-1)(N-1)} & D^{(N-1)N} \\ D^{N1} & D^{N2} & D^{N3} & \cdots & D^{N(N-1)} & D^{NN} \end{pmatrix},$$

که در آن D^{ij}، $i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N$ و $j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N$، ماتریس‌های مربعی با ابعاد $(M+1) \times (M+1)$ می‌باشند. برای محاسبه درایه‌های ماتریس عملیاتی مشتق D_α، با اعمال مشتق کسری کاپوتو بر روی بردار $\mathcal{F}_\alpha(\mathrm{t})$ و با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳)، داریم.

$$\mathbb{D}_\alpha \mathcal{F}_\alpha(t) = \left[\mathbb{D}_\alpha h_{\alpha,1,0}(t), \cdots, \mathbb{D}_\alpha h_{\alpha,1,M}(t), \cdots, \mathbb{D}_\alpha h_{\alpha,N,0}(t), \cdots, \mathbb{D}_\alpha h_{\alpha,N,M}(t)\right]^T.$$

با استفاده از (۱۱) می‌توان تابع $h_{\alpha,n,m}$ را برای $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N$ و $m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M$، به صورت زیر نوشت:

$$h_{\alpha,n,m}(t) = \Delta_{\frac{n-1}{N}}(t)\, \mathcal{L}_{\alpha,m}(Nt - n + 1) - \Delta_{\frac{n}{N}}(t)\, \mathcal{L}_{\alpha,m}(Nt - n + 1).$$

که در آن

$$\Delta_k(t) = \begin{cases} 1, & t \geq k, \\ 0, & t < k. \end{cases}$$

اکنون با اعمال عملگر مشتق کسری کاپوتو داریم.

$$\mathbb{D}_\alpha h_{\alpha,n,m}(t) = \Delta_{\frac{n-1}{N}}(t)\, \mathbb{D}_\alpha \mathcal{L}_{\alpha,m}(Nt - n + 1) - \Delta_{\frac{n}{N}}(t)\, \mathbb{D}_\alpha \mathcal{L}_{\alpha,m}(Nt - n + 1). \tag{۱۴}$$

با توجه به تعریف $\Delta_k(t)$ بدیهی است که (۱۴) در $\left[0, \frac{n-1}{N}\right)$ دارای مقدار صفر می‌باشد. در بلاک $\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right)$ با استفاده از رابطه (۱۰) داریم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_\alpha h_{\alpha,n,m}(t) &= \mathbb{D}_\alpha \sum_{l=0}^{m}(-1)^{m+l}\frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2}(Nt-n+1)^{l\alpha}\\ &= \sum_{l=0}^{m}(-1)^{m+l}\frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2}\mathbb{D}_\alpha(Nt-n+1)^{l\alpha}\\ &= \sum_{l=0}^{m}(-1)^{m+l}\frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2}N^{l\alpha}\,\mathbb{D}_\alpha\left(t-\frac{n-1}{N}\right)^{l\alpha}.\end{aligned}$$

با توجه به (۹) می‌توان نوشت.

$$\mathbb{D}_\alpha h_{\alpha,n,m}(t)=\begin{cases}0, & m=0,\\ \sum_{l=1}^{m}(-1)^{m+l}\frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2}\,N^{l\alpha}\frac{\Gamma(l\alpha+1)}{\Gamma(l\alpha+1-\alpha)}\left(t-\frac{n-1}{N}\right)^{l\alpha-\alpha}, & m>0.\end{cases} \quad (۱۵)$$

هم‌چنین، در بلاک $\left[\frac{n}{N},1\right]$ داریم.

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_\alpha h_{\alpha,n,m}(t) &= \sum_{l=0}^{m}(-1)^{m+l}\frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}}\frac{\frac{d}{ds}(Ns-n+1)^{l\alpha}}{(t-s)^\alpha}ds\\ &= \sum_{l=0}^{m}(-1)^{m+l}\frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2}\,N^{l\alpha}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\frac{1}{N}}\frac{\frac{d}{ds}(s)^{l\alpha}}{(t-s)^\alpha}ds.\end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نوشت.

$$\mathbb{D}_\alpha h_{\alpha,n,m}(t)=\begin{cases}0, & m=0,\\ \sum_{l=1}^{m}(-1)^{m+l}\frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2}\,N^{l\alpha}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\frac{1}{N}}\frac{\frac{d}{ds}(s)^{l\alpha}}{(t-s)^\alpha}ds, & m>0.\end{cases} \quad (۱۶)$$

برای محاسبه درایه‌های ماتریس مشتق D_α، بردار $\mathbb{D}_\alpha\, h_{\alpha,n,m}(t)$ را بر حسب $\mathcal{F}_\alpha(t)$ بسط می‌دهیم. با توجه به (۱۳)، درایه‌های ماتریس‌های D^{ij} برای $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N$ و $j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N$، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}D_{lk}^{ij} &= \frac{<\mathbb{D}_\alpha\, h_{\alpha,i,l-1}, h_{\alpha,j,k-1}>_{\omega(\alpha,t,j)}}{<h_{\alpha,j,k-1}, h_{\alpha,j,k-1}>_{\omega(\alpha,t,j)}}\\ &= N\,(2(k-1)+1)\,\alpha<\mathbb{D}_\alpha\, h_{\alpha,i,l-1}, h_{\alpha,j,k-1}>_{\omega(\alpha,t,j)},\end{aligned} \quad (۱۷)$$

که در آن $l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ M+1$ و $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ M+1$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

اگر $i > j$، آنگاه $0 \le t < \frac{j-1}{N}$ و با توجه به (۱۴) و (۱۷) نتیجه می‌شود $D_{lk}^{ij} = 0$. اگر $i = j$، آنگاه $\frac{j-1}{N} \le t < \frac{j}{N}$. اگر $i < j$، آنگاه $\frac{j}{N} \le t \le 1$. بنابراین، ساختار ماتریس عملیاتی مشتق کاپوتو D_α یک ماتریس مربعی با ابعاد $N(M+1) \times N(M+1)$، به صورت زیر است:

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} & D^{13} & \cdots & D^{1(N-1)} & D^{1N} \\ 0 & D^{11} & D^{12} & \cdots & D^{1(N-2)} & D^{1(N-1)} \\ 0 & 0 & D^{11} & \cdots & D^{1(N-3)} & D^{1(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D^{11} & D^{12} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D^{11} \end{pmatrix}, \qquad (۱۸)$$

که در آن D^{1j}، $j = 1, 2, 3, \cdots, N$، ماتریس‌های مربعی با ابعاد $(M+1) \times (M+1)$ و 0 ماتریس مربعی صفر با ابعاد $(M+1) \times (M+1)$، می‌باشند.

شایان ذکر است وقتی که $\alpha \to 1$، آنگاه مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α، بر مشتق کلاسیک مرتبه اول منطبق می‌شود. اگر $\alpha = 1$، آنگاه ساختار ماتریس عملیاتی مشتق به صورت زیر است [۴۲]:

$$D_1 = \begin{pmatrix} D^{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D^{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{11} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D^{11} \end{pmatrix}.$$

به عنوان مثال، فرض کنیم $N = 2$ و $M = 3$، در این صورت، ماتریس‌های عملیاتی مشتق برای $\alpha = 1$، $\alpha = 0.8$ و $\alpha = 0.5$ به صورت زیر است:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{0.8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.24327 & 0 & 0 & 0.96869 & -0.63055 & 0.32469 \\ -1.71231 & 8.01749 & 0 & 0.67626 & -0.96099 & 0.74280 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.24327 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.71231 & 8.01749 & 0 \end{pmatrix},$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$D_{0.5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.50663 & 0 & 0 & 1.80637 & -0.63178 & 0.07676 \\ -2.73258 & 4.78731 & 0 & 0.78327 & -0.84801 & 0.33890 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.50663 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.73258 & 4.78731 & 0 \end{pmatrix}.$$

برای توضیح بیشتر در مورد نحوه به دست آوردن ماتریس عملیاتی مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α، فرض کنیم $N = 2$، $M = 2$ و $\alpha = \frac{2}{3}$. با توجه به (۱۸) داریم.

$$D_{\frac{2}{3}} = \begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} \\ 0 & D^{11} \end{pmatrix}. \tag{۱۹}$$

برای محاسبه درایه‌های ماتریس $D_{\frac{2}{3}}$، ابتدا درایه‌های D^{11} را به دست می‌آوریم. چون D^{11} یک ماتریس مربعی با ابعاد $(M+1) \times (M+1)$ است، پس

$$D^{11} = \begin{pmatrix} D^{11}_{11} & D^{11}_{12} & D^{11}_{13} \\ D^{11}_{21} & D^{11}_{22} & D^{11}_{23} \\ D^{11}_{31} & D^{11}_{32} & D^{11}_{33} \end{pmatrix}.$$

برای محاسبه درایه‌های ماتریس D^{11}، از (۱۵) و (۱۷) استفاده می‌کنیم. واضح است $D^{11}_{11} = D^{11}_{12} = D^{11}_{13} = 0$. برای محاسبه درایه سطر دوم و ستون اول ماتریس D^{11} داریم.

$$D^{11}_{21} = 2\,(2 \times 0 + 1)\,\frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{D}_{\frac{2}{3}}\, h_{\frac{2}{3},1,1}(t) \times h_{\frac{2}{3},1,0}(t) \times (2t)^{\frac{2}{3}-1} \right) dt$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1}^{1} \frac{(-1)^{1+l}\,(1+l)!\,(2)^{\frac{2l}{3}}\,\Gamma\left(\frac{2l}{3}+1\right)}{(1-l)!\,(l!)^2\,\Gamma\left(\frac{2l}{3}+\frac{1}{3}\right)}\,(t)^{\frac{2l}{3}-\frac{2}{3}} \times \sum_{s=0}^{0} \frac{(-1)^s\,(s)!}{(s!)^2}\,(2t)^{\frac{2s}{3}} \times (2t)^{-\frac{1}{3}} \right) dt$$

$$= 2.86603.$$

برای محاسبه درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس D^{11}، مشابه حالت قبل داریم.

$$D^{11}_{22} = 2(2 \times 1 + 1)\,\frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{D}_{\frac{2}{3}}\, h_{\frac{2}{3},1,1}(t) \times h_{\frac{2}{3},1,1}(t) \times (2t)^{\frac{2}{3}-1} \right) dt$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$= 4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l=1}^{1}\frac{(-1)^{1+l}(1+l)!\ (2)^{\frac{2l}{3}}\,\Gamma\left(\frac{2l}{3}+1\right)}{(1-l)!\,(l!)^2\,\Gamma\left(\frac{2l}{3}+\frac{1}{3}\right)}\,(t)^{\frac{2l}{3}-\frac{2}{3}}\times\sum_{s=0}^{1}\frac{(-1)^{1+s}\,(1+s)!}{(1-s)!\,(s!)^2}(2t)^{\frac{2s}{3}}\times(2t)^{-\frac{1}{3}}\right)dt$$

$$= 0.$$

برای محاسبه درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس D^{11}، می‌توان نوشت.

$$D_{23}^{11} = 2(2\times 2+1)\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{D}_{\frac{2}{3}}\,h_{\frac{2}{3},1,1}(t)\ \times\ h_{\frac{2}{3},1,1}(t)\times(2t)^{\frac{2}{3}-1}\right)dt$$

$$= \frac{20}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l=1}^{1}\frac{(-1)^{1+l}(1+l)!\ (2)^{\frac{2l}{3}}\,\Gamma\left(\frac{2l}{3}+1\right)}{(1-l)!\,(l!)^2\,\Gamma\left(\frac{2l}{3}+\frac{1}{3}\right)}(t)^{\frac{2l}{3}-\frac{2}{3}}\times\sum_{s=0}^{2}\frac{(-1)^{2+s}\,(2+s)!}{(2-s)!\,(s!)^2}(2t)^{\frac{2s}{3}}\times(2t)^{-\frac{1}{3}}\right)dt$$

$$= 0.$$

هم‌چنین، درایه‌های سطر سوم ماتریس D^{11}، مشابه سطر دوم محاسبه می‌شوند. بنابراین ماتریس D^{11}، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2.86603 & 0 & 0 \\ -2.31719 & 6.28091 & 0 \end{pmatrix}.$$

اکنون درایه‌های ماتریس D^{12} را محاسبه می‌کنیم. ماتریس D^{12}، یک ماتریس مربعی با ابعاد $(M+1)\times(M+1)$ به صورت زیر است:

$$D^{12} = \begin{pmatrix} D_{11}^{12} & D_{12}^{12} & D_{13}^{12} \\ D_{21}^{12} & D_{22}^{12} & D_{23}^{12} \\ D_{31}^{12} & D_{32}^{12} & D_{33}^{12} \end{pmatrix}.$$

برای محاسبه درایه‌های این ماتریس، از (۱۶) و (۱۷) استفاده می‌کنیم. بدیهی است که $D_{11}^{12} = D_{12}^{12} = D_{13}^{12} = 0$. برای محاسبه درایه سطر دوم و ستون اول ماتریس D^{12} داریم.

$$D_{21}^{12} = 2\,(2\times 0+1)\,\frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\mathbb{D}_{\frac{2}{3}}\,h_{\frac{2}{3},1,1}(t)\ \times\ h_{\frac{2}{3},2,0}(t)\times(2t-1)^{\frac{2}{3}-1}\right)dt$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$= \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\sum_{l=1}^{1}\frac{(-1)^{1+l}(1+l)!\ 2^{\frac{2l}{3}}}{(1-l)!\,(l!)^2\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{d}{dr}(r)^{\frac{2l}{3}}}{(t-r)^{\frac{2}{3}}}dr \times \sum_{s=0}^{0}\frac{(-1)^s\,(s)!}{(s!)^2}(2t-1)^{\frac{2s}{3}} \times (2t-1)^{-\frac{1}{3}}\right)dt$$

$$= 1.43301.$$

برای محاسبه درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس D^{12}، داریم.

$$D_{22}^{12} = 2\,(2\times 1+1)\,\frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\mathbb{D}_{\frac{2}{3}}\,h_{\frac{2}{3},1,1}(t)\ \times\ h_{\frac{2}{3},2,1}(t)\times(2t-1)^{\frac{2}{3}-1}\right)dt$$

$$= 4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\sum_{l=1}^{1}\frac{(-1)^{1+l}(1+l)!\,2^{\frac{2l}{3}}}{(1-l)!\,(l!)^2\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{d}{dr}(r)^{\frac{2l}{3}}}{(t-r)^{\frac{2}{3}}}dr \times \sum_{s=0}^{1}\frac{(-1)^{1+s}(1+s)!}{(1-s)!\,(s!)^2}\ (2t-1)^{\frac{2s}{3}} \times (2t-1)^{-\frac{1}{3}}\right)dt$$

$$= -0.74376.$$

مشابه حالت قبل، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس D^{12} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_{23}^{12} = 2\,(2\times 2+1)\,\frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\mathbb{D}_{\frac{2}{3}}\,h_{\frac{2}{3},1,1}(t)\ \times\ h_{\frac{2}{3},2,2}(t)\times(2t-1)^{\frac{2}{3}-1}\right)dt$$

$$= \frac{20}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\sum_{l=1}^{1}\frac{(-1)^{1+l}(1+l)!\,2^{\frac{2l}{3}}}{(1-l)!\,(l!)^2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{d}{dr}(r)^{\frac{2l}{3}}}{(t-r)^{\frac{2}{3}}}\ ds\ \sum_{s=0}^{2}\frac{(-1)^{2+s}(2+s)!}{(2-s)!\,(s!)^2}(2t-1)^{\frac{2s}{3}}\,(2t-1)^{-\frac{1}{3}}\right)dt$$

$$= 0.27255.$$

درایه‌های سطر سوم ماتریس D^{12}، مشابه درایه‌های سطر دوم محاسبه می‌شوند. بنابراین، ماتریس D^{12} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.43301 & -0.74376 & 0.27255 \\ 0.84463 & -1.08639 & 0.69004 \end{pmatrix}.$$

با جایگذاری D^{11} و D^{12} در (۱۹) نتیجه می‌شود.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$D_{\frac{2}{3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.86603 & 0 & 0 & 1.43301 & -0.74376 & 0.27255 \\ -2.31719 & 6.28091 & 0 & 0.84463 & -1.08639 & 0.69004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.86603 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.31719 & 6.28091 & 0 \end{pmatrix}.$$

۱.۱.۲. یک کران بالا برای عملگر مشتق کسری کاپاتو برای توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری

در این بخش، ابتدا به معرفی فضای سوبولف و قضیه همگرایی پایه ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری می‌پردازیم و سپس خطای تقریب برای عملگر مشتق کسری کاپوتو متناظر با توابع ترکیبی یاد شده را به دست می‌آوریم.

فضای سوبولف از مرتبه عدد صحیح مثبت γ، با تابع وزن $\omega(\alpha,t)$، روی بازه $[0,1]$، را با نماد $\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t)}[0,1]$، نمایش می‌دهیم [۴۶]. در این فضا، نرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t)}[0,1]} &= < f, f >_{\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t)}[0,1]} \\ &= \sum_{i=0}^{\gamma} \int_0^1 \omega(\alpha,t) \left(\frac{d^i}{dt^i} f(t) \right)^2 dt \\ &= \sum_{i=0}^{\gamma} \left\| \frac{d^i}{dt^i} f(t) \right\|^2_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]}, \end{aligned}$$

که در آن $\frac{d^i}{dt^i}$، نشان دهنده مشتق مرتبه i-ام تابع f می‌باشد.

شایان ذکر است که شبه نرم در فضای سوبولف برای تابع f، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|f|_{\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t),M}[0,1]} = \left(\sum_{k=\min(\gamma,M+1)}^{\gamma} \left\| \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right\|^2_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

هم‌چنین، برای توابع ترکیبی یاد شده، شبه نرم در فضای سوبولف به صورت زیر تعریف می‌شود:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$|f|_{\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t):s:N,M}[0,1]} = \left(\sum_{k=\min(\gamma,M+1)}^{\gamma} N^{2s-2k} \sum_{n=1}^{N} \left\| \frac{d^k}{dt^k} f_n(t) \right\|^2_{L^2_{\omega(\alpha,t,n)}\left[\frac{n-1}{N},\frac{n}{N}\right)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن N و M اعداد صحیح مثبت می‌باشند به طوری که $N \geq 1$ و $M \geq 0$. هم‌چنین، برای $n = 1, 2, \cdots, N$، $f_n : \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right) \to \mathbb{R}$ یک تابع در فضای $\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t,n)}\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right)$ است، که $f_n(x) = f(x)$، $\omega(\alpha,t) = t^{\alpha-1}$ و $\omega(\alpha,t,n) = (Nt - n + 1)^{\alpha-1}$. در ضمن، $1 \leq s \leq \gamma$ به طوری‌که $s \in \mathbb{Z}$.

قضیه ۱.۲. ([۴۶]). فرض کنیم $\gamma \geq 1$، یک عدد صحیح مثبت و $f \in \mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t)}[0,1]$ باشد. در این صورت

$$\|f - \beta_{NM}(f)\|_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]} \leq CM^{-\gamma} |f|_{\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t):0:N,M}[0,1]}.$$

هم‌چنین، برای $1 \leq s \leq \gamma$ و $s \in \mathbb{Z}$، رابطه زیر را داریم:

$$\|f - \beta_{NM}(f)\|_{\mathcal{H}_{s,\omega(\alpha,t)}[0,1]} \leq CM^{2s-\frac{1}{2}-\gamma} |f|_{\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t):s:N,M}[0,1]},$$

که در آن

$$\beta_{NM}(f) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{M} a_{nj}\, \mathcal{F}_{\alpha,n,j}(t),$$

بهترین تقریب برای تابع f است و C، عددی وابسته به γ و مستقل از f و M می‌باشد.

قضیه ۲.۲. (**نامساوی پیچشی یانگ** [۴۷]). فرض کنیم $0 \leq p, q, r < \infty$ به طوری‌که $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. در این صورت

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

قضیه ۳.۲. فرض کنیم $\gamma \in \mathbb{N}$ و $s \in \mathbb{N}$ به طوری که $s - 1 < \alpha < s \leq \gamma$ و $f \in \mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t)}[0,1]$ باشد. در این صورت خطای تقریب عملگر مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha > 0$، برای توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری به صورت زیر می‌باشد:

$$\| \mathbb{D}_\alpha(f) - \mathbb{D}_\alpha \beta_{NM}(f) \|_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]} \leq \frac{1}{\Gamma(s-\alpha+1)} CM^{2s-\frac{1}{2}-\gamma} |f|_{\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t):s:N,M}[0,1]}.$$

اثبات. طبق تعریف **۱.۱**، برای مشتق کسری کاپوتو می‌توان نوشت.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\mathbb{D}_\alpha(f) - \mathbb{D}_\alpha\beta_{NM}(f) = \frac{1}{\Gamma(s-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{s-\alpha-1}\left(\frac{d^s}{dt^s}f(\tau) - \frac{d^s}{dt^s}\beta_{NM}(f(\tau))\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s-\alpha)}t^{s-\alpha-1} * \frac{d^s}{dt^s}\Big(f(t) - \beta_{NM}\big(f(t)\big)\Big),$$

اکنون با استفاده از قضیه ۲.۲، داریم.

$$\| \mathbb{D}_\alpha(f) - \mathbb{D}_\alpha\beta_{NM}(f) \|^2_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]} = \left\|\frac{1}{\Gamma(s-\alpha)}t^{s-\alpha-1} * \frac{d^s}{dt^s}\Big(f(t) - \beta_{NM}\big(f(t)\big)\Big)\right\|^2_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]}$$

$$\leq \left\|\frac{1}{\Gamma(s-\alpha)}t^{s-\alpha-1}\right\|^2_1 \left\|\frac{d^s}{dt^s}\Big(f(t) - \beta_{NM}\big(f(t)\big)\Big)\right\|^2_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]}$$

$$\leq \left(\int_0^1 \frac{1}{\Gamma(s-\alpha)}t^{s-\alpha-1}\,dt\right)^2 \left\|\frac{d^s}{dt^s}\Big(f(t) - \beta_{NM}\big(f(t)\big)\Big)\right\|^2_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]}.$$

طبق تعریف نرم در فضای سوبولف و نامساوی بالا نتیجه می‌شود.

$$\| \mathbb{D}_\alpha(f) - \mathbb{D}_\alpha\beta_{NM}(f) \|^2_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]} \leq \frac{1}{\Gamma(s-\alpha+1)^2}\left\|f(t) - \beta_{NM}\big(f(t)\big)\right\|^2_{\mathcal{H}_{s,\omega(\alpha,t)}[0,1]}.$$

هم‌چنین، با استفاده از قضیه ۱.۲ و نامساوی بالا داریم.

$$\| \mathbb{D}_\alpha(f) - \mathbb{D}_\alpha\beta_{NM}(f) \|^2_{L^2_{\omega(\alpha,t)}[0,1]} \leq \frac{1}{\Gamma(s-\alpha+1)^2}\, C^2 M^{4s-1-2\gamma}|f|^2_{\mathcal{H}_{\gamma,\omega(\alpha,t):s:N,M}[0,1]}.$$

با ریشه دوم گرفتن از نامساوی بالا قضیه اثبات می‌شود.

قضیه ۴.۲. اگر D_α، ماتریس عملیاتی مشتق مرتبه کسری کاپوتو متناظر با توابع لژاندر از مرتبه کسری $\alpha > 0$ باشد، آنگاه بردار خطای این ماتریس، $ED_\alpha = [e_0, e_1, \cdots, e_M]^T$، برابر صفر می‌باشد. به عبارت دیگر، رابطه زیر را داریم:

$$ED_\alpha = \mathbb{D}_\alpha\mathcal{F}_\alpha(t) - D_\alpha\mathcal{F}_\alpha(t) = 0.$$

اثبات. با اعمال عملگر مشتق کاپوتو روی توابع لژاندر مرتبه کسری، نتیجه می‌شود.

$$\mathbb{D}_\alpha\, h_{\alpha,1,m}(t) = \mathbb{D}_\alpha \sum_{l=0}^{m}(-1)^{m+l}\frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2}(t)^{l\alpha}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$= \sum_{l=0}^{m} (-1)^{m+l} \frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2} \mathbb{D}_\alpha (t)^{l\alpha}$$

$$= \sum_{l=0}^{m} (-1)^{m+l} \frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2} N^{l\alpha}\, \mathbb{D}_\alpha (t)^{l\alpha},$$

که در آن $m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, M$. با توجه به (۹) می‌توان نوشت.

$$\mathbb{D}_\alpha\, h_{\alpha,1,m}(t) = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{m} (-1)^{m+l} \frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2} \frac{\Gamma(l\alpha+1)}{\Gamma(l\alpha+1-\alpha)}\, (t)^{l\alpha-\alpha}, & m > 0. \end{cases}$$

چون $\deg\left((t)^{l\alpha-\alpha}\right) < M\alpha$، بنابراین

$$\sum_{l=1}^{m} (-1)^{m+l} \frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2} \frac{\Gamma(l\alpha+1)}{\Gamma(l\alpha+1-\alpha)}\, (t)^{l\alpha-\alpha} = \sum_{i=1}^{M} a_{m,i}\, h_{\alpha,1,\mathrm{i}}(t),$$

که در آن

$$a_{m,i} = (2i+1)\,\alpha \int_0^1 \sum_{l=1}^{m} (-1)^{m+l} \frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2} \frac{\Gamma(l\alpha+1)}{\Gamma(l\alpha+1-\alpha)}\, (t)^{l\alpha-\alpha} \times\ h_{\alpha,1,\mathrm{i}}(t)\ \times\ \omega(\alpha,t,1)\, dt$$

$$= (2i+1)\,\alpha \int_0^1 \sum_{l=1}^{m} (-1)^{m+l} \frac{(m+l)!}{(m-l)!\,(l!)^2} \frac{\Gamma(l\alpha+1)}{\Gamma(l\alpha+1-\alpha)}\, (t)^{l\alpha-\alpha}$$
$$\times \sum_{k=1}^{i} (-1)^{i+k} \frac{(i+k)!}{(i-k)!\,(k!)^2}\, (t)^{k\alpha}\ \times t^{\alpha-1}\ dt$$

$$= (2i+1)\,\alpha \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{i} (-1)^{m+l+i+k} \frac{(m+l)!\,(i+k)!\,\Gamma(l\alpha+1)}{(m-l)!\,(l!)^2 (i-k)!\,(k!)^2 \Gamma(l\alpha+1-\alpha)} \int_0^1 (t)^{l\alpha+k\alpha-1}\ dt$$

$$= (2i+1)\,\alpha \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{i} (-1)^{m+l+i+k} \frac{(m+l)!\,(i+k)!\,\Gamma(l\alpha+1)}{(m-l)!\,(l!)^2 (i-k)!\,(k!)^2 \Gamma(l\alpha+1-\alpha)(l\alpha+k\alpha)}.$$

با توجه به عبارت بالا نتیجه می‌شود $a_{m,i} = (D_\alpha)_{m,i}$.

بنابراین، برای $m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, M$ داریم $e_m = 0$. بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$\|ED_\alpha\| = 0.$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

۲.۲. ماتریس عملیاتی تأخیر برای توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری

بردار $\mathcal{F}_\alpha(t)$ در (۱۲) را در نظر می‌گیریم. بردارهای $\mathcal{F}_\alpha(t-\tau_x)$ و $\mathcal{F}_\alpha(t-\tau_u)$ انتقال یافته بردار $\mathcal{F}_\alpha(t)$، به اندازه اعداد گویای τ_x و τ_u در بازه $[0,1]$، در راستای محور زمان می‌باشند. بسط $\mathcal{F}_\alpha(t-\tau_x)$ و $\mathcal{F}_\alpha(t-\tau_u)$ برحسب بردار پایه $\mathcal{F}_\alpha(t)$، به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{F}_\alpha(t-\tau_x) = \mathcal{D}_{\tau_x}\mathcal{F}_\alpha(t), \qquad t > \tau_x,$$

$$\mathcal{F}_\alpha(t-\tau_u) = \mathcal{D}_{\tau_u}\mathcal{F}_\alpha(t), \qquad t > \tau_u,$$

که $\mathcal{D}_{\tau_x}$ و $\mathcal{D}_{\tau_u}$ ماتریس‌های عملیاتی تأخیر مربعی با ابعاد $N(M+1)\times N(M+1)$، با زمان‌های تأخیر τ_x و τ_u، متناظر با توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری α، می‌باشند.

برای ساختن ماتریس عملیاتی تأخیر، ابتدا باید مرتبه توابع بلاک-پالس، N را مشخص کرد. برای به دست آوردن N به صورت زیر می‌نویسیم:

ابتدا، عدد صحیح مثبت b را کوچکترین عددی در نظر می‌گیریم، که $b\tau_x$ و $b\tau_u$ اعداد صحیح شوند. سپس

$$p = \mathrm{g.c.d}(b\tau_x, b\tau_u),$$

و مقدار N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N = \begin{cases} \dfrac{b}{p}, & \dfrac{b}{p} \in \mathbb{Z}, \\ \left[\dfrac{b}{p}\right] + 1 & \dfrac{b}{p} \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{۲۰}$$

نحوه به دست آوردن ماتریس‌های تأخیر متناظر با توابع ترکیبی در [۴۶] با ذکر جزئیات بیان شده است. شایان ذکر است که $\mathcal{D}_{\tau_x}$ و $\mathcal{D}_{\tau_u}$ ماتریس‌های مربعی با ابعاد $N(M+1)\times N(M+1)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathcal{D}_{\tau_x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{M+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_{M+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{M+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$\mathcal{D}_{\tau_u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{M+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_{M+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{M+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

که در آن N طبق (۲۰) محاسبه می‌شود و I_{M+1} یک ماتریس همانی با ابعاد $(M+1)\times(M+1)$ و 0 ماتریس صفر با ابعاد $(M+1)\times(M+1)$، می‌باشد. در ضمن، در ماتریس $\mathcal{D}_{\tau_x}$، اولین I_{M+1} در سطر اول و در ستون s_{1x} قرار دارد که $s_{1x} = \frac{b\tau_x}{p}$ و در ماتریس $\mathcal{D}_{\tau_u}$، اولین I_{M+1} در سطر اول و در ستون s_{2x} قرار دارد که $s_{2x} = \frac{b\tau_u}{p}$ تعریف می‌شود

.

۳. گسسته‌سازی مسأله کنترل بهینه غیرخطی کسری با محدودیت نامساوی

همان‌طور که در مقدمه اشاره شده است، روش حل مسأله، یک روش مستقیم مبتنی بر توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر از مرتبه کسری α، برای $0 < \alpha \leq 1$، است. لازم به ذکر است برای $\alpha = 1$، مسأله کنترل بهینه کسری یاد شده به یک مسأله کنترل بهینه غیرخطی کلاسیک تبدیل می‌شود. برای حل مسأله (۱)، ابتدا متغیرهای حالت و کنترل مسأله را برحسب توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$x_i(t) = \mathcal{F}_\alpha^T(t)\, q_i,$$

$$u_j(t) = \mathcal{F}_\alpha^T(t)\, r_j,$$

که در آن q_i و r_j برای $i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l_1$ و $j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l_2$، بردارهای ستونی از مرتبه $N(M+1)\times 1$ می‌باشند. با استفاده از (۷) و (۸) می‌توان نوشت.

$$X(t) = \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right) Q, \tag{۲۱}$$

$$U(t) = \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right) R, \tag{۲۲}$$

که در آن I_{l_1} و I_{l_2}، ماتریس‌های همانی با ابعاد $l_1 \times l_1$ و $l_2 \times l_2$ و نماد $\otimes$ بیانگر ضرب کرونکر است. هم‌چنین، Q و R بردارهای ستونی به ترتیب از مرتبه $l_1(N(M+1))\times 1$ و $l_2(N(M+1))\times 1$، به صورت زیر می‌باشند:

$$Q = [q_1^T, q_2^T, \cdots, q_{l_1}^T]^T,$$

$$R = [r_1^T, r_2^T, \cdots, r_{l_2}^T]^T.$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

با اعمال مشتق کاپوتو بر روی (۲۱) نتیجه می‌شود.

$$\mathbb{D}_\alpha X(t) = \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_1} \otimes D_\alpha^T\right) Q, \tag{۲۳}$$

که در آن D_α، ماتریس عملیاتی مشتق کسری معرفی شده در (۱۸) می‌باشد. هم‌چنین، $x_i(t-\tau_x)$ و $u_j(t-\tau_u)$ را با استفاده از (۴) و (۵) به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$x_{\mathrm{i}}(t-\tau_x) = \begin{cases} \varphi_i(t-\tau_x) = \mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\, k_i, & 0 \le t < \tau_x, \\ \mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\, \mathcal{D}_{\tau_x}^{\mathrm{T}} q_i, & \tau_x \le \mathrm{t} \le 1, \end{cases} \tag{۲۴}$$

$$u_{\mathrm{j}}(t-\tau_u) = \begin{cases} \psi_{\mathrm{j}}(t-\tau_u) = \mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\, v_j, & 0 \le t < \tau_u, \\ \mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\, \mathcal{D}_{\tau_u}^{\mathrm{T}} r_j, & \tau_u \le \mathrm{t} \le 1, \end{cases} \tag{۲۵}$$

که در آن $\mathcal{D}_{\tau_x}$ و $\mathcal{D}_{\tau_u}$، ماتریس‌های عملیاتی تأخیر متناظر با توابع ترکیبی و k_i و v_j برای $i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l_1$ و $j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l_2$، بردارهای ستونی از مرتبه $N(M+1) \times 1$، می‌باشند. از (۲۴) نتیجه می‌شود.

$$X(t-\tau_x) = \begin{cases} \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right) K, & 0 \le t < \tau_x, \\ \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{D}_{\tau_x}^T\right) Q, & \tau_x \le \mathrm{t} \le 1, \end{cases} \tag{۲۶}$$

که در آن K، بردار ستونی از مرتبه $l_1(N(M+1)) \times 1$، به صورت زیر می‌باشد:

$$K = \left[k_1^T, k_2^T, \cdots, k_{l_1}^T\right]^T.$$

به طور مشابه، از (۲۵) نتیجه می‌شود.

$$U(t-\tau_u) = \begin{cases} \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right) V, & 0 \le t < \tau_u, \\ \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_2} \otimes \mathcal{D}_{\tau_u}^T\right) R, & \tau_u \le \mathrm{t} \le 1, \end{cases} \tag{۲۷}$$

که در آن V، بردار ستونی از مرتبه $l_2(N(M+1)) \times 1$، به صورت زیر می‌باشد:

$$V = \left[v_1^T, v_2^T, \cdots, v_{l_2}^T\right]^T.$$

با استفاده از (۲۶) و (۲۷) می‌توان نوشت.

$$X(t-\tau_x) = \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right) K + \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{D}_{\tau_x}^T\right) Q, \tag{۲۸}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$U(t-\tau_u) = \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)V + \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_2} \otimes \mathcal{D}_{\tau_u}^T\right) R. \tag{۲۹}$$

اکنون با جایگذاری (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۲۸) و (۲۹) در دینامیک سیستم مسأله کنترل بهینه (۲)، نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}&\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_1} \otimes D_\alpha^T\right)Q\\ &\quad - \mathcal{C}\Big(\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)Q, \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)K\\ &\quad + \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{D}_{\tau_x}^T\right)Q, \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)R, \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)V\\ &\quad + \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_2} \otimes \mathcal{D}_{\tau_u}^T\right)R, t\Big) = 0.\end{aligned} \tag{۳۰}$$

اکنون با استفاده از روش هم مکانی، دینامیک سیستم مسأله کنترل بهینه کسری بیان شده را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنیم. فرض کنیم t_m، $m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M$، ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته از درجه M در بازه $[0,1]$ باشند. بنابراین، ریشه‌های توابع لژاندر مرتبه کسری از مرتبه α، را می‌توان به صورت $(t_m)^{\frac{1}{\alpha}}$ نشان داد. در نتیجه، ریشه‌های توابع ترکیبی از مرتبه α در بازه $\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right)$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$d_{n,m} = \frac{1}{N}\left((t_m)^{\frac{1}{\alpha}} + n - 1\right), \qquad n = 1,2,3,\cdots,N, \qquad m = 0,1,2,\cdots,M.$$

با استفاده از (۳۰) و روش هم مکانی داریم.

$$\begin{aligned}&\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(d_{n,m})\right)\left(I_{l_1} \otimes D_\alpha^T\right)Q\\ &\quad - \mathcal{C}\Big(\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(d_{n,m})\right)Q, \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(d_{n,m})\right)K\\ &\quad + \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(d_{n,m})\right)\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{D}_{\tau_x}^T\right)Q, \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(d_{n,m})\right)R, \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(d_{n,m})\right)V\\ &\quad + \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(d_{n,m})\right)\left(I_{l_2} \otimes \mathcal{D}_{\tau_u}^T\right)R, d_{n,m}\Big) = 0.\end{aligned} \tag{۳۱}$$

اکنون تابع هدف مسأله کنترل بهینه کسری را تقریب می‌زنیم. با جایگذاری (۲۱) و (۲۲) در (۱)، نتیجه می‌شود.

$$J(Q,R) = \mathcal{B}\left(\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(1)\right)Q\right) + \int_0^1 \mathcal{A}\left(\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)Q, \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)R, t\right) dt. \tag{۳۲}$$

۱.۳.تکنیک تابع جریمه

در این مقاله، برای تبدیل محدودیت‌های نامساوی روی متغیرهای حالت و کنترل (۶) به محدودیت‌های تساوی، از تکنیک تابع جریمه استفاده می‌کنیم. برای این منظور، بردار $E(t)$ را به صورتی در نظر می‌گیریم که در شرایط زیر صدق کند:

$$\mathcal{E}(X(t), X(t-\tau_x), U(t), U(t-\tau_u), t) + E(t) = 0, \tag{۳۳}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

که در آن

$$E(t) = \left[e_1^2(t), e_2^2(t), \cdots, e_{l_3}^2(t)\right]^T.$$

فرض کنیم

$$e_i(t) = \mathcal{F}_\alpha^T(t)\, e_i, \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, l_3,$$

که در آن e_i برای $i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots, l_3$، بردارهای ستونی از مرتبه $N(M+1) \times 1$ می‌باشند. بنابراین

$$e_i^2(t) = e_i^T \mathcal{F}_\alpha(t)\, \mathcal{F}_\alpha^T(t)\, e_i.$$

در نتیجه

$$\mathrm{E}(t) = E^T (I_{l_3} \otimes \mathcal{F}_\alpha(t))(I_{l_3} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t))\, E, \tag{۳۴}$$

که در آن I_{l_3} ماتریس همانی با ابعاد $l_3 \times l_3$ و E یک بردار ستونی از مرتبه $l_3(N(M+1)) \times 1$، به صورت زیر است:

$$E = \left[e_1^T, e_2^T, \cdots, e_{l_3}^T\right]^T.$$

با جایگذاری (۲۱)، (۲۲)، (۲۸)، (۲۹) و (۳۴) در (۳۳) داریم.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e(t) = \mathcal{E}\Big(&\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right) Q, \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right) K \\ &+ \left(I_{l_1} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_1} \otimes \mathcal{D}_{\tau_x}^T\right) Q, \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right) R, \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right) V \\ &+ \left(I_{l_2} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t)\right)\left(I_{l_2} \otimes \mathcal{D}_{\tau_u}^T\right) R, \mathrm{t}\Big) + E^T (I_{l_3} \otimes \mathcal{F}_\alpha(t))(I_{l_3} \otimes \mathcal{F}_\alpha^T(t))\, E = 0.\end{aligned}$$

برای استفاده از تکنیک تابع جریمه، خطای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$J_{\mathrm{e}}(Q, R, E) = \int_0^1 \mathcal{E}_e^T(t)\, \Sigma_{\mathrm{e}}\, \mathcal{E}_{\mathrm{e}}(\mathrm{t})\, \mathrm{dt}, \tag{۳۵}$$

که در آن Σ_{e} یک ماتریس قطری با ابعاد $l_3 \times l_3$، به صورت زیر می‌باشد:

$$\Sigma_{\mathrm{e}} = \mathrm{diag}\left(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{l_3}\right),$$

که در آن σ_i، $i = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ l_3$، وزن‌های مثبت ثابت دلخواه می‌باشند. به این ترتیب، مسأله اصلی به یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری تبدیل می‌شود که با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، می‌توان مسأله بهینه‌سازی جدید را حل کرد. برای به کار گرفتن روش ضرایب لاگرانژ، ابتدا تابع $L(Q, R, E, \lambda)$ را با توجه به (۳۱)، (۳۲) و (۳۵)، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$L(Q,R,E,\lambda) = J(Q,R) + J_e(Q,R,E) + \lambda^T \Gamma,$$

که در آن Γ، عبارت سمت چپ (۳۱) و λ بردار ضرایب مجهول لاگرانژ می‌باشد. شرایط لازم بهینگی عبارتند از

$$\frac{\partial}{\partial Q} L(Q,R,E,\lambda) = 0, \tag{۳۶}$$

$$\frac{\partial}{\partial R} L(Q,R,E,\lambda) = 0, \tag{۳۷}$$

$$\frac{\partial}{\partial E} L(Q,R,E,\lambda) = 0, \tag{۳۸}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(Q,R,E,\lambda) = 0. \tag{۳۹}$$

معادلات (۳۶) تا (۳۹)، یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی را تشکیل می‌دهند که با روش نیوتن قابل حل می‌باشد. برای به کارگیری روش تکراری نیوتن نیاز به شرایط اولیه داریم که از رابطه $X(0) = X_0$ در (۳)، به عنوان شرط اولیه دستگاه استفاده می‌کنیم. با حل دستگاه جبری به دست آمده، بردارهای Q، R، E و λ به دست می‌آیند. هم‌چنین، با استفاده از (۲۱) و (۲۲)، بردار حالت و بردار کنترل محاسبه می‌شوند.

۴. نتایج عددی

در این بخش، به منظور نشان دادن کارایی، دقت و کاربرد روش ارائه شده، سه مثال از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری را در نظر می‌گیریم. لازم به ذکر است که برای انجام کلیه محاسبات از نرم افزار میپل استفاده شده است.

مثال ۱.۴. مسأله کنترل بهینه کسری غیرخطی تأخیری با محدودیت روی متغیر حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min \qquad J = \frac{3}{2}x^2(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)\,dt,$$

که دینامیک سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbb{D}_\alpha x(t) = x\left(t-\frac{1}{4}\right)\, x^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\, x^3\left(t-\frac{3}{4}\right) + u(t), \qquad 0<\alpha\le 1, \quad 0\le t\le 1,$$

با شرایط

$$x(t) = 0, \qquad -\frac{3}{4}\le t<0,$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$x(0) = \frac{3}{10},$$

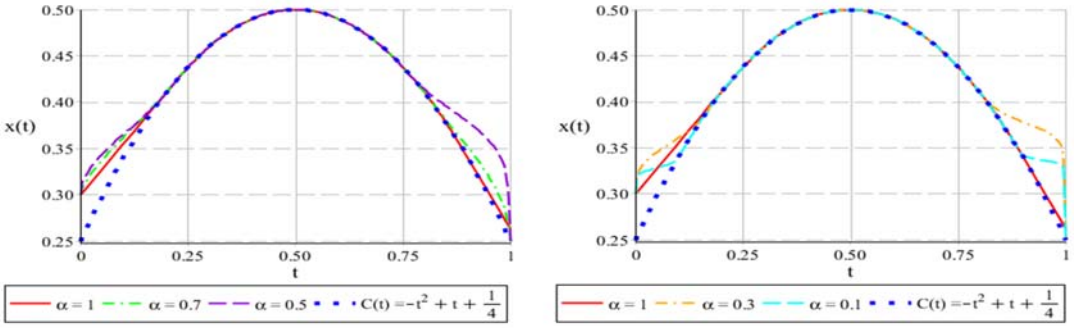
و با محدودیت

$$x(t) \geq -t^2 + t + \frac{1}{4}.$$

این مسأله، با استفاده از توابع ترکیبی بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ، برای $\alpha = 1$، در [۴۲] حل شده است. در این مقاله، با استفاده از روش ارائه شده، نتایج را برای $0 < \alpha \leq 1$، به دست می‌آوریم. نتایج عددی این مثال در جدول ۱,۴ آورده شده است. نمودارهای تقریبی تابع حالت و تابع کنترل برای مقادیر مختلف α، به ترتیب در شکل‌های ۱,۴ و ۲,۴ ترسیم شده است.

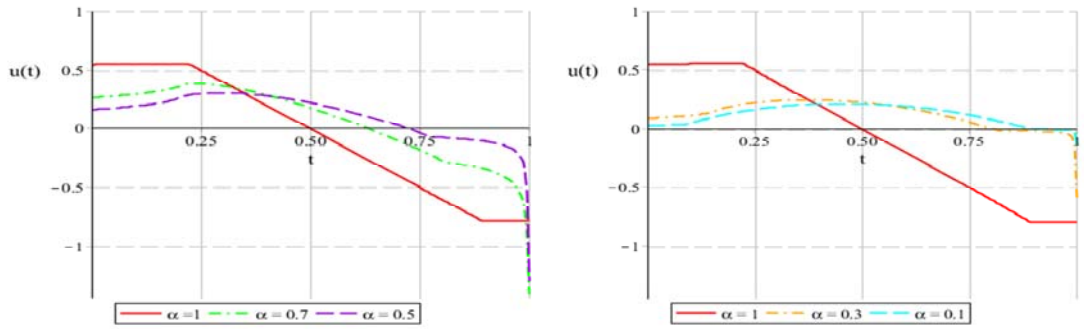
جدول ۱,۴. مقادیر تقریبی J برای مثال ۱,۴ به ازای $N = 4$ و $M = 6$ برای مقادیر مختلف α و مقایسه با روش موجود دیگر برای $\alpha = 1$.

α	J	
	روش توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری	روش توابع ترکیبی بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ [۴۲]
1	0.225338234718286262	0.2253601
0.9	0.188072309971950208	-----
0.7	0.140046284051919018	-----
0.5	0.116621999152854525	-----
0.3	0.107904475060829674	-----
0.1	0.104442474689364628	-----



شکل ۱,۴. نمودارهای تقریبی تابع حالت $x(t)$ برای مثال ۱,۴ به ازای $N = 4$ و $M = 6$ برای $\alpha = 1, 0.7, 0.5$ (سمت چپ) و $\alpha = 1, 0.3, 0.1$ (سمت راست).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]



شکل ۲،۴. نمودارهای تقریبی تابع کنترل $u(t)$ برای مثال ۱،۴ به ازای $N = 4$ و $M = 6$ برای $\alpha = 1, 0.7, 0.5$ (سمت چپ) و $\alpha = 1, 0.3, 0.1$ (سمت راست).

مثال ۲.۴. مسأله کنترل بهینه کسری غیرخطی تأخیری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min \qquad J = \int_0^2 \left(\|X(t)\|^2 + 0.1\,\|U(t)\|^2\right)\, dt,$$

که دینامیک سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbb{D}_\alpha x_1(t) = 0.5 - x_1(t) - \left(0.5 + x_1(t)\right)\exp\left(\frac{25\, x_2(t)}{2 + x_2(t)}\right),$$

$$\mathbb{D}_\alpha x_2(t) = -\left(2 + u_1(t)\right)\left(x_2(t) + 0.25\right) + \left(0.5 + x_1(t)\right)\exp\left(\frac{25\, x_2(t)}{2 + x_2(t)}\right),$$

$$\mathbb{D}_\alpha x_3(t) = x_1(t - h(t)) - x_3(t) - \left(x_3(t) + 0.25\right)\exp\left(\frac{25\, x_4(t)}{2 + x_4(t)}\right) + 0.25,$$

$$\mathbb{D}_\alpha x_4(t) = x_2(t - h(t)) - 2x_4(t) - u_2(t)\,\left(x_4(t) + 0.25\right) + \left(x_3(t) + 0.25\right)\exp\left(\frac{25\, x_4(t)}{2 + x_4(t)}\right) - 0.25,$$

با شرایط

$$x_1(t) = 0.15, \qquad t \in [-h(\tau), 0),$$

$$x_2(t) = -0.03, \qquad t \in [-h(\tau), 0),$$

$$X(0) = [0.15, -0.03, 0.1, 0]^T,$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

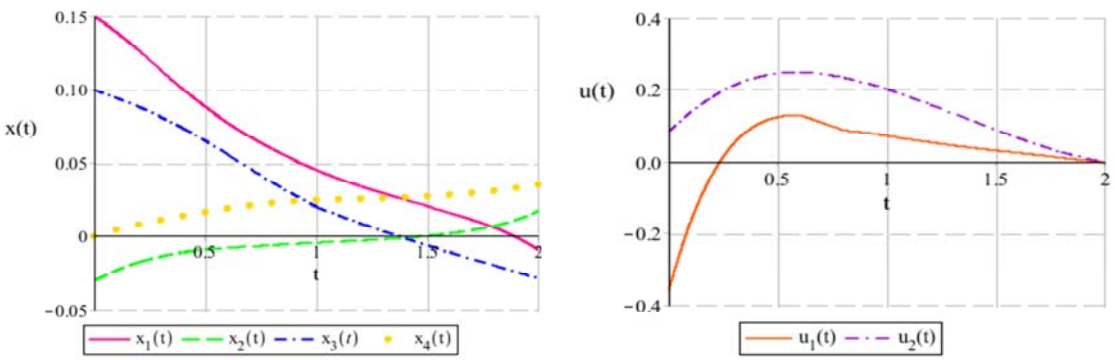
که در آن

$$h(\tau)=\begin{cases}0.2, & \tau\in[0,1),\\ 0.4, & \tau\in[1,2].\end{cases}$$

نتایج عددی تابعی معیار این مسأله در [۲۹] و [۳۴] برای $\alpha=1$، در جدول ۲,۴ ارائه شده است. هم‌چنین، نتایج عددی تابعی معیار برای $0<\alpha\leq 1$، با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله، در جدول ۲,۴ مشاهده می‌شود. نمودارهای تقریبی توابع حالت و توابع کنترل برای $\alpha=1$، $\alpha=0.9$ و $\alpha=0.8$، به ترتیب در شکل‌های ۳,۴، ۴,۴ و ۵,۴ ترسیم شده است.

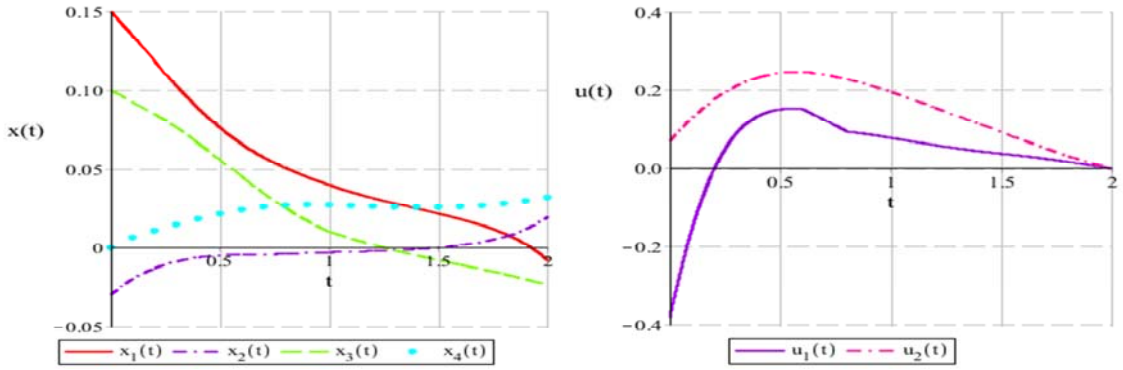
جدول ۲,۴. مقادیر تقریبی J برای مثال ۲,۴ به ازای $N=10$ و $M=6$ برای مقادیر مختلف α و مقایسه با روش‌های موجود دیگر برای $\alpha=1$.

J			
روش [۳۴]	روش [۲۹]	روش توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری	α
0.023806421866716	0.02380354330127229542	0.0238035433017875671	1
– – – –	– – – –	0.0216238750658875253	0.9
– – – –	– – – –	0.0193929791527300242	0.8
– – – –	– – – –	0.0172293683488434594	0.7
– – – –	– – – –	0.0152610667767568015	0.6
– – – –	– – – –	0.0136001422866061390	0.5

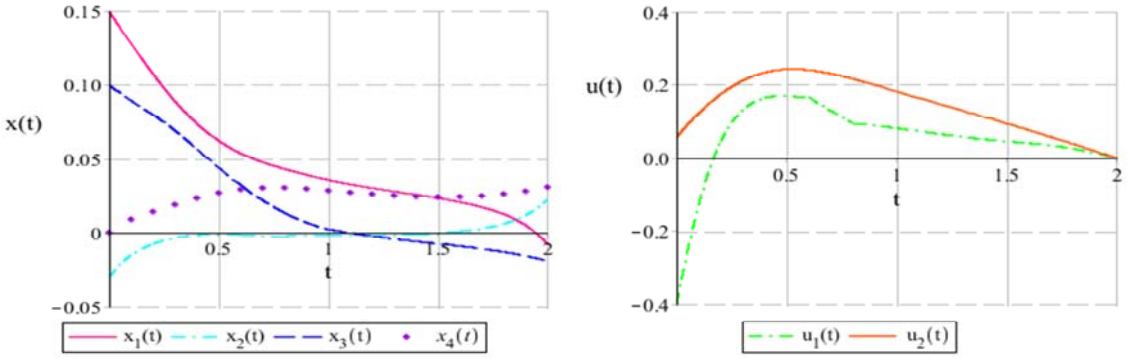


شکل ۳,۴. نمودارهای تقریبی توابع حالت (سمت چپ) و توابع کنترل (سمت راست) برای مثال ۲,۴ به ازای $N=10$ و $M=6$ برای $\alpha=1$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]



شکل ۴،۴. نمودارهای تقریبی توابع حالت (سمت چپ) و توابع کنترل (سمت راست) برای مثال ۲،۴ به ازای $N = 10$ و $M = 6$ برای $\alpha = 0.9$.



شکل ۵،۴. نمودارهای تقریبی توابع حالت (سمت چپ) و توابع کنترل (سمت راست) برای مثال ۲،۴ به ازای $N = 10$ و $M = 6$ برای $\alpha = 0.8$.

مثال ۳.۴. مسأله کنترل بهینه کسری با محدودیت روی متغیرهای حالت و کنترل با زمان انتهایی آزاد به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min \qquad J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (x^2(t) + u^2(t))\, dt,$$

که دینامیک سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbb{D}_\alpha x(t) = -x(t) + u(t),$$

با شرایط

$$x(0) = 1,$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

$$u(t) \geq 0.2, \qquad 0 \leq t \leq t_f,$$

$$(x(t) - 0.2)^2 + (t - 0.5)^2 \geq 0.25,$$

$$\left(x(t_f) - 0.2\right)^2 + \left(t_f - 0.5\right)^2 = 0.25.$$

نتایج عددی تابعی معیار این مسأله برای $0 < \alpha \leq 1$، با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله، در جدول ۳،۴ مشاهده می‌شود. این مثال در [۱۸]، با تقریب انتگرال کسری با سه روش سیمپسون، ذوزنقه‌ای و گرانوالد-لتنیکوف به صورت جداگانه حل شده است و پاسخ‌های عددی تابعی مسأله کنترل بهینه کسری، برای روش ذوزنقه‌ای در جدول ۳،۴ نمایش داده شده است. هم‌چنین، در [۲۲]، یک روش عددی دیگر مبتنی بر تقریب تابعی مسأله کنترل بهینه کسری، ارائه شده است، که نتایج عددی تابعی معیار مسأله با این روش نیز در جدول ۳،۴ نمایش داده شده است. مقادیر تقریبی t_f، در جدول ۴،۴ مشاهده می‌شود. نمودارهای تقریبی تابع حالت و تابع کنترل برای مقادیر مختلف α، به ترتیب در شکل‌های ۶،۴ و ۷،۴ ترسیم شده است.

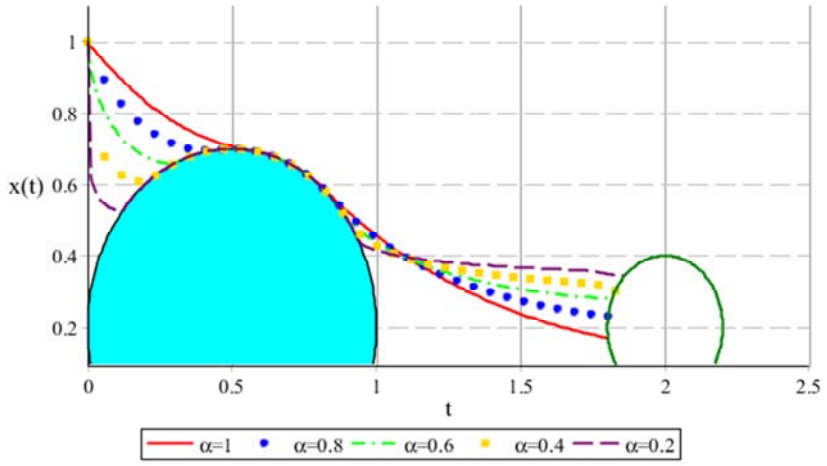
جدول ۳،۴. مقادیر تقریبی J برای مثال ۳،۴ به ازای $N = 40$ و $M = 5$ برای مقادیر مختلف α و مقایسه با روش‌های موجود دیگر.

J			
روش [۲۲]	روش [۱۸]	روش توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری	α
0.346992	0.347298	0.347204672606882481	1
0.334125	0.337716	0.337646747895938126	0.8
0.320013	0.326589	0.326085293155213340	0.6
0.312986	0.315953	0.315906727121759545	0.4
0.307011	0.310177	0.311247181340313261	0.2

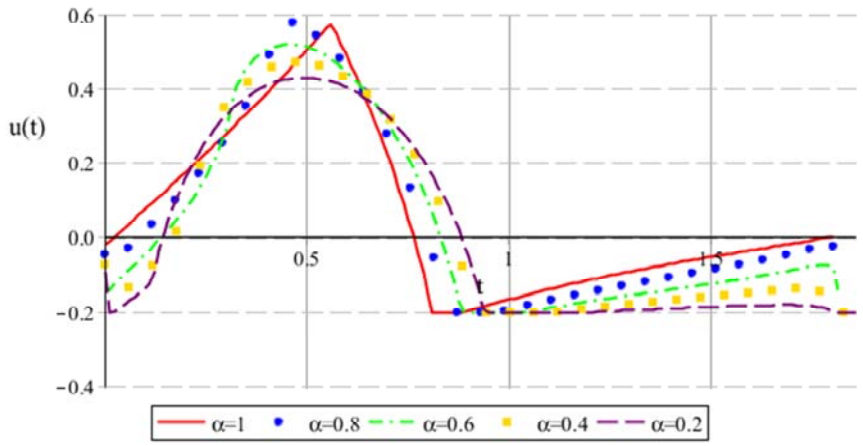
جدول ۴،۴. مقادیر تقریبی t_f برای مثال ۳،۴ به ازای $N = 40$ و $M = 5$ برای مقادیر مختلف α و مقایسه با روش‌های موجود دیگر.

t_f			
روش [۲۲]	روش [۱۸]	روش توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر مرتبه کسری	α
1.800153	1.800942	1.802260616	1
1.807354	1.801012	1.802511173	0.8
1.830777	1.805833	1.814629096	0.6
1.875161	1.820728	1.828159569	0.4
1.892653	1.859632	1.861257991	0.2

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]



شکل ۶،۴. نمودارهای تقریبی تابع حالت $x(t)$ برای مثال ۳،۴ به ازای $N = 40$ و $M = 5$ برای $\alpha = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$.



شکل ۷،۴. نمودارهای تقریبی تابع کنترل $u(t)$ برای مثال ۳،۴ به ازای $N = 40$ و $M = 5$ برای $\alpha = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش هم مکانی مبتنی بر توابع ترکیبی بلاک-پالس و توابع لژاندر کسری از مرتبه α، $0 < \alpha \leq 1$، برای حل یک کلاس مهم از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری با محدودیت روی متغیرهای حالت و کنترل ارائه شده است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

همگرایی روش در فضای هیلبرت و فضای سوبولف اثبات شده است. با استفاده از تکنیک تابع جریمه، محدودیت‌های نامساوی روی متغیرهای حالت و کنترل، به محدودیت‌های تساوی تبدیل شده است. هم‌چنین، با استفاده از عملگرهای مشتق کسری کاپوتو و تأخیر متناظر با توابع ترکیبی یاد شده، مسأله کنترل بهینه اصلی به یک مسأله بهینه‌سازی غیرخطی پارامتری تبدیل شده است. اگر در مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری مورد مطالعه، زمان‌های تأخیر بسیار کوچک باشند، در این صورت، مرتبه توابع بلاک-پالس یعنی N، افزایش پیدا می‌کند. از نقطه نظر محاسباتی، این امر موجب ناکارآمدی روش ارائه شده و افزایش زمان محاسبات می‌شود. البته خاطر نشان می‌شود که در سیستم‌های واقعی این مسأله به ندرت رخ می‌دهد. هنگامی‌که زمان‌های تأخیر بسیار کوچک باشند، می‌توان مسأله کنترل بهینه را غیر تأخیری در نظر گرفت. نتایج عددی به دست آمده، دقت، کارایی و قابلیت کاربرد روش ارائه شده را نشان می‌دهد.

References

1. Y. Ding, Z. Wang and H. Ye, optimal control of a fractional-order HIV-immune system with memory, Control Syst. Technol. IEEE Trans., **20** (3) (2012), 763-769.
2. H. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen and Y.Q. Chen, A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **64**, (2018), 213-231.
3. R. Meng, D. Yin and C.S. Drapaca, A variable order fractional constitutive model of the viscoelastic behavior of polymers, Int. J. Nonlinear Mech., **113** (2019), 171-177.
4. P.A. Naik, J. Zu and K.M. Owolabi, Global dynamics of a fractional order model for the transmission of HIV epidemic with optimal control, Chaos, Solit. Fractals, **138** (2020), 109826.
5. M. Borah, D. Das, A. Gayan, F. Fenton and E. Cherry, Control and anticontrol of chaos in fractional-order models of Diabetes, HIV, Dengue, Migraine, Parkinson's and Ebola virus diseases, Chaos, Solit. Fractals, **153** (1) (2021), 111419.
6. H. Hassani, J.A. Tenreiro Machado and S. Mehrabi, An optimization technique for solving a class of nonlinear fractional optimal control problems: Application in cancer treatment, Appl. Math. Model., **93** (2021), 868-884.
7. A. Atangana and A. Akgül, Analysis of a derivative with two variable orders, AIMS Press, **7** (5) (2022), 7274-7293.
8. K.A. Abro, A. Atangana and J.F. Gómez-Aguilar, A comparative analysis of plasma dilution based on fractional integro-differential equation: an application to biological science, Int. J. Model. Simul., **43** (1) (2023), 1-10.
9. O.P. Agrawal, A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems, Nonlinear Dyn., **38** (2004), 323–337.
10. O.P. Agrawal and D. Baleanu, A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problem, J. Vib. Control, **13** (9-10) (2007), 1269-1281.
11. O. P. Agrawal, Generalized variational problems and Euler-Lagrange equations, Comput. Math. Appl., **59** (5) (2010), 1852-1864.
12. E. Keshavarz, Y. Ordokhani and M. Razzaghi, A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials, J. Vib. Control, **22** (18) (2016), 3889-3903.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

13. K. Rabiei, Y. Ordokhani and E. Babolian, The Boubaker polynomials and their application to solve fractional optimal control problems, Nonlinear Dyn., **88** (2) (2017), 1013-1026.

14. S .Mashayekhi and M. Razzaghi, An approximate method for solving fractional optimal control problems by hybrid functions, J. Vib. Control, **24** (9) (2018), 1621-1631.

15. P. Sahu and S. Saha Ray, Comparison on wavelets techniques for solving fractional optimal control problems, J. Vib. Control, **24** (6) (2018), 1185-1201.

16. M. Salh Ali, M.Shamsi, H. Khosravian-Arab, D. F. M. Torres and F. Bozorgnia, A space-time pseudospectral discretization method for solving diffusion optimal control problems with two-sided fractional derivatives, J. Vib. Control, **25** (5) (2019), 1080-1095.

17. M. Yavari and A. Nazemi, Fractional infinite-horizon optimal control problems with a feed forward neural network scheme, Netw. Comput. Neural. Syst., **30** (2019), 125-147.

18. A. B. Salati, M. Shamsi and D. F. M. Torres, Direct transcription methods based on fractional integral approximation formulas for solving nonlinear fractional optimal control problems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **67** (2019), 334-350.

19. H .Dehestani, Y .Ordokhani and M. Razzaghi, Fractional-order Bessel wavelet functions for solving variable order fractional optimal control problems with estimation error, Int. J. Syst. Sci., **51** (6) (2020), 1032-1052.

20. M. H. Heydari and M. Razzaghi, Piecewise Chebyshev cardinal functions: Application for constrained fractional optimal control problems, Chaos, Solit. Fractals, **150** (2021), 111-118.

21. H. Hassani, J. A. Tenreiro Machado, M. K. Hosseini Asl and M. S. Dahaghin, Numerical solution of nonlinear fractional optimal control problems using generalized Bernoulli polynomials, Optim. Control Appl. Methods, **42** (4) (2021), 1045-1063.

22. Z. Gong, C. Liu, K. L. Teo, S. Wang and Y. Wu, Numerical solution of free final time fractional optimal control problems, Appl. Math. Comput., **405** (15) (2021), 126-270.

23. H. Dehestani, Y. Ordokhani and M. Razzaghi, Pseudo-operational matrix method for the solution of variable-order fractional partial integro-differential equations, Eng. Comput., **37** (2021), 1791–1806.

24. N. Kumar and M. Mehra, Legendre wavelet collocation method for fractional optimal control problems with fractional Bolza cost, Numer. Methods Partial. Differ. Equ., **37** (2) (2021), 1693-1724.

25. S. Sabermahani and Y. Ordokhani, Fibonacci wavelets and Galerkin method to investigate fractional optimal control problems with bibliometric analysis, J. Vib. Control, **27** (2021), 1778-1792.

26. Y. Edrisi-Tabriz, M. Lakestani and M. Razzaghi, Study of B-spline collocation method for solving fractional optimal control problems, Trans. Inst. Meas. Control, **43** (11) (2021), 2425-2437.

27. F. Valian, Y .Ordokhani and M. A. Vali, Numerical solution for a class of fractional optimal control problems using the fractional-order Bernoulli functions, Trans. Inst. Meas. Control, **44** (8) (2022), 1635-1648.

28. P. Rahimkhani, Y. Ordokhani and E. Babolian, An efficient approximate method for solving delay fractional optimal control problems, Nonlinear Dyn., **86** (3) (2016), 1649-1661.

29. S. M. Hoseini and H. R. Marzban, Costate computation by an adaptive pseudospectral method for solving optimal control problems with piecewise constant time lag, J. Optim. Theory Appl., **170** (3) (2016), 735755.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]

30. S. Hosseinpour and A. Nazemi, A collocation method via block-pulse functions for solving delay fractional optimal control problems, IMA. J. Math. Control Inf., **34** (4) (2017), 1215-1237.

31. K. Rabiei, Y. Ordokhani and E. Babolian, Fractional-order Boubaker functions and their applications in solving delay fractional optimal control problems, J. Vib. Control, **24** (15) (2018), 3370-3383.

32. R. Mohammadzadeh and M. Lakestani, Optimal control of linear time-delay systems by a hybrid of block-pulse functions and biorthogonal cubic Hermite spline multiwavelets, Optim. Control Appl. Methods, **39** (1) (2018), 357-376.

۳۳. س. نعمتی و ی. اردوخانی، حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته، پژوهش‌های ریاضی، **جلد ٤**، **شماره ۲**، پاییز و زمستان ۱۳۹۷.

34. X. Tang and H. Xu, Multiple-interval pseudospectral approximation for nonlinear optimal control problems with time-varying delays, Appl. Math. Model., **68** (2019), 137-151.

۳۵. ا. بابلیان، ف. چیت‌ساز و ع. داوری، حل عددی معادلات انتگرال- دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی مرتبه بالا با ضرایب متغیر با استفاده از بسط چبیشف، پژوهش‌های ریاضی، **جلد ٦**، **شماره ٤**، زمستان ۱۳۹۹.

36. F. Kheyrinataj and A. Nazemi, Müntz-Legendre neural network construction for solving delay optimal control problems of fractional order with equality and inequality constraints, Soft. Comput, **24** (2020), 9575-9594.

37. F. Kheyrinataj and A. Nazemi, Fractional Chebyshev functional link neural network-optimization method for solving delay fractional optimal control problems with Atangana-Baleanu derivative, Optim. Control Appl. Methods, **41** (3) (2020), 808-832.

38. S. A. Rakhshan and S. Effati, Fractional optimal control problems with time-varying delay: A new delay fractional Euler-Lagrange equations, J. Franklin Inst. **357** (10) (2020), 5954-5988.

39. C. Liu, Z. Gong, C. Yu, S .Wang and K. L. Teo, Optimal control computation for nonlinear fractional time-delay systems with state inequality constraints, J. Optim. Theory Appl. **191** (2021), 83-117.

40. B .Yuttanan, M. Razzaghi and T. N. Vo, Legendre wavelet method for fractional delay differential equations, Appl. Numer. Math., **168** (2021), 127-142.

41. C. Liu, Z. Gong, K. L. Teo and S. Wang, Optimal control of nonlinear fractional-order systems with multiple time-varying delays, J. Optim. Theory Appl. **193** (1-3) (2022), 856-876.

42. H. R. Marzban and H. Pirmoradian, A direct approach for the solution of nonlinear optimal control problems with multiple delays subject to mixed state-control constraints, Appl. Math. Model., **53** (2018), 189-213.

43. H. R. Marzban and M. Razzaghi, Hybrid functions approach for linearly constrained quadratic optimal control problems, Appl. Math. Model., **27** (6) (2003), 471-485.

44. I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, CA, 1999.

45. S. Kazem, S. Abbasbandy and S. Kumar, Fractional-order Legendre functions for solving fractional-order differential equations, Appl. Math. Model., **37** (2013), 5498–5510.

46. H. R. Marzban and A. Nezami, Analysis of nonlinear fractional optimal control systems described by delay Volterra-Fredholm integral equations via a new spectral collocation method, Chaos Solit. Fractals, **162** (2022), 112499.

47. V. I. Bogachev, Measure Theory, vol. I, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 2007.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-12]