درون‌یابی مقید با استفاده از اسپلاین مکعبی ارمیت

جمشید سعیدیان* ، سجاد جلیلیان
دانشگاه خوارزمی تهران، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

دریافت ۹۵/۰۳/۱۰ پذیرش ۹۶/۱۱/۲۸

چکیده

در این مقاله نوع خاصی از مسئلهٔ درون‌یابی حافظ شکل را بررسی می‌کنیم که در آن داده‌ها به‌کمک دو خم درجهٔ دو، به‌عنوان کران بالا و پایین، محدود شده‌اند. هدف ارائهٔ یک درون‌یاب است که در ضمن هموار بودن در محدودهٔ کران بالا و پایین تحمیل شده به‌وسیلهٔ مسئله بیافتد، به‌عبارت دقیق‌تر، نمودار هندسی درون‌یاب به‌طور کامل بین دو سهمی از پیش معلوم قرار بگیرد. برای حل این مسئله از اسپلاین مکعبی ارمیت استفاده می‌کنیم، این خانواده از اسپلاین‌ها شرط همواری درجهٔ اول را دارند و مجهز به پارامترهای کمکی هستند که می‌توان از آن‌ها برای اعمال محدودیت‌های دیگر کمک گرفت. با اعمال محدودیت‌ها و حل یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی به نمودار جواب می‌رسیم. برای رسیدن به جواب‌های C^2 می‌توانیم از تکنیک مینیمم‌سازی انرژی استفاده کنیم.

واژه‌های کلیدی: حفظ شکل، درون‌یابی مقید، اسپلاین مکعبی ارمیت.

مقدمه

فرض کنیم داده‌های حاصل از یک رخداد طبیعی، آزمایش یا نمونه‌گیری را در اختیار داشته باشیم، ما روی حالت یک‌بعدی متمرکز می‌شویم و فرض می‌کنیم داده‌ها به‌صورت $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ هستند. حال تصور کنیم پدیدهٔ بررسی شده چنان است که از قبل می‌دانیم داده‌ها (y_iها) در محدودهٔ خاصی قرار می‌گیرند، مثلاً کران بالا و پایین عددی مشخصی دارند. اگر چنان‌چه درصدد ارائهٔ تقریب زننده یا درون‌یاب برای این داده‌ها باشیم بدیهی است انتظار داشته باشیم که تابع تقریب زننده یا درون‌یاب نیز این خاصیت کرانداری را حفظ کند. چنین مسئله‌ای در حیطهٔ درون‌یابی یا تقریب حافظ شکل تحلیل و بررسی می‌شود. از مهم‌ترین ویژگی‌ها یا مشخصات (پنهان) دیگری که عموماً در مقالات به آن‌ها پرداخته شده، می‌توان به محدب بودن، یک‌نوایی و مثبت بودن اشاره کرد. در این زمینه [1] و [2] و مراجع آن‌ها منبع خوبی برای بررسی پیشینهٔ این روش‌ها محسوب می‌شوند.

به‌طور کلی حفظ شکل به معنای حفظ ویژگی هندسی (غالباً پنهان در) نقاط داده‌ای است و درون‌یابی حافظ شکل یعنی ساختن یک خم (رویه) که هم نقاط داده‌ای را درون‌یابی کند و هم برخی ویژگی‌های گرافیکی مانند یک‌نوایی، تحدب و یا نامنفی بودن، را که در ذات داده‌ها نهفته است، حفظ کند [1]، [2]، [3]، [4].

مسئلهٔ تقریب حافظ شکل و به‌طور خاص درون‌یابی حافظ شکل از دههٔ ۸۰ مورد توجه متخصصان گرافیک رایانه‌ای و آنالیز عددی قرار گرفته و یکی از تکنیک‌های اساسی طراحی خم و رویه‌ها در طراحی به‌وسیلهٔ رایانه و طراحی صنعتی

1. Computer-Aided Design (CAD)

*نویسنده مسئول jamshid.saeidian@gmail.com

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]

صنعتی به‌وسیلهٔ رایانه[1] است. حفظ شکل نه فقط در بسیاری از شاخه‌های مهندسی مانند طراحی کشتی، طراحی بدنه ماشین، صنایع هوایی، صنایع با سازوکار دقیق مفید است، بلکه نقش مهمی نیز در هواشناسی، انیمیشن و بازی‌های رایانه‌ای ایفا می‌کند. تاکنون چندین زمینه تحقیقاتی در حوزه‌هایی مانند آنالیز داده‌های پیشرفته [5]، پردازش تصویر [6]، تصویرسازی [7]، تکنیک نهان‌نگاری دیجیتال [8] از مدل‌سازی حفظ شکل استفاده کرده‌اند.

برای حل مسئله درون‌یابی حافظ شکل از اسپلاین‌ها به‌طور وسیعی استفاده می‌شود. دلیل این امر را می‌توان در این دانست که یک اسپلاین (به‌عنوان نمونه: اسپلاین مکعبی) در ضمن داشتن ساختار ساده و قابل کنترل این توانایی را دارد که اغلب خصوصیات محلی یک تابع محدب یا یک‌نوا را به‌خوبی انعکاس دهد. تاکنون خانواده‌های متنوعی از اسپلاین‌ها برای مسائل مختلفی از ردهٔ درون‌یابی حافظ شکل استفاده شده‌اند. مسئله‌ای که در این نوشته به آن می‌پردازیم ردهٔ خاصی از درون‌یابی حافظ شکل است که عنوان "درون‌یابی مقید" را برای این مسئله در نظر گرفته‌ایم. فرض کنیم داده‌هایی در اختیار داریم که به لحاظ فیزیکی، به‌صورت پیش فرض بین دو خم قرار گرفته‌اند، یعنی دو تابع داریم که برای داده‌ها نقش کران بالا و کران پایین ایفا می‌کنند. حال به‌دنبال تقریب زننده‌ای در قالب یک درون‌یاب هستیم که نمودار آن نیز بین دو خم کران قرار بگیرد. برای این مسئله نیازمند درون‌یاب مقیدی هستیم که علاوه بر شرایط درون‌یابی، همواری مناسبی نیز داشته باشد. در واقع هر چقدر درون‌یاب هموارتر باشد می‌توان امیدوار بود که خطای حاصل از درون‌یابی کاهش یابد [1]. برای این منظور می‌توان از اسپلاین مکعبی ارمیت استفاده کرد، در این اسپلاین پارامترهای آزاد وجود دارند که معرف مشتق اول تابع اسپلاین در نقاط گره بوده و با قرار دادن شرایطی روی این پارامترها می‌توان به شکل مطلوب موردنظر رسید.

حالت خاصی از این مسئله را آسیم و همکاران در [9] بررسی کرده‌اند. در آن پژوهش، تنها یک کران پایین خطی را در نظر گرفته‌اند که ما در این نوشته سعی کرده‌ایم هم کران بالا و هم کران پایین تا درجهٔ دو را بررسی کنیم.

مباحث مطرح شده در این مقاله به‌این صورت است که:

در بخش دوم و در ابتدا به بیان مسئله مورد بحث می‌پردازیم، سپس در بخش سوم از اسپلاین مکعبی ارمیت برای به‌دست آوردن درون‌یاب مقید استفاده می‌کنیم. در بخش چهارم سعی بر این است که درجهٔ همواری اسپلاین (به‌دست آمده در بخش سوم) را بالاتر ببریم و با استفاده از شرایط پیوستگی مشتق دوم و اضافه کردن این قیدهای اضافی به مسئله به یک اسپلاین مکعبی ارمیت مقید C^2 برسیم. در بخش پنجم با استفاده از تکنیک کمینه کردن انرژی خم از میان جواب‌های مختلف به‌دنبال جواب هموارتری هستیم که علاوه بر برقرار بودن شرایط قبل خطای کم‌تری نیز داشته باشد. در نهایت بخش ششم به مثال‌ها و مقایسهٔ جواب‌های C^1 و C^2 اختصاص یافته است.

طرح مسئله و ایدهٔ حل

مسئلهٔ اصلی بدین‌صورت قابل بیان است:

مسئلهٔ ۱. چگونه می‌توان داده‌هایی را که بین دو خم محصور شده‌اند با یک چندجمله‌ای هموار درون‌یابی کرد؟

به بیان ریاضی و به‌طور معادل:

برای داده‌های $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ و خم‌های $f_1(x)$ و $f_2(x)$ درون‌یاب $g(x)$ را چنان ارائه دهید که نمودار $g(x)$ بین نمودارهای $f_1(x)$ و $f_2(x)$ قرار بگیرد.

1. Computer-Aided Manufacturing (CAM)

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]

برای پاسخ دادن به این سؤال می‌توانیم از تکنیک‌های حافظ شکل استفاده کنیم، شرایط مقید بودن بین دو خم به‌صورت یک تکنیک حافظ شکل به‌خودی خود در دسترس نیست، اما برای این منظور می‌توان از شرایط مثبت بودن کمک گرفت [10]. در مورد چندجمله‌ای درون‌یاب، اسپلاین‌های مکعبی یکی از بهترین گزینه‌ها برای درون‌یابی هستند. بنابراین در این‌جا هدف پیدا کردن تابع اسپلاین مکعبی $S(x)$ است که

$$f_1(x) \le S(x) \le f_2(x),$$

یعنی اسپلاین مکعبی $S(x)$ بین دو خم $f_1(x)$ و $f_2(x)$ قرار گیرد. (در این مقاله فرض بر این است که توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ از درجهٔ دو و به‌صورت $f_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$ و $f_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$ باشد.)

مسئله مقید را به‌صورت دو مسئله حفظ مثبت بودن بیان می‌کنیم و با استفاده از این شرایط اسپلاین مقید مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور دو تابع

$$\bar{S}_1(x) := S(x) - f_1(x), \quad \bar{S}_2(x) := f_2(x) - S(x),$$

را معرفی می‌کنیم و به‌دنبال شرایطی هستیم که این دو تابع هم‌زمان نامنفی باقی بمانند. در واقع با نامنفی بودن این دو تابع به همان شرایط مقید بودن تابع $S(x)$ می‌رسیم.

اسپلاین مکعبی ارمیت C^1

فرض کنیم نقاط داده‌ای $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ و توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را در اختیار داریم به‌طوری‌که

$$f_1(x_i) \le y_i \le f_2(x_i), \quad i=1,\dots,n.$$

هدف پیدا کردن تابع درون‌یاب هموار $S(x)$ روی بازهٔ $[x_1, x_n]$ به‌نحوی است که $f_1(x) \le S(x) \le f_2(x)$.

برای تعریف اسپلاین مکعبی ارمیت از نمادگذاری‌های $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\delta_i = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$ و $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$ برای $i=1,\dots,n-1$ استفاده می‌کنیم.

روی بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ اسپلاین مکعبی ارمیت S را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$S_i(x) = y_i + m_i h_i t + \left(3\delta_i - 2m_i - m_{i+1}\right) h_i t^2 + \left(m_i + m_{i+1} - 2\delta_i\right) h_i t^3, \qquad (۱)$$

که در آن $m_i = S'(x_i)$ شیب‌های نامعلومی هستند که به‌وسیلهٔ شرایطی که روی تابع اعمال می‌کنیم محاسبه می‌شوند. در واقع این m_iها پارامترهایی برای کنترل شکل هستند. در لم ۱ شرایط لازم و کافی برای این‌که چندجمله‌ای درجه سه روی یک بازه هموار مثبت باقی بماند ارائه شده است

لم۱. [10] تابع $S_i(x)$ روی بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ مثبت است اگر $(m_i, m_{i+1}) \in R_1$ که در آن

$$R_1 = \left\{ (x,y) \,\middle|\, x \ge \frac{-3y_i}{h_i}, y \le \frac{3y_{i+1}}{h_i} \right\},$$

با اعمال این شرایط روی دو تابع $\bar{S}_1(x) = S(x) - f_1(x)$ و $\bar{S}_2(x) = f_2(x) - S(x)$ روی هر زیربازه به شرایطی برای m_iها می‌رسیم که با انتخاب m_iهایی که در این شرایط صدق کنند، تابع اسپلاین مکعبی ارمیت $S(x)$ همواره بین دو خم $f_1(x)$ و $f_2(x)$ قرار می‌گیرد. این شرایط در قضیهٔ ۲ آورده شده است:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]

قضیهٔ ۲. شرط کافی برای این‌که اسپلاین مکعبی ارمیت $S(x)$ بین دو تابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ مقید باشد یعنی $f_1(x) \le S(x) \le f_2(x)$ ، این است که مجموعه مقادیر m_i برای $i=1,\dots,n$ در دستگاه نامعادلات زیر صدق کنند:

$$m_1 \ge \frac{3\left(a_1x_1^2+b_1x_1+c_1-y_1\right)}{h_1}+2a_1x_1+b_1, \qquad (۲)$$

$$m_1 \le \frac{3\left(a_2x_1^2+b_2x_1+c_2-y_2\right)}{h_1}+2a_2x_1+b_2,$$

$$m_i \le \min\{\frac{3\left(a_2x_i^2+b_2x_i+c_2-y_i\right)}{h_i}+2a_2x_i+b_2, \frac{-3\left(a_1x_{i-1}^2+b_1x_{i-1}+c_1-y_i\right)}{h_{i-1}}-4a_1x_{i-1}-2b_1-2a_1h_{i-1}\},$$

$$m_i \ge \max\{\frac{3\left(a_1x_i^2+b_1x_i+c_1-y_i\right)}{h_i}+2a_1x_i+b_1 \frac{-3\left(a_2x_{i-1}^2+b_2x_{i-1}+c_2-y_i\right)}{h_{i-1}}-4a_2x_{i-1}-2b_2-a_2h_{i-1}\},$$

$$m_n \ge \frac{-3\left(a_2x_{n-1}^2+b_2x_{n-1}+c_2-y_n\right)}{h_{n-1}}-4a_2x_{n-1}-2b_2-a_2h_{n-1},$$

$$m_n \le \frac{-3\left(a_1x_{n-1}^2+b_1x_{n-1}+c_2-y_n\right)}{h_{n-1}}-4a_1x_{n-1}-2b_1-a_1h_{n-1}.$$

برهان. کافی است با استفاده از لم (۱) شرایط منفی نبودن توابع

$$\bar{S}_1(x)=S(x)-f_1(x) \text{ و } \bar{S}_2(x)=f_2(x)-S(x)$$

را روی هر زیربازه به‌طور جداگانه اعمال کنیم.

اگر m_iها در نامساوی‌هایی که در قضیهٔ (۲) تعریف شده‌اند صدق کنند، آن‌گاه اسپلاین مکعبی ارمیت موردنظر مقید خواهد شد.

اسپلاین مکعبی ارمیت C^2

در بخش قبل با استفاده از قضیهٔ (۲) شرایطی را برای مجموعهٔ $\{m_i\}_{i=1}^n$ به‌دست آوردیم که تحت این شرایط اسپلاین مکعبی ارمیت حاصل C^1 خواهد بود. در این بخش قصد داریم همواری تابع اسپلاین مکعبی ارمیت را تا C^2 افزایش دهیم. برای این منظور با استفاده از شرط پیوستگی مشتق دوم روی تابع $S(x)$، شرایط تکمیلی (۳) را برای $i=1,\dots,n-2$، به دستگاه نامعادلات قبلی اضافه خواهیم کرد:

$$\frac{1}{h_i}m_i+\left(\frac{2}{h_i}+\frac{2}{h_{i+1}}\right)m_{i+1}+\frac{1}{h_{i+1}}m_{i+2}=\frac{3}{h_i}\delta_i+\frac{3}{h_{i+1}}\delta_{i+1}, \qquad (۳)$$

معادلهٔ (۳) به‌همراه دستگاه نامعادلات (۲) یک دسته قید برای متغیرهای m_i ارائه می‌دهند که به‌وسیلهٔ برنامه‌ریزی خطی قابل حل هستند. در واقع با اضافه کردن قیدهای معادلهٔ (۳) ناحیهٔ فضای شدنی m_iها محدودتر و جواب‌های به‌دست آمده از ناحیه، پیوستگی اسپلاین مکعبی ارمیت مقید را تا مرتبه C^2 افزایش می‌دهد.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]

جواب‌های مبتنی بر کمینه‌کردن انرژی خم

جواب‌هایی که تاکنون در دو بخش قبل پیدا کردیم دارای پیوستگی C^1 و C^2 بودند حال به‌دنبال اسپلاین مکعبی ارمیت مقیدی هستیم که علاوه بر پیوستگی C^2، دارای انحنا و خمیدگی کم‌تری باشد. در حقیقت از میان جواب‌های موجود، به‌دنبال جواب بهینه‌ای هستیم که دارای همواری بیش‌تری نسبت به جواب‌های قبل باشد. برای رسیدن به این هدف از روش کمینه کردن انرژی خم استفاده می‌کنیم. از این روش قبلاً در [11] برای به‌دست آوردن اسپلاین درون‌یاب استفاده شده است. فرمول انرژی خم بدین‌صورت است:

$$E=\int_{x_1}^{x_n}\frac{S''^2(x)}{\left(1+\left[S'^2(x)\right]\right)^{\frac{5}{2}}}, \tag{۴}$$

برای به‌دست آوردن جواب بهینه باید فرمول (۴) را مشروط بر قیود (۲) و (۳) کمینه کنیم. اما از آن‌جا که محاسبهٔ این فرمول، در بیش‌تر موارد، کار آسانی نیست از یک فرمول انرژی ساده‌تر که مبتنی بر ناپیوستگی مشتق دوم است استفاده می‌کنیم. در [12] این فرمول به‌صورت (۵) معرفی شده است:

$$E_D=\sum_{k=2}^{n-1}\left(S''(x_k^-)-S''(x_k^+)\right)^2, \tag{۵}$$

به‌جای استفاده از فرمول (۵) می‌توان عبارت ساده‌تری که بر اساس قدرمطلق ناپیوستگی‌های مشتق دوم است به‌کار برد.

$$\tilde{E}_D=\sum_{k=2}^{n-1}\left|S''(x_k^-)-S''(x_k^+)\right|. \tag{۶}$$

حال متغیرهای کمکی s_kرا به‌گونه‌ای معرفی می‌کنیم که قدرمطلق ناپیوستگی مشتق دوم روی هر بازه کم‌تر از مقدار متغیر کمکی روی همان بازه شود، یعنی داریم:

$$\begin{aligned} &S''(x_k^-)-S''(x_k^+)\le s_k, \\ &-\left[S''(x_k^-)-S''(x_k^+)\right]\le s_k, \end{aligned} \tag{۷}$$

بنابراین فرمول $\tilde{E}_D$را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$\tilde{E}_D=\sum_{k=2}^{n-1}s_k, \tag{۸}$$

اکنون برای به‌دست آوردن جواب بهینه ابتدا تابع هدف $\tilde{E}_D$، که در فرمول (۸) معرفی شده است، را مشروط بر قیود زیر کمینه می‌کنیم:

- قیدهای قدرمطلق در معادله (۶)
- قیدهای مقید بودن در معادله (۲)

در این‌جا با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی مواجه هستیم و جوابی که از این مسئله به‌دست می‌آید بدین‌صورت است:

$$F^*=\left(m_0,m_1,\ldots,m_n,s_1,\ldots,s_{n-1}\right)^t$$

با جای‌گذاری این جواب در تابع هدف $\tilde{E}_D$ در فرمول (۸) مقدار تابع هدف در نقطه بهینه به‌دست می‌آید. اگر این مقدار بسیار کوچک باشد آن‌گاه می‌توان امیدوار بود که جوابی با پیوستگی C^2 برای مسئله کمینه‌کردن انرژی داشته باشیم و در این حالت با انتخاب تابع هدف فرمول (۴) یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را مشروط بر قیود زیر را حل می‌کنیم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]

- قیدهای مقید بودن در معادلهٔ (۲)
- قیدهای پیوستگی مشتق دوم در معادلهٔ (۳)

برای حل این مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی از جواب F^* که از حل برنامه‌ریزی خطی در مرحله قبل به‌دست آمد به‌عنوان حدس اولیه استفاده می‌کنیم.

مثال‌ها و نتیجه‌گیری

مثال‌های این بخش با استفاده از نرم‌افزار متلب[1] اجرا شده‌اند. لازم به ذکر است برای محاسبهٔ خطای هر مثال ابتدا بیش‌ترین اختلاف تابع اصلی و تابع درون‌یاب از نظر قدرمطلق روی هر زیربازه با استفاده از گسسته‌سازی مطلوب و نرم بینهایت برداری محاسبه شده و سپس بیش‌ترین مقدار به‌دست آمده از میان مقادیر خطای زیربازه‌ها را به‌عنوان خطای روش درنظر گرفته شده است. برای گزارش خطا تعداد نقاط هر زیربازه را $n=۱۰۰$ اختیار کرده‌ایم.

جدول ۱. داده های مربوط به مثال اول

x_i	0	1	2	3	4	5	6
f_i	0	-0.5459	-0.8884	-1.0625	-1.0528	-0.7757	-0.1133
x_i	7	8	9	10	11	12	
f_i	0.9504	2.1658	3.0402	3.1516	2.4908	1.4597	

مثال ۶,۱. فرض کنیم داده‌های موجود در جدول ۱ را در اختیار داریم. این داده‌ها از طریق افراز یک‌نواخت تابع

$$f(x)=\frac{xe^{\frac{-(x-4)^2}{10}}}{10e^{(3-x)}}-\frac{3xe^{\frac{-2(x-4)}{10}}}{10}$$

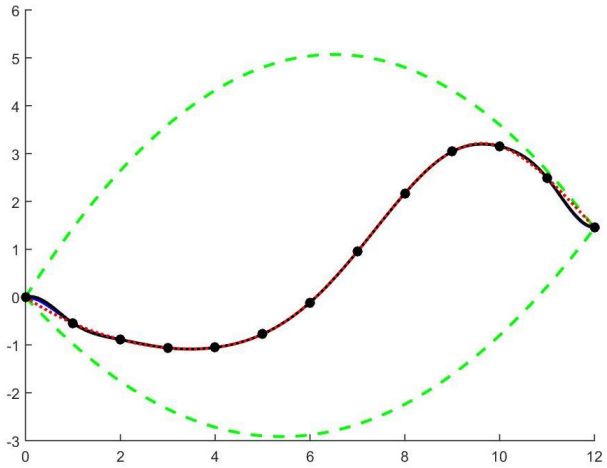
روی بازهٔ $[0,12]$ به‌دست آمده‌اند. در این مثال قصد داریم داده‌های جدول ۱ را طوری درون‌یابی کنیم که درون‌یاب حاصل به تابع $f_1(x)=0/1x^2-1/08x$ به‌عنوان کران پایین و تابع $f_2(x)=-0/12x^2-1/56x$ به‌عنوان کران بالا محدود باشد. جواب C^1 برای این مثال در شکل ۱ آمده است. خطایی که از این روش به‌دست آمده برابر ۰/۱۷۳۳ است. هم‌چنین جواب C^2 را که از روش کمینه کردن انرژی به‌دست می‌آید می‌توان در شکل ۲ مشاهده کرد. خطای به‌دست آمده از این روش نیز برابر با ۰/۰۱۲۰ است. آن‌چه که از مقایسه خطای این دو روش برمی‌آید این است که روش کمینه کردن انرژی ضمن افزایش درجه همواری، خطای کم‌تری نیز نسبت به‌روش دیگر دارد بنابراین می‌تواند انتخاب مناسب‌تری برای به‌دست آوردن اسپلاین مکعبی ارمیت مقید باشد. لازم به ذکر است که در هر دو شکل تابع اصلی با نقاط متوالی ...، تابع درون‌یاب با خط ممتد، توابع کران پایین و بالا با خط چین -- و نقاط داده‌ای با نقاط مشکی نمایان هستند.

برای مقایسهٔ جواب‌های به‌دست آمده داده‌ها را با استفاده از نرم‌افزار متلب و با تنظیم پیش فرض اسپلاین حل کرده‌ایم، جدول ۲ خطاها را به‌تفکیک روش و زیربازه‌ها ارائه می‌دهد.

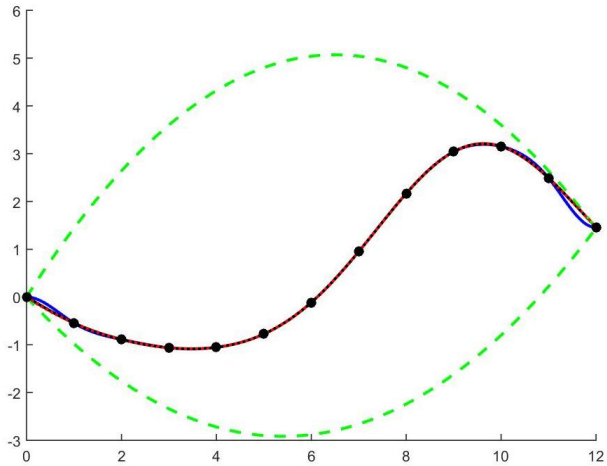
مشاهده می‌شود که روش C^2 نسبت به‌روش اسپلاین معمولی دارای خطای کم‌تری است. البته طبق این جدول روش اسپلاین معمولی با روش C^1 رقابت می‌کند، با این‌حال بر اساس مشاهدات تجربی روی داده‌های متنوع مشاهده می‌شود که برای مثال‌هایی که کران بالا و پایین انتخاب شده به داده‌ها نزدیک‌تر باشند، روش‌های پیشنهادی ارجعیت چشم‌گیری نسبت به اسپلاین متلب دارند.

1. MATLAB MathWorks

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]



شکل ۱. اسپلاین مکعبی ارمیت مقید C^1 برای مثال اول



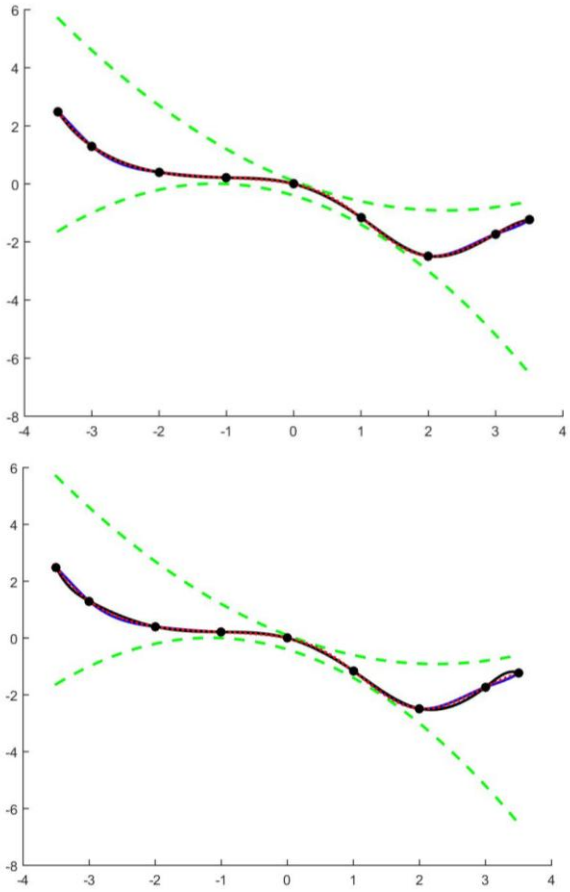
شکل ۲. اسپلاین مکعبی ارمیت مقید C^2 برای مثال اول

جدول ۲. مقایسه خطاهای مربوط به مثال اول

$[x_i, x_{i+1}]$	روش C^1	روش C^2	روش اسپلاین متلب
[0,1]	0.1584	0.0120	0.1112
[1,2]	0.0425	0.0033	0.0299
[2,3]	0.0112	0.0007	0.0078
[3,4]	0.0033	0.0005	0.0024
[4,5]	0.0008	0.0001	0.0005
[5,6]	0.0003	0.0005	0.0003
[6,7]	0.0014	0.0012	0.0014
[7,8]	0.0002	0.0007	0.0003
[8,9]	0.0027	0.0010	0.0030
[9,10]	0.0142	0.0018	0.0153
[10,11]	0.0456	0.0010	0.0497
[11,12]	0.1733	0.0009	0.1884

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]

مثال ۲. در این مثال قصد داریم داده‌های جدول ۳، که مربوط به تابع $f(x) = -0/5xe^{sin(x)}$ روی بازه [-3.5, 3.5] است، را طوری درون‌یابی کنیم که درون‌یاب بین تابع $f_1(x) = -0/3x^2 - 0/7x - 0/4$ به‌عنوان کران پایین و تابع $f_2(x) = 0/2x^2 - 0/9x + 0/1$ به‌عنوان کران بالا قرار گیرد. تفاوت مشهود این مثال با مثال قبل در این است که کران‌های بالا و پایین به داده‌های جدول نزدیک هستند. جواب C^1 را که برای این مثال به‌دست آمده در شکل ۳ می‌توان مشاهده کرد. خطای حاصل از این روش برابر با ۰/۱۶۶۲ است که کمی زیاد به نظر می‌رسد. در شکل ۴ می‌توان جواب C^2 این مثال را مشاهده کرد، این جواب دارای خطای ۰/۰۵۳۲ است نسبت به‌روش C^1 به‌طور چشم‌گیری کاهش یافته است. لازم به ذکر است که در هر دو شکل تابع اصلی با نقاط متوالی ...، تابع درون‌یاب با خط ممتد، توابع کران پایین و بالا با خط چین -- و نقاط داده‌ای با نقاط مشکی نمایان هستند.



شکل ۳. اسپلاین مکعبی ارمیت مقید C^1 برای مثال دوم

جدول ۳. داده‌های مربوط به مثال دوم

x_i	-3.5	-3	-2	-1	0	1	2	3	3.5
f_i	2.4853	1.3026	0.4028	0.2155	0	-1.1599	-2.4826	-1.7273	-1.2322

مقایسهٔ خطای روش‌های پیشنهادی با روش اسپلاین پیش‌فرض متلب در جدول ۴ آمده است.

دو نتیجهٔ تجربی ذیل قابل بیان هستند:

- استفاده از روش کمینه‌سازی انرژی در بهبود خطای اسپلاین مقید درون‌یاب تأثیر فراوانی دارد.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]

- روش اسپلاین مقید با بهره بردن از تکنیک کمینه‌سازی انرژی ابزاری مفید برای درون‌یابی داده‌های مقید ارائه می‌دهد که نسبت به اسپلاین معمولی (پیش فرض متلب) خطاهای کم‌تری دارد.

جدول ۴. مقایسهٔ خطاهای مربوط به مثال دوم

$[x_i, x_{i+1}]$	روش C^1	روش C^2	روش اسپلاین متلب
[-3.5, -3]	0.1241	0.0413	0.0676
[-3,-2]	0.0782	0.0228	0.0501
[-2,-1]	0.0277	0.0131	0.0086
[-1,0]	0.0297	0.0247	0.0190
[0,1]	0.0575	0.0507	0.0445
[1,2]	0.0751	0.0532	0.0354
[2,3]	0.1222	0.0386	0.0332
[3,3.5]	0.1662	0.0405	0.0651

منابع

1. Kvasov B., Kvasoc B., "Methods of shape-preserving spline approximation", Singapore: World Scientific (2000).
2. Goodman T. N. T., "Shape preserving interpolation by curves, in: J. Leversity, I. Anderson, J. Mason (Eds.), Algorithms for Approximation IV}", University of Huddersfield, UK (2002) 24-35.
3. Han X., "Convexity-preserving piecewise rational quartic interpolation", SIAM Journal on Numerical Analysis, 46 (2) (2008) 920-929.
4. Sarfraz M., Hussain M. Z., Hussain M., "Shape-preserving curve interpolation", International Journal of Computer Mathematics, 89 (1) (2012) 35-53.
5. Costantini P., Francesca P., "Shape preserving histogram approximation", Advances in Computational Mathematics, 26 (2007) 205-230.
6. Sim K. S., Wee M. Y., Lim W. K., "Image Signal-to-Noise Ratio Estimation Using Shape-Preserving Piecewise Cubic Hermite Autoregressive Moving Average Model", Microscopy Research and Technique, 71 (10) (2008) 710-720.
7. Sarfraz M., Hussain M. Z., Chaudhry F. S., "Shape preserving data visualization with cubic splines", Proceedings of the 8th Joint Conference on Information Sciences, 1-3 (2005) 1661-1664.
8. Shao C. Y., Wang H. L., Niu X. M., Wang X. T., "A shape-preserving method for watermarking 2D vector maps based on statistic detection", IEICE Transaction on Information and Systems, E89D(3) (2006) 1290-1293.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]

9. Asim M. R., Brodlie K. W., "Curve drawing subject to positivity and more general constraints", Computers Graphics, 27 (4) (2003) 469-485.

10 Schmidt J. W., Hess W., "Positivity of cubic polynomials on intervals and positive spline interpolation", BIT Numerical Mathematics, 28 (2) (1998) 340-352.

11. Burmeister W., Hess W., Schmidt J. W., "Convex spline interpolants with minimal curvature", Computing, 35 (2) (1985) 219-229.

12. Wolberg G., Alfy I., "An energy-minimization framework for monotonic cubic spline interpolation", Journal of Computational and Applied Mathematics, 143 (2) (2002) 145-188.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-06]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.4.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.35]