

## مطالعه حدسی از اردوش روی اعداد رمزی گراف‌ها

غلامرضا امیدی، لیلا ماهرانی\*

دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی

پژوهشگاه دانش‌های بنیادین (IPM)

دریافت ۹۷/۰۸/۲۳ پذیرش ۹۹/۰۳/۱۰

### چکیده

عدد رمزی  $R(H, G)$  به ازای گراف‌های داده شده  $H$  و  $G$ ، کوچکترین عدد طبیعی  $n$  تعریف می‌شود به‌طوری‌که در هر ۲-رنگ‌آمیزی یالی گراف کامل از مرتبه  $n$  با دو رنگ قرمز و آبی، بتوان زیرگراف تکرنگ یک‌ریخت با  $H$  از رنگ قرمز یا زیرگراف تکرنگ یک‌ریخت با  $G$  از رنگ آبی یافت. در سال ۱۹۸۳ اردوش حدس زد که ثابت  $c > 0$  موجود است به‌طوری‌که برای هر گراف  $m$  یالی و بدون رأس تنها  $G$ ، داریم  $R(G, G) \leq 2^{c\sqrt{m}}$ . این حدس در سال ۲۰۱۱ توسط سوداکو اثبات شد. ما در این مقاله با قرار دادن شرایط مناسب، نتیجه سوداکو را به گراف‌های  $G1$  و  $G2$  تعمیم می‌دهیم. همچنین با قرار دادن  $G2 = Kl + H$  و  $G1 = Kn$  که در آن  $H$  یک گراف تنک است، نتیجه‌ی مشابهی برای  $R(G1, G2)$  به دست می‌آوریم.

**واژه‌های کلیدی:** عدد رمزی، عدد رمزی قطری، حدس اردوش

### ۱- مقدمه

عدد رمزی  $R(H, G)$  به ازای گراف‌های داده شده  $H$  و  $G$ ، کوچکترین عدد طبیعی  $n$  تعریف می‌شود به‌طوری‌که در هر ۲-رنگ‌آمیزی یالی گراف کامل از مرتبه  $n$  با دو رنگ قرمز و آبی، بتوان زیرگراف یک‌ریخت با  $H$  از رنگ قرمز یا زیرگراف یک‌ریخت با  $G$  از رنگ آبی یافت.  $R(G, G)$  را عدد رمزی قطری گراف  $G$  یا به اختصار عدد رمزی گراف  $G$  می‌گوییم و با  $R(G)$  نمایش می‌دهیم. وجود این عدد طبق قضیه‌ی کلاسیک رمزی تضمین شده است [۹]. تعداد رئوس گراف را مرتبه‌ی گراف می‌گوییم. مکمل گراف  $G$  را با نماد  $G^c$  نشان می‌دهیم.

\* نویسنده مسئول: maherani@ipm.ir

در سال ۱۹۳۵ اردوش و زکرس برای اولین بار از قضیه‌ی رمزی در نظریه‌ی گراف استفاده کردند [۶]. نتایج و تکنیک‌های آن در شاخه‌های دیگر ریاضی مانند نظریه مجموعه‌ها، توپولوژی، هندسه، منطق، نظریه اطلاعات و ... به کار می‌روند [۱۰].

نظریه‌ی رمزی شاخه‌ای از ریاضیات است که به افتخار منطق دان انگلیسی، فرنک رمزی، به این نام نامگذاری شده است. پایه‌ی این نظریه، مطالعه‌ی وجود زیرساختار مشخص در یک کلاس افزار، به ازای هر افزار یک ساختار به اندازه‌ی کافی بزرگ است. به طور کلی این قضیه بیان می‌کند که، هرگاه زیرمجموعه‌های  $r$  عضوی یک مجموعه‌ی به اندازه‌ی کافی بزرگ  $S$  را به  $q$  کلاس افزای کنیم، یک زیرمجموعه‌ی  $p$  عضوی از  $S$  وجود دارد که تمام زیرمجموعه‌های  $r$  عضوی آن در یک کلاس قرار گیرند. این قضیه تعمیمی از اصل لانه کبوتری نیز است.

با این که تعیین مقدار دقیق اعداد رمزی دشوار است ولی تاکنون اعداد رمزی کلاس‌های مختلفی از گراف‌ها تعیین شده است [۸]. برای بسیاری از گراف‌هایی که هنوز مقدار دقیق اعداد رمزی محاسبه نشده، حدس‌ها و کران‌های زیادی وجود دارد. یکی از مسئله‌های جالب در نظریه رمزی، محاسبه‌ی اعداد رمزی قطری گراف‌ها است. در تعیین عدد رمزی قطری گراف‌ها، شاید پیچیده‌ترین مسئله، تعیین عدد رمزی  $R(K_n)$  است. این عدد اولین بار توسط اردوش و زکرس در سال ۱۹۳۵ مطالعه شد که در این میان می‌توان به قضیه‌ی زیر اشاره کرد.

**قضیه ۱** [۶] برای هر عدد صحیح و مثبت  $n$ ,  $R(K_n) \leq 2^{2^n}$ .

اگرچه در نگاه اول این کران بسیار بزرگ به نظر می‌رسد ولی اردوش در سال ۱۹۴۷ موفق شد با روش‌های احتمالاتی یک کران پایین نمایی نیز برای  $R(K_n)$  ارایه کند [۳].

**قضیه ۲** [۳] اگر  $n > 2$  عدد صحیح و مثبت باشد، آنگاه  $R(K_n) > 2^{\frac{n}{2}}$ .

تلاش‌های بسیار زیادی برای بهتر کردن این دو کران انجام شده است ولی بهترین کران توسط کتلن در سال ۲۰۱۰ به دست آمده است [۲].

**قضیه ۳** [۲] عدد ثابت و مثبت  $c$  وجود دارد به طوری که  $R(K_{n+1}) \leq n^{-c \frac{\log n}{\log \log n}} \binom{2^n}{n}$

مسئله‌ی جالب دیگر در رابطه با عدد رمزی قطری گراف‌ها، تعیین عدد رمزی گراف‌های  $m$  یالی است. مسئله‌ی مورد نظر در این زمینه توسط اردوش و گراهام مطرح شد [۵]. هدف آن‌ها یافتن گرافی با بیشترین عدد رمزی در بین تمام گراف‌های  $m$  یالی بود. آن‌ها حدس زدند این گراف، گراف کامل با  $\binom{m}{2} = m$  یال است ولی نتوانستند ادعای خود را ثابت کنند. طبق قضیه‌ی ۲، عدد رمزی گراف کامل  $m$  یالی از مرتبه‌ی  $n$ ، نمایی و طبق قضیه‌ی ۱، حداقل برابر  $2^{2^n}$  است. از طرفی برای  $n$ ‌های به اندازه‌ی کافی بزرگ،  $n$  به طور تقریبی مضربی از  $\sqrt{m}$  است. در نتیجه اردوش حدس زیر را مطرح کرد.

حدس ۴ [۴] ثابت  $\circ >$  وجود دارد به‌طوری‌که برای هر گراف  $G$  با  $m$  یال و بدون رأس تنها داریم،  $R(G) \leq 2^{c\sqrt{m}}$ .

الون و همکارانش در سال ۲۰۰۳ با اثبات قضیه‌ی زیر، درستی حدس را برای گراف‌های دوبخشی ثابت کردند.

قضیه ۵ [۱] فرض کنید  $G$  گراف دوبخشی با  $m$  یال و بدون رأس تنها است. در این صورت خواهیم داشت،  $R(G) \leq 2^{16\sqrt{m}+1}$ .

همچنین آن‌ها در مقاله‌ی خود حکم زیر را برای هر گراف دلخواه اثبات کردند. در این مقاله تابع  $\log x$  در مبنای ۲ است.

قضیه ۶ [۱] اگر  $G$  گراف  $m$  یالی و بدون رأس تنها باشد، آن‌گاه  $R(G) \leq 2^{c\sqrt{m} \log m}$ ، که در آن  $c$  ثابتی مثبت است.

آن‌ها در اثبات‌هایشان از روش انتخاب تصادفی وابسته استفاده کرده‌اند که یک تکیک قدرتمند مبتنی بر روش‌های احتمالاتی است. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد این تکیک می‌توان به [۷] رجوع کرد.

در نهایت سوداکو موفق شد در سال ۲۰۱۱ درستی حدس ۴ را اثبات کند [۱۱].

قضیه ۷ [۱۱] فرض کنید  $G$  گرافی  $m$  یالی و بدون رأس تنها باشد. در این صورت داریم،  $R(G) \leq 2^{250\sqrt{m}}$ .

هدف در این مقاله اثبات دو قضیه‌ی زیر است. قضیه‌ی ۸ تعمیمی از قضیه‌ی ۷ است. قضیه‌ی ۹ را از قضیه‌ی ۸ و نتیجه‌ای در [۱] که در مورد اعداد رمزی گراف‌های با درجه ماکزیمم محدود و گراف کامل است، به دست می‌آوریم. اثبات قضیه‌های ۸ و ۹ در بخش آخر آورده شده‌اند.

قضیه ۸ فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  گراف‌هایی به ترتیب از مرتبه‌ی  $n_1$  و  $n_2$  و بدون رأس تنها هستند. همچنین فرض کنید  $\{n_1, n_2\} = \max\{n_1, n_2\}$  و  $m = \log^{\frac{1}{2}} m$  عدد صحیح و مثبتی است که در شرط زیر  $27\sqrt{m} \geq n - 27\sqrt{m}$  صدق می‌کند. اگر برای هر  $\alpha \leq \frac{\log^{\frac{1}{2}} m}{\alpha}$  دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. برای هر  $1 \leq i \leq 2$ ، زیرمجموعه‌ی  $T_i \subseteq V(G_i)$  وجود دارد به‌طوری‌که،  

$$\Delta(G_i - T_i) \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha} \text{ و } \alpha\sqrt{m}$$

۲. برای هر  $1 \leq i \leq 2$ ، زیرمجموعه‌ی  $R_i \subseteq V(G_i)$  وجود دارد به‌طوری‌که،  

$$\max\{R(G'_1, G'_2), R(G_1, G'_2)\} \leq m^{\frac{1}{2}}$$
 و با فرض  $G''_i = G_i - R_i$   

$$236\sqrt{m}.$$

$$R(G_1, G_2) \leq 225\sqrt{m}$$

برای دو گراف دلخواه  $G$  و  $H$ ،  $G + H$  گرافی با مجموعه رأس‌های  $V(G \cup H)$  و مجموعه یال‌های

$$E(G \cup H) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$$

است.

قضیه ۹ فرض کنید  $G_2 = K_\ell + H$  و  $n_1 \leq 27\sqrt{m} + \frac{16\sqrt{m}}{\log^{\frac{1}{2}} m}$ .  $m > 27$ ،  $G_1 = K_n$  و  $\Delta(H) \leq \frac{16\sqrt{m}}{\log^{\frac{1}{2}} m}$  و  $n(H) \leq 27\sqrt{m}$  گرافی با  $\ell \leq 27\sqrt{m}$  است. همچنین فرض کنید مجموعه‌ی  $S \subseteq V(H)$  وجود دارد به‌طوری‌که  $|S| \leq m^{\frac{1}{2}} - 27\sqrt{m}$  و  $R(G_1, G_2) \leq 225\sqrt{m}$ . در این صورت داریم،  $\Delta(H - S) < \frac{\log m}{4}$ .

در ادامه‌ی این بخش، نتایج مهمی را که از قضیه‌های ۸ و ۹ استخراج می‌شوند، ارایه می‌کنیم.

نتیجه ۱۰ فرض کنید  $G_i$ ،  $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی  $m_i$  یالی و بدون رأس تنها است. اگر  $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$  آن‌گاه  $m = \max\{m_1, m_2\}$

اثبات. چون  $G_i$ ،  $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی  $m_i$  یالی است پس حداکثر  $2m$  رأس دارد. طبق قضیه‌ی ۱، داریم  $R(G_1, G_2) \leq R(K_{2m}) \leq 2^{4m}$ . اگر فرض کنیم  $m \leq 60^2$  آن‌گاه  $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}} \geq 4m$  و به راحتی نتیجه می‌شود که  $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$ . پس می‌توان فرض کرد که  $60^2 > m$ . با قرار دادن  $n_i = \max\{n_1, n_2\}$  که  $n_i$  تعداد رأس‌های  $G_i$ ،  $1 \leq i \leq 2$  است، آن‌گاه چون  $G_1$  و  $G_2$  رأس تنها ندارند، واضح است که  $n \geq m^{\frac{2}{3}} \geq 2m \geq n$  و

$$2^{\frac{106\sqrt{m}}{\log m}} \geq 2m - 27\sqrt{m} \geq n - 27\sqrt{m}.$$

از طرف دیگر، اگر به ازای هر  $\alpha \leq \frac{\log^{\frac{2}{3}} m}{\lambda}$  رأس با درجه‌ی ماکزیمم از رأس‌های  $G_i$  را حذف کنیم و زیرگراف القایی روی رأس‌های باقی‌مانده را  $G'_i$  بنامیم، آن‌گاه خواهیم داشت  $\Delta(G'_i) \leq \frac{2m}{\alpha\sqrt{m}} \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha}$ . بنابراین شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. از طرفی چون  $n^{\frac{2}{3}} \geq n$ ، با قرار دادن  $R_i = G_i$ ، برای  $1 \leq i \leq 2$ ، شرط ۲ در قضیه‌ی ۸ نیز برقرار است. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۸ نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌گردد. ■

نتیجه ۱۱ فرض کنید  $G_i$ ،  $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی از مرتبه‌ی  $n_i$  و بدون رأس تنها است. اگر  $T_i \subseteq V(G_i)$  و زیرمجموعه‌ی  $n = \max\{n_1, n_2\}$  موجود باشد چنان‌که داشته باشیم  $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt[5]{n}}$  آن‌گاه  $\Delta(G_i - T_i) \leq 54 \frac{\sqrt[5]{n}}{\log^{\frac{2}{3}} n}$  و  $|T_i| \leq 27\sqrt[5]{n}$  اثبات. با قرار دادن  $m = n^{\frac{2}{3}}$  در قضیه‌ی ۸ خواهیم داشت

$$\Delta(G_i - T_i) \leq 54 \frac{\sqrt[5]{n}}{\log^{\frac{2}{3}} n} = 54 \frac{\sqrt[5]{m^{\frac{2}{3}}}}{\log^{\frac{2}{3}} m^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt{m}}{\frac{\log^{\frac{2}{3}} m}{\lambda}} \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha}.$$

بنابراین شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. هم‌چنین با قرار دادن  $R_1 = G_1$  و  $R_2 = G_2$  و

شرط ۲ نیز در قضیه‌ی ۸ برقرار می‌شود و نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید. ■

نتیجه ۱۲ فرض کنید  $G_2 = K_{\ell_1} + K_{\ell_2}^c$  و  $n_1 \leq 27\sqrt{m} + \frac{16\sqrt{m}}{\log m}$ ،  $m > 27$ ،  $G_1 = K_{n_1}$ ،  
به طوری که شرایط  $\ell_2 \leq 2^{106 \frac{\sqrt{m}}{\log m}}$  و  $\ell_1 \leq 27\sqrt{m}$  برقرار باشند. در این صورت داریم،  
 $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$

اثبات. به وضوح،  $n = \max\{n_1, \ell_1 + \ell_2\} \leq 27\sqrt{m} + 2^{106 \frac{\sqrt{m}}{\log m}}$ . همچنین به راحتی  
دیده می‌شود که شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. از طرف دیگر چون  $27 > m$ ، رابطه‌های  
 $\ell_2 \leq m^{\frac{3}{4}}$  و  $n_1 \leq m^{\frac{3}{4}}$  به دست می‌آیند. با قرار دادن  $R_1 = G_1$  و  $R_2 = K_{\ell_1}$ ، شرط ۲  
در قضیه‌ی ۸ برقرار می‌شود و نتیجه حاصل می‌گردد.

نتیجه ۱۳ به ازای اعداد صحیح و مثبت  $p$  و  $q$ ،  $2^{\frac{53p}{77 \log \frac{p}{q}}} \leq q$  داریم،

$$R(K_p, K_{p,q}) \leq R(K_p, K_p + K_q^c) \leq 2^{\frac{53p}{77}p}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم  $\ell_2 = q$ ،  $n_1 = \ell_1 = p = 27\sqrt{m}$  و از نتیجه‌ی ۱۲ استفاده می‌کیم.

## ۲- لم‌های کاربردی

در این بخش، تعاریف، نمادها و لم‌هایی که برای اثبات قضیه‌های ۸ و ۹ مورد نیاز هستند،  
ارایه شده‌اند.

فرض کنید  $G = (V, E)$  گراف دلخواهی است. برای  $V \subseteq U$  زیرگراف القایی  $G$  روی  $U$   
را با  $G[U]$  نشان می‌دهیم. چگالی یالی  $G[U]$  را با  $d(U)$  نمایش می‌دهیم و برابر با  
 $d(U) = \frac{e(G[U])}{\binom{|U|}{2}}$  است که در آن  $e(G[U])$  تعداد یال‌های  $G[U]$  است. فرض کنید  $X$  و  $Y$   
دو زیرمجموعه‌ی مجزای  $V(K_n)$  هستند. در یک رنگ‌آمیزی یالی گراف  $K_n$ ، زوج  
مرتب  $(X, Y)$  را زوج تک‌رنگ گوییم اگر به ازای هر  $v \in X$ ، تمام یال‌های  $X \cup Y$  واقع بر  
یال‌های باشند. منظور از یال‌های  $X \cup Y$ ، یال‌های واقع در  $X$ ، یال‌های واقع در  $Y$  و  
یال‌های با یک انتهای در  $X$  و یک انتهای در  $Y$  است.

در ادامه‌ی این بخش، نتایج مهمی را که از قضیه‌های ۸ و ۹ استخراج می‌شوند، ارایه می‌کیم.

نتیجه ۱۰ فرض کنید  $G_i$ ،  $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی  $m_i$  یالی و بدون رأس تنها است. اگر  $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$ ، آن‌گاه  $m = \max\{m_1, m_2\}$

اثبات. چون  $G_i$ ،  $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی  $m_i$  یالی است پس حداکثر  $2m$  رأس دارد. طبق قضیه ۱، داریم  $R(G_1, G_2) \leq R(K_{2m}) \leq 2^{4m}$ . اگر فرض کنیم  $m \leq 60^2$ ، آن‌گاه  $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}} \geq 4m$  و به راحتی نتیجه می‌شود که  $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$ . پس می‌توان فرض کرد که  $60^2 > m$ . با قرار دادن  $n = \max\{n_1, n_2\}$  که  $n_i$  تعداد رأس‌های  $G_i$  است، آن‌گاه چون  $G_1$  و  $G_2$  رأس تنها ندارند، واضح است که  $n \geq 2m \geq 2 \geq i \leq 1$  و  $m^{\frac{3}{4}} \geq 2m$ .

$$2^{\frac{106\sqrt{m}}{\log m}} \geq 2m - 27\sqrt{m} \geq n - 27\sqrt{m}.$$

از طرف دیگر، اگر بهزاری هر  $\alpha \leq \frac{\log^{\frac{3}{4}} m}{\lambda} \leq 27$ ، به تعداد  $\alpha\sqrt{m}$  رأس با درجه‌ی ماکزیمم از رأس‌های  $G_i$  را حذف کنیم و زیرگراف القایی روی رأس‌های باقی‌مانده را  $G'_i$  بنامیم، آن‌گاه خواهیم داشت  $\Delta(G'_i) \leq \frac{2m}{\alpha\sqrt{m}} \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha}$ . بنابراین شرط ۱ در قضیه ۸ برقرار است. از طرفی چون  $n \geq m^{\frac{3}{4}}$ ، با قرار دادن  $R_i = G_i$ ، برای  $1 \leq i \leq 2$ ، شرط ۲ در قضیه ۸ نیز برقرار است. بنابراین با استفاده از قضیه ۸ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد. ■

نتیجه ۱۱ فرض کنید  $G_i$ ،  $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی از مرتبه‌ی  $n_i$  و بدون رأس تنها است. اگر  $n = \max\{n_1, n_2\}$  و زیرمجموعه‌ی  $T_i \subseteq V(G_i)$  موجود باشد چنان‌که داشته  $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt[5]{n}}$ ، آن‌گاه باشیم  $\Delta(G_i - T_i) \leq 54 \frac{\sqrt[5]{n}}{\log^{\frac{3}{4}} n}$  و  $|T_i| \leq 27\sqrt[5]{n}$ .

اثبات. با قرار دادن  $m = n^{\frac{3}{4}}$  در قضیه ۸ خواهیم داشت

$$\Delta(G_i - T_i) \leq 54 \frac{\sqrt[5]{n}}{\log^{\frac{3}{4}} n} = 54 \frac{\sqrt[5]{m^{\frac{3}{4}}}}{\log^{\frac{3}{4}} m^{\frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{m}}{\frac{\log^{\frac{3}{4}} m}{\lambda}} \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha}.$$

بنابراین شرط ۱ در قضیه ۸ برقرار است. هم‌چنین با قرار دادن  $R_1 = G_1$  و  $R_2 = G_2$  نتیجه ۱۰ برقرار است.

$2^{\alpha^{\frac{1}{r}}} \leq \sqrt{m}$ ، با جایگذاری  $t = 2^{2\alpha^{\frac{1}{r}}}\sqrt{m}$  و  $\epsilon = 2^{-3\alpha^{\frac{1}{r}}}$  داشت  $2^{2\alpha^{\frac{1}{r}}}\sqrt{m} = 2^{-3\alpha^{\frac{1}{r}}} + \epsilon$  و  $2^{2\alpha^{\frac{1}{r}}}\sqrt{m} \geq 48\alpha^{-\frac{1}{r}}$ ،  $t \geq \epsilon^{-1}$

$$2^{5\alpha^{-\frac{1}{r}}\sqrt{m}} \geq 2^{10\frac{\sqrt{m}}{\log m}} \geq m^{\frac{r}{r}} \geq 2^{2\alpha^{\frac{1}{r}}\sqrt{m}} = t.$$

با قرار دادن  $G = G'_1$  و  $H = F_r[Y]$  روی یال‌های با رنگ قرمز در لم ۱۶ مجموعه‌ی  $S \subseteq Y$  وجود دارد چنان که

$$\begin{aligned} |S| &\geq \epsilon^{-4\Delta(G'_1)\log\epsilon}|Y| \geq (2^{-3\alpha^{\frac{1}{r}}})^{-4 \times (2\alpha^{-1}\sqrt{m}) \times (-3\alpha^{\frac{1}{r}})}|Y| \\ &= 2^{-72\alpha^{\frac{-1}{r}}\sqrt{m}}|Y| \geq 2^{53\alpha^{\frac{-1}{r}}\sqrt{m}} \geq 2^{\frac{10\sqrt{m}}{\log m}} \geq n - 27\sqrt{m} \end{aligned}$$

و چگالی زیرگراف القایی از رنگ قرمز در  $[S]$  حداقل  $\epsilon$  است. همچنین با توجه به نامساوی‌های بالا می‌توان دید  $|Y| \geq \epsilon^{\Delta(G'_1)\log\epsilon}(n - 27\sqrt{m})$ . با جایگذاری مقادیر  $t$  و  $\epsilon$  داریم

$$\begin{aligned} |S| &\geq 2^{53\alpha^{\frac{-1}{r}}\sqrt{m}} \geq 2^{5\alpha^{\frac{-1}{r}}\sqrt{m}} \times 2^{48\alpha^{\frac{-1}{r}}\sqrt{m}} \geq t2^{42\alpha^{\frac{1}{r}}2^{-\alpha^{\frac{1}{r}}}\sqrt{m}} \\ &= t(2^{-3\alpha^{\frac{1}{r}}})^{-14 \times (2^{-\alpha^{\frac{1}{r}}}\sqrt{m})} = t\epsilon^{-14\epsilon t}. \end{aligned}$$

اکنون با جایگذاری  $H = F[S]$  در لم ۱۵ به راحتی می‌توان دید که گراف  $H$  شامل زوج تک‌رنگ  $(X', Y')$  با شرایط  $|X'| \geq t$  و  $|Y'| \geq \epsilon^{14\epsilon t}|S|$  است. یادآوری می‌کنیم که  $|S| \geq 2^{-72\alpha^{\frac{-1}{r}}\sqrt{m}}|Y|$  است و در نتیجه،

$$|Y'| \geq \epsilon^{14\epsilon t}|S| \geq 2^{-48\alpha^{\frac{-1}{r}}\sqrt{m}}|S| \geq 2^{-120\alpha^{\frac{-1}{r}}\sqrt{m}}|Y|.$$

بنابراین  $(X', Y')$  همان زوج مطلوب‌اند. ■

### ۳- اثبات قضیه‌های اصلی

در این بخش به اثبات قضیه‌های ۸ و ۹ می‌پردازیم.

اثبات قضیه ۸. فرار دهید  $N = 2^{250\sqrt{m}}$  و به تناقض فرض کنید یک ۲-رنگ آمیزی از یال‌های گراف  $H = K_N$  با دو رنگ قرمز و آبی وجود دارد به‌طوری‌که شامل زیرگراف قرمز یک‌ریخت با  $G_1$  و زیرگراف آبی یک‌ریخت با  $G_2$  نیست. از آن‌جا که گراف‌های  $G_1$  و  $G_2$  حداً کثر  $n$  رأس دارند، طبق قضیه ۱ داریم

$$R(G_1, G_2) \leq R(K_n) \leq 2^n.$$

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که  $n \geq 125\sqrt{m}$ . با قرار دادن  $k = \ell = 27\sqrt{m}$  در لم ۱۴ می‌توان نتیجه گرفت که زوج تک‌رنگ  $(X_1, Y_1)$  با شرایط  $|X_1| \geq 27\sqrt{m}$  و

$$|Y_1| \geq \binom{k+\ell}{k}^{-1} N - k - \ell \geq 4^{-27\sqrt{m}} N = 2^{196\sqrt{m}}$$

وجود دارد. حال دنباله‌ی  $\alpha_1 = 27^{\frac{1}{\alpha_i}}$  و  $\alpha_{i+1} = 2^{2\alpha_i^{\frac{1}{r}}}$  را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان دید که رابطه‌ی  $\alpha_{i+1} \geq (\frac{4}{3})^3 \alpha_i$  به ازای هر  $i$  برقرار است و در نتیجه داریم

$$\sum_{j=1}^i \alpha_j^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{3}{4}\right)^j \leq \frac{1}{3} \sum_{j \geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^j = \frac{4}{3}.$$

از آن‌جا که فرض کردیم در این رنگ آمیزی زیرگراف قرمز یک‌ریخت با  $G_1$  و زیرگراف آبی یک‌ریخت با  $G_2$  نداریم، با تکرار لم ۱۷ به‌طور متوالی می‌توان دید که بعد از  $i$  مرحله، زوج تک‌رنگ  $(X_{i+1}, Y_{i+1})$  با شرایط  $|X_{i+1}| \geq \alpha_{i+1}\sqrt{m}$  و

$$|Y_{i+1}| \geq 2^{-120\alpha_i^{\frac{-1}{r}}\sqrt{m}} |Y_i| \geq 2^{-120\sqrt{m} \sum_{j=1}^i \alpha_j^{-\frac{1}{r}}} |Y_1|$$

$$\geq 2^{-120\sqrt{m}(\frac{1}{r})} \cdot 2^{196\sqrt{m}} = 2^{36\sqrt{m}}$$

یافت می‌شود. لم ۱۷ را تکرار می‌کنیم تا اولین اندیس  $i$  با شرط  $\alpha_i \geq \frac{1}{\lambda} \log^3 m$  به دست آید. سپس قرار می‌دهیم  $X = X_i$ ,  $\alpha = \frac{1}{\lambda} \log^3 m$  و  $Y = Y_i$ . حال زوج تکرنگ  $(X, Y)$  ای داریم که در آن شرایط  $|X| \geq \alpha_i \sqrt{m} \geq \alpha \sqrt{m}$  و

$$|Y| \geq 2^{36\sqrt{m}} \geq 2^{125\alpha - \frac{1}{r}\sqrt{m}}$$

برقرار هستند. اکنون با استفاده دوباره از لم ۱۷ می‌توان زوج تکرنگ  $(X', Y')$  را پیدا کرد که در آن  $|X'| \geq 2^{2\alpha^{\frac{1}{2}}} \sqrt{m} = m^{\frac{3}{2}}$  و  $|Y'| \geq 2^{36\sqrt{m}}$ . ابتدا فرض می‌کنیم زوج  $(X', Y')$  قرمز است. طبق فرض چون  $R(G''_1, G_2) \leq 2^{36\sqrt{m}}$  و این که فرض کردیم زیرگراف آبی یکریخت با  $G_2$  نداریم، بنابراین زیرگراف القایی از رنگ قرمز در  $H[Y']$  شامل زیرگراف یکریخت با  $G''_1$  است. در نتیجه  $H[X'] + G''_1$  شامل زیرگراف قرمز یکریخت با  $G_1$  است و این یک تناقض است.

حال اگر فرض کنیم که زوج  $(X', Y')$  آبی است، چون  $R(G_1, G''_2) \leq 2^{36\sqrt{m}}$  و این که فرض کردیم زیرگراف قرمز یکریخت با  $G_1$  نداریم، زیرگراف القایی از رنگ آبی در  $H[Y']$  شامل زیرگراف یکریخت با  $G''_2$  می‌شود. بنابراین  $H[X'] + G''_2$  شامل زیرگراف آبی یکریخت با  $G_2$  است که این یک تناقض است. بنابراین در هر ۲-رنگ آمیزی یالی گراف  $K_N$  با دو رنگ قرمز و آبی، می‌توان زیرگراف قرمز یکریخت با  $G_1$  و یا زیرگراف آبی یکریخت با  $G_2$  یافت. ■

برای اثبات قضیه ۹ از قضیه‌ی زیراستفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۸ [۱] فرض کنید  $H$  گرافی  $h$  رأسی با عدد رنگی  $2 \geq k$  و درجه‌ی ماکزیمم حداقل  $r$  است. در این صورت به ازای هر عدد صحیح و مثبت  $m$  داریم،

$$R(H, K_m) \leq \left( \frac{100m}{\ln m} \right)^{\frac{(r-k+2)(k-1)}{r}} (\ln m) h^r.$$

اثبات قضیه ۹. قرار می‌دهیم  $S = H - r = \Delta(G''_2)$  و  $n''_2 = n(G''_2)$ ,  $G''_2 = H - S$ . از آن‌جا که

$m > 27$ ، به سادگی می‌توان دید که  $n_1 \leq 40\sqrt{m}$ . دو حالت در نظر می‌گیریم.

### حالت اول: $r = 0$

در این صورت یک یال  $e$  به  $G''_2 + e$  اضافه می‌کیم. با قرار دادن  $H = G''_2 + e$  در قضیه ۱۸ داریم،

$$\begin{aligned} R(G''_2, G_1) &\leq R(G''_2 + e, G_1) \leq \left(\frac{100n_1}{lnn_1}\right) \times lnn_1 \times n(G''_2 + e) = \\ &< 100n_1 \times n(G''_2 + e) < 100(40\sqrt{m}) \times 2^{106\frac{\sqrt{m}}{\log m}} \\ &= 4000\sqrt{m} \times 2^{\frac{106\sqrt{m}}{\log m}} = 2^{\log 4000\sqrt{m} + 106\frac{\sqrt{m}}{\log m}} \\ &\leq 2^{13 + \frac{1}{r} \log m + 106\frac{\sqrt{m}}{\log m}} < 2^{26\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

از آن جا که  $|T_1| = V(G_1) - 27\sqrt{m} \leq \frac{16\sqrt{m}}{\log m}$  با فرض  $T_1 \subseteq V(G_1)$ ، به طوری که  $\Delta(G_1 - T_1) \leq \frac{16\sqrt{m}}{\log m}$  و با فرض  $\Delta(G_2 - T_2) = \Delta(H) \leq \frac{16\sqrt{m}}{\log m}$  واضح است که  $T_2 = V(K_\ell)$ . بنابراین شرط ۱ قضیه ۸ برقرار است. از طرف دیگر از آن جا که  $n(G_1) \leq m^{\frac{r}{r}}$  و طبق روابط بالا، با قرار دادن  $G_1 = R_1$  و  $R_2 = G''_2$  شرط ۲ قضیه ۸ نیز برقرار است. پس می‌توان از قضیه ۸ نتیجه گرفت که

$$R(G_1, G_2) \leq 2^{25\sqrt{m}}$$

### حالت دوم: $r \geq 1$

طبق قضیه ۱۸،

$$\begin{aligned} R(G''_2, G_1) &= R(G''_2, K_{n_1}) \leq \left(\frac{100n_1}{lnn_1}\right)^{\frac{(r-k+r)(k-1)}{r}} (lnn_1)(n''_2)^r \\ &\leq \left(\frac{100n_1}{lnn_1}\right)^{\frac{r^2+r^2}{r}} (lnn_1) (27\sqrt{m} + 2^{106\frac{\sqrt{m}}{\log m}} - \sqrt{m^3})^r \\ &\leq \frac{\left(\frac{100n_1}{lnn_1}\right)^{\frac{r^2+r^2}{r}} 2^{106\frac{\sqrt{m}}{\log m} r}}{(lnn_1)^{\frac{r^2+r^2-2}{r}}} \\ &= \left(\frac{100n_1}{lnn_1}\right)^{\frac{r^2+r^2}{r}} 2^{106\frac{\sqrt{m}}{\log m} r} \times y \\ &\leq (4000\sqrt{m})^{\frac{r^2+r^2}{r}} \times 2^{106\frac{\sqrt{m}}{\log m} r} \times y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{(\frac{r^2+2r}{2} \log 4000\sqrt{m} + 106 \frac{\sqrt{m}}{\log m} r)} \times y \\
 &\leq 2^{36\sqrt{m}}.
 \end{aligned}$$

لازم به ذکر است نامساوی آخر برقرار است زیرا

$$y = \frac{1}{(\ln n)^{\frac{r^2+r-2}{2}}} \leq 1,$$

و داریم،

$$\begin{aligned}
 &\frac{r^2+2r}{2} \log 4000\sqrt{m} + 106 \frac{\sqrt{m}}{\log m} r = \\
 &\frac{r^2+2r}{2} (\log 4000 + \log \sqrt{m}) + 106 \frac{\sqrt{m}}{\log m} r \\
 &\leq 6(r^2+2r) + \frac{r^2+2r}{2} \log \sqrt{m} + 106 \frac{\sqrt{m}}{\log m} r \\
 &\leq 18(\log^2 \sqrt{m}) + 2 \log^2 \sqrt{m} \log \sqrt{m} + 26/5\sqrt{m} \\
 &= \frac{18}{16} \log^2 m + \frac{2}{32} \log^2 m + 26/5\sqrt{m} \\
 &\leq 9/5\sqrt{m} + 26/5\sqrt{m} = 36\sqrt{m}.
 \end{aligned}$$

اکنون با استفاده‌ی دوباره از قضیه‌ی ۸ تیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود. ■

## References

- [1] N. Alon, M. Krivelevich and B. Sudakov, Turán numbers of bipartite graphs and related Ramsey-type questions, *Combin. Probab. Comput.* **12** (2003), 477-494.
- [2] D. Conlon, A new upper bound for diagonal Ramsey numbers, *Ann. of Math.* **170** (2009), 941-960.
- [3] P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292-294.

- [4] P. Erdős, On some problems in graph theory, combinatorial analysis and combinatorial number theory, *Graph Theory and Combinatorics*, Cambridge, (1983), *Academic Press, London*, (1984), 1-17.
- [5] P. Erdős and R. Graham, On partition theorems for finite graphs, *in: Infinite and Finite Sets*, vol. I, Colloq., Keszthely, (1973), *in: Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, vol. 10, North-Holland, Amsterdam, (1975), 515-527.
- [6] P. Erdős and G. Szekeres, A Combinatorial problem in geometry, *Compos. Math.* **2** (1935), 463-470.
- [7] J. Fox and B. Sudakov, Dependent Random Choice, *Random Struct. Algorithms* **38** (2011), 68-99.
- [8] S. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers, *Electron. J. Combin.* **1** (1994), Dynamic Surveys, DS1.**12** (August 4, 2009).
- [9] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.* **2** 30 (1930), 264-286.
- [10] V. Rosta, Ramsey Theory Applications, *Electron. J. Combin.* (2004), 1-43.
- [11] B. Sudakov, A Conjecture of Erdős on graph Ramsey numbers, *Advances In Math.* **227** (2011), 601-609.