روش منظم‌سازی موجک شانون برای مسئلهٔ کوشی وابسته به معادلهٔ هلمهولتز

میلاد کریمی، فریدون مرادلو*، مجتبی حاجی‌پور
دانشگاه صنعتی سهند، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی، تبریز

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

در این مقاله، مسئلهٔ کوشی وابسته به معادلهٔ هلمهولتز برای تعیین میدان تشعشعی در یک دامنه نواری نامتناهی بررسی شده است. این مسئله در ردهٔ مسائل کلاسیک به‌شدت بد وضع قرار دارد، به این معنی که اغتشاش بسیار ناچیزی در داده کوشی منجر به یک خطای بسیار بزرگ در جواب مسئله خواهد شد. با ارائه روش منظم‌سازی موجک شانون، تقریب‌های پایدار و دقیقی بین جواب تحلیلی و تقریبی مسئله در فضای مقیاس فراهم شده است. در نهایت، کارایی و دقت آنالیز کیفی روش از طریق چند مثال محاسباتی تأیید شده است.

واژه‌های کلیدی: مسئله کوشی، معادله هلمهولتز، موجک شانون، منظم سازی.

مقدمه

معادله هلمهولتز نوع خاصی از معادلات بیضوی است و در کاربردهای فیزیکی عملی اهمیت ویژه‌ای دارد. این معادله اغلب برای توصیف ارتعاشات یک سازه[۱]، مسئله کاواک صوتی [۲]، امواج تشعشعی [۳]، خطی سازی معادله پواسن-بولتزمن [۴]، پراکندگی امواج [۵]، مسئله رسانش گرما در باله[۶] به‌کار می‌رود. هم‌چنین در کاربردهای ژئوفیزیکی، از شبیه سازی انتشار امواج برای توسعهٔ تکنیک‌های تصویربرداری صوتی به‌منظور استخراج اطلاعات ساختارهای ژئوفیزیکی عمیق در لایه‌های زیرین سطح زمین استفاده شده است [۷]. در اپتوالکترونیک، تعیین میدان تشعشعی در اطراف یک منبع تابشی (برای مثال، دیود نور افشان) مسئله‌ای است که به‌طور مکرر اتفاق افتاده است[۸].

مسائل مستقیم، یعنی مسائل مقدار مرزی دیریکله، نیومن یا آمیخته برای معادله هلمهولتز به‌طور گسترده در قرن گذشته بررسی شده‌اند. با وجود این، در بعضی مسائل عملی، داده مرزی روی کل مرز قابل حصول نیست و تنها اطلاعات داده‌هایی که روی قسمتی از مرز یا برخی نقاط داخلی دامنهٔ مورد بحث دچار اغتشاش شده‌اند، در دسترس است. چنین مسئله‌ای را یک مسئله معکوس می‌نامند. مسئله کوشی برای معادله هلمهولتز یک مسئله معکوس به شدت بد وضع به معنای آدامارد[1] است [۹]. چندین روش عددی برای حل این مسئله از قبیل الگوریتم تکرار متناوب مبتنی بر روش لندوبر[2] دراتباط با روش عناصر متناهی [۱۰]، روش گرادیان مزدوج [۱۱]، روش تجزیه مقدار تکین [۱۲] و روش جواب بنیادی [۱۳]، [۱۴] پیشنهاد شده است.

*نویسندهٔ مسئول moradlou@sut.ac.ir

1. Hadamard
2. Landweber

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

نظریه پیشرفته موجک‌ها، یک نظریه قدرتمند و جدید در ریاضیات است که به‌طور گسترده‌ای در اواخر قرن بیستم توسعه داده شده است. کلمهٔ موجک به معنای یک نوسان موجی کوچک است که خیلی سریع میرا می‌شود. قابلیت آنالیز موجک در تحلیل پدیده‌های دینامیکی مختلف از طریق امواج، تأثیر شگرفی بر تحقیقات نظری گذاشته است. در نظریهٔ آنالیز موجک‌ها، موجک شانون[1] اهمیت ویژه‌ای دارد. یکی از ویژگی‌هایی که موجک شانون را از بقیهٔ موجک‌ها متمایز می‌کند این است که موجک شانون دارای محمل فشرده در حوزهٔ فرکانس است. به‌عبارت دیگر، در حوزهٔ فرکانس خوش-موضع است و می‌تواند از نابودی جواب به‌علت اغتشاش فرکانسی بالا جلوگیری کند. در دو دههٔ گذشته، از موجک‌ها برای حل مسائل بد وضع استفاده شده است. برای مثال، مسئله پیوستگی تحلیلی[۱۵]، مسئله رسانش گرمای معکوس [۱۶]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]، مسئله کوشی برای معادله لاپلاس[۲۰]، [۲۱]، مسائل معکوس و بد وضع در ارتباط با معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی [۲۲] با استفاده از نظریهٔ موجک‌ها تحلیل و بررسی شده‌اند. اخیراً، یک روش منظم‌سازی بر اساس موجک مایر[2] برای حل مسئلهٔ کوشی وابسته به معادلهٔ هلمهولتز [۲۳] و هم‌چنین حل مسئلهٔ رسانش گرمای پس‌رو با ضریب انتقال حرارت متغیر با زمان [۲۴] ارائه شده است. در این مقالات ثابت شده است که روش موجک به‌طور تأثیرگذاری توانایی حل مسائل بد وضع در ارتباط با معادلات دیفرانسیل جزئی را دارد. انگیزهٔ اصلی این مقاله، معرفی یک استراتژی منظم‌سازی مناسب بر اساس موجک شانون برای پایدارسازی مسئلهٔ کوشی وابسته به معادلهٔ هلمهولتز است. در حقیقت، یک جواب موجک بر اساس موجک شانون تعریف می‌شود و سپس با ارائهٔ یک قاعدهٔ مناسب برای انتخاب فضای تفکیک‌پذیر چندگانه V_J از طریق پارامتر منظم‌سازی J، نشان می‌دهیم که نرخ همگرایی جواب از مرتبهٔ بهینه است [۲۵].

فرمول‌بندی ریاضی مسئله

در این مقاله، مسئله کوشی وابسته به معادلهٔ هلمهولتز در یک دامنهٔ نواری نامتناهی بدین‌صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)+\kappa^2 u(x,y)=0, & (x,y)\in(0,d]\times\mathbb{R}, \\ u(0,y)=\varphi(y), & y\in\mathbb{R}, \\ \partial_x u(0,y)=0, & y\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{۱}$$

که در آن $\Delta=\partial_{xx}+\partial_{yy}$ عملگر لاپلاس دو بعدی ، $\kappa=\kappa_r+i\kappa_i\in\mathbb{C}$ نشان‌دهندهٔ عدد موج ، $i^2=-1$ یکه موهومی و $d>0$ است. در حالت $\kappa_i=0$، مسئلهٔ (۱) به مسئلهٔ کوشی برای معادلهٔ اسکالر هلمهولتز، در حالت $\kappa_r=0$، به مسئلهٔ کوشی برای معادلهٔ اصلاح شدهٔ هلمهولتز (یا معادلهٔ یوکاوا) و در حالت $\kappa=0$ به مسئلهٔ کوشی برای معادلهٔ لاپلاس معروف است. فرض کنیم $\varphi_m(0)\in L^2(\mathbb{R})$ دادهٔ اندازه‌گیری شده با سطح اغتشاش $\delta>0$ صادق در شرط $\|\varphi-\varphi_m\|_{L^2}\le\delta$ باشد. در این صورت، هدف تعیین جواب $u(x,0)$ مبتنی بر دادهٔ کوشی $\varphi_m(0)$ است. فرض کنیم $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ نشان‌دهندهٔ فضای شوارتز[3] باشد که بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R})=\left\{f\in C^\infty(\mathbb{R})\,\middle|\,\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^m D^n f(x)|<\infty\,;m,n\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}, \tag{۲}$$

1. Shannon wavele
2. Meyer wavelet
3. Schwartz space

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

که در آن $D^n := \frac{d^n}{dx^n}$. دوگان فضای شوارتز را با $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ نشان داده و عناصر آن را توزیع‌های متعادل می‌نامند. تبدیل فوریهٔ تابع $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ که با نماد $\hat{f}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از:

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\omega y}\, dy, \tag{۳}$$

توجه می‌کنیم که $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. در حالی که تبدیل فوریهٔ یک توزیع متعادل مانند $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ به‌صورت (۴) تعریف می‌شود:

$$\langle \hat{f}, g \rangle = \langle f, \hat{g} \rangle, \forall g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \tag{۴}$$

که در آن $\langle \cdot,\cdot \rangle$ نشان‌دهندهٔ ضرب داخلی است. در این مقاله، توابع وابسته به متغیرهای $x \in [0,d]$ و $y \in \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. فضای سوبولف[1] از مرتبهٔ $p \in \mathbb{R}$ را با نماد $H^p(\mathbb{R})$ نمایش داده و به‌صورت (۵) تعریف می‌شود:

$$H^p(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \;\; \middle| \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 (1+|\omega|^2)^p\, d\omega < \infty \right\}, \tag{۵}$$

که در آن p، درجهٔ همواری توابع را در فضای سوبولف نشان می‌دهد. هم‌چنین نرم در این فضا به‌صورت (۶) تعریف می‌شود:

$$\| f \|_{H^p} := \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 (1+|\omega|^2)^p\, d\omega \right)^{1/2}. \tag{۶}$$

فرض می‌کنیم که یک جواب یکتا $u(x,y)$ متناظر با مسئلهٔ (۱) وجود دارد که به معنای کلاسیک در مسئله صدق می‌کند. با به‌کار بردن روش تبدیل فوریه، جواب مسئله در حوزهٔ فرکانس بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\hat{u}(x,\omega) = \cosh(x\sqrt{|\omega|^2 - k^2})\hat{\varphi}(\omega). \tag{۷}$$

لازم به ذکر است که ضریب $\cosh(x\sqrt{|\omega|^2 - k^2})$ در طرف راست معادلهٔ (۷) برای مقادیر $x \in (0,d]$ و $|\omega| \to \infty$ به طور فاجعه‌باری رشد می‌کند. در نتیجه، این ضریب یک عامل ناپایداری در مدل فیزیکی مسئله است و گاهی اوقات آن را عامل تقویت‌کننده[2] برای مدل می‌نامند. بنابراین تضمین وجود یک جواب در $L^2(\mathbb{R})$، وابسته به میرایی سریع $\hat{\varphi}(\omega)$ در فرکانس‌های بالا است. اما در عمل، داده‌های مسئله در $x = 0$ که با نماد $\varphi_m(y)$ نشان داده می‌شوند، بر اساس اندازه‌گیری یک سیستم فیزیکی به‌دست می‌آیند و بنابراین با دقت نامحدودی در دسترس نیستند. هم‌چنین در حالت کلی، این داده‌ها دارای ویژگی میرایی سریع نبوده و از این رو نحوهٔ میرایی داده‌های دقیق و اندازه‌گیری شده شباهتی به هم‌دیگر ندارند.

با توجه به این‌که داده‌های اندازه‌گیری شدهٔ φ_m همیشه عناصری در فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ هستند، نتیجه می‌گیریم که طیف فرکانسی این داده‌ها یعنی $\hat{\varphi}_m(0)$، نیز عناصری در این فضا هستند. یک اختلال کوچک در دادهٔ $\varphi(0)$ منجر به یک خطای بسیار بزرگ در جواب مسئله برای مقادیر $x \in (0,d]$ می‌شود. این موضوع سبب می‌شود که مسئلهٔ (۱) به یک مسئلهٔ به‌شدت بدرفتار تبدیل شده و از نقطه نظر محاسباتی، فرایند شبیه‌سازی و بازسازی جواب مسئله با مشکل روبه‌رو می‌شود. توجه می‌کنیم که بدوضعی مسئله به علت اختلال در مؤلفه‌های فرکانسی بالا است. برای غلبه بر چنین مشکلاتی، روش‌هایی به‌نام منظم‌سازی[3] به‌منظور پایدارسازی و بازیابی جواب مسائل بدوضع در نظر گرفته شده است. یکی از این روش‌ها روش منظم‌سازی با استفاده از موجک‌ها است. در میان موجک‌ها، موجک شانون

1. Schwartz space
2. Amplified factor
۸) Regularization

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

ویژگی موضعی خوبی در حوزهٔ فرکانسدارد. به‌عبارت دیگر، برای یک شاخص ثابت J، تبدیل فوریهٔ تابع مقیاس در V_J و تابع موجک در W_J به‌ترتیب دارای محمل فشردهٔ مشترکی هستند و بنابراین قادر به جلوگیری از نابودی جواب در برابر اغتشاش در مؤلفه‌های فرکانسی بالا هستند. بنابراین با انتخاب صحیح یک شاخص مانند J برای زیرفضای تولید شده توسط توابع مقیاس موجک شانون، می‌توان یک جواب منظم‌سازی متناظر با مسئلهٔ مورد نظر را به‌دست آورد. در بخش بعدی ویژگی‌های مهم موجک شانون را با جزئیات بیان می‌کنیم.

آنالیز موجک شانون

در این بخش به معرفی موجک شانون به‌عنوان یک موجک اساسی در طراحی یک استراتژی منظم‌سازی برای حل مسائل بدوضع پرداخته می‌شود. تابع مقیاس موجک شانون عبارت است از [۲۶]:

$$\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{۸}$$

و طیف فرکانسی تابع مقیاس شانون به‌صورت (۹) نمایش داده می‌شود:

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & |\omega| \le \pi, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases} \tag{۹}$$

به‌علاوه طیف فرکانسی تابع موجک $\psi(x)$ متناظر با تابع مقیاس شانون در فضای فرکانس به‌صورت (۱۰) تعریف می‌شود:

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\omega}{2}}, & \pi \le |\omega| \le 2\pi, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases} \tag{۱۰}$$

با در نظر گرفتن تابع دو پارامتری $\phi_{J,k}(x) = 2^{J/2}\phi(2^J x - k)$، عملگرهای تصویر متعامد از فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ بر فضای مقیاس $V_J = \overline{\operatorname{span}\left\{\phi_{J,k}(\cdot)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}}$ و طیف فرکانسی فضای مقیاس $V_J = \overline{\operatorname{span}\left\{\phi_{J,k}(\cdot)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}}$ به‌ترتیب با P_J و $\hat{P}_J$ نشان داده می‌شوند. برای هر $f(0) \in L^2(\mathbb{R})$، هریک از این عملگرها بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$P_J f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_{J,k}\rangle \phi_{J,k}(x), \tag{۱۱}$$

و

$$P_J f(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_{J,k}\rangle \phi_{J,k}(\omega). \tag{۱۲}$$

به سادگی مشاهده می‌شود که $P_J f(\omega) = \hat{P}_J \hat{f}(\omega)$. اکنون می‌توان برخی از ویژگی‌های اساسی موجک شانون را از نقطه نظر کاربردی برای مسئلهٔ (۱) بیان کرد. از تعریف (۹) نتیجه می‌شود که $supp(\hat{\phi}) = [-\pi, \pi]$. در نتیجه با انجام محاسبات ساده می‌توان نشان داد که

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

$$\hat{\phi}_{J,k}(\omega)=\frac{2^{-J/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-i(y+k)\frac{\omega}{2}}\phi(y)dy=2^{-J/2}e^{-ik\omega 2^{-J}}\hat{\phi}(2^{-J}\omega). \tag{۱۳}$$

بنابراین برای هر $k\in Z$ ،

$$supp(\phi_{J,k})=[-\pi 2^{J},\pi 2^{J}], \tag{۱۴}$$

به‌روشی مشابه می‌توان نشان داد که

$$supp(\psi_{J,k})=[-\pi 2^{J+1},-\pi 2^{J}]\cup[\pi 2^{J},\pi 2^{J+1}]. \tag{۱۵}$$

از رابطهٔ (۱۴) می‌توان عملگر تصویر $\hat{P}_J$ را به‌عنوان یک فیلتر پایین گذر[1] تلقی کرد. یعنی، می‌توان فرکانس‌های بالاتر از $\pi 2^J$ را حذف کرد. یکی از ویژگی‌های مهم موجک شانون عبارت است از نمایش هر عضو فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ به‌صورت یک ترکیب خطی بی‌نهایت از موجک‌ها. به‌عبارت دیگر، برای هر $f\in L^2(\mathbb{R})$ نمایش زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} f(x) &= P_J f(x)+(I-P_J)f(x)\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\phi_{J,k}\rangle\phi_{J,k}(x)+\sum_{\nu\geq J}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\psi_{\nu,k}\rangle\psi_{\nu,k}(x). \end{aligned} \tag{۱۶}$$

هم‌چنین برای هر $J\in\mathbb{Z}$، داریم

$$P_J f(\omega)=\hat{f}(\omega),\qquad |\omega|\leq\pi 2^{J}. \tag{۱۷}$$

روش منظم‌سازی موجک شانون

در کاربردهای عملی، داده‌های کوشی روی مرز یعنی $\varphi(0)$ که در حالت کلی به فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ تعلق دارند، تنها از طریق ابزارهای فیزیکی اندازه‌گیری می‌شوند و به‌علت عدم دقت در ابزارهای فیزیکی معمولاً این اندازه‌گیری‌ها آلوده به اغتشاش هستند. در حقیقت سنجش داده‌های کوشی روی مرز با دقت نامحدود غیرممکن است. بنابراین ما تنها تقریبی از این داده‌ها در دسترس است که در رابطهٔ (۱۸) صدق می‌کنند:

$$\|\varphi-\varphi_m\|_{L^2}\leq\delta, \tag{۱۸}$$

که در آن $\delta>0$، نشان‌دهندهٔ سطح اغتشاش داده‌های دقیق و تقریبی است. هدف اصلی این بخش بازسازی یک تقریب دقیق از جواب تحلیلی مسئله است. برای این منظور، برای هر $p\geq 0$ فرض می‌کنیم که

$$\|u(d,0)\|_{H^p}\leq M, \tag{۱۹}$$

که در آن $M>0$ یک ثابت بی بعد است و معمولاً آن را یک کران پیشین[2] برای جواب مسئله می‌نامند. در واقع می‌توان نامساوی (۱۹) را به‌عنوان یک شرط پایدارسازی[3] برای مسئلهٔ (۱) در نظر گرفت.

فرض کنید ماتریس نامتناهی‌البعد D_J به‌صورت (۲۰) باشد:

$$\{(D_J)_{\nu,k}\}_{\nu\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}}=\{\langle\phi''_{J,\nu}(0),\phi_{J,k}(0)\rangle\}_{\nu\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}}, \tag{۲۰}$$

که در آن ϕ تابع مقیاس شانون و $\phi_{J,k}(x)=2^{J/2}\phi(2^J x-k)$. قضیهٔ ۱ سودمندترین ویژگی‌های این ماتریس را بیان می‌کند [۲۷].

1. Low-pass filter
2. a-priori bound
3. Stabilization condition

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

قضیهٔ ۱. *فرض کنید* $\{\phi_{J,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *یک پایهٔ متعامد برای فضای مقیاس* V_J *متناظر با موجک شانون باشد. دراین صورت ماتریس نامتناهی‌البعد* D_J *دارای خاصیت‌های زیر است:*

- $(D_J)_{\nu,k} = (D_J)_{k,\nu}$،
- $\| D_J \| \le \pi 2^J$.
- فرض کنید $\rho(\cdot)$ یک تابع پیوسته روی بازهٔ فشردهٔ $\Omega_J := [-\pi 2^J, \pi 2^J]$ و $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ گردایهٔ همهٔ ویژه تصویرهای عملگر هرمیتی D_J باشد. در این صورت

$$\| \rho(D_J)\| \le \max_{\lambda\in\Omega_J} |\rho(\lambda)|,$$

که در آن $\rho(D_J) = \int_{\Omega_J} \rho(\lambda) dE_\lambda$.

حال $u_J(x,\cdot)\in V_J$ را به‌عنوان جواب مبتنی بر موجک شانون مسئلهٔ (۱) متناظر با دادهٔ کوشی $\varphi(\cdot)$ در نظر گرفته و به‌صورت (۲۱) معرفی می‌کنیم:

$$u_J(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(x)\phi_{J,k}(y), \tag{۲۱}$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۲۱) در مسئلهٔ (۱) و استفاده از قضیهٔ طیفی [۲۸] می‌توان نتیجه گرفت که بردار نامتناهی‌البعد $c(x) = \mu\int_{\Omega_J} \cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2}) dE_\lambda$ و $\mu = \{\mu(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\langle\varphi(\cdot),\phi_{J,k}(\cdot)\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}}$. لم ۲ نشان می‌دهد که رابطهٔ (۲۱) به‌عنوان فرم نمایش جواب مبتنی بر موجک شانون در یک سیستم نامتناهی‌البعد از معادلات دیفرانسیل عادی با بردار ضرایب $c(x)$ صدق می‌کند.

لم ۲. *بردار نامتناهی‌البعد* $c(x)$ *جواب دستگاه نامتناهی‌البعد معادلات دیفرانسیل (۲۲) است.*

$$\begin{cases} c_{xx} + (D_J+\kappa^2)c = 0, & x\in(0,d], \\ c(0) = \mu, \\ c_x(0) = 0, \end{cases} \tag{۲۲}$$

اثبات. ادعا می‌کنیم

$$c_{xx} = -\mu\int_{\Omega_J} (\lambda+\kappa^2)\cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2}) dE_\lambda.$$

برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم

(۲۳)

$$\begin{aligned} &\| \mu\int_{\Omega_J} \frac{\cos((x+\Delta x)\sqrt{\lambda+\kappa^2}) - \cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})}{\Delta x} dE_\lambda \\ &\qquad + \mu\int_{\Omega_J} \sqrt{\lambda+\kappa^2}\sin(x\sqrt{\lambda+\kappa^2}) dE_\lambda \| \\ &\le \| \mu \| \| \int_{\Omega_J} \frac{\cos((x+\Delta x)\sqrt{\lambda+\kappa^2}) - \cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})}{\Delta x} \\ &\qquad + \sqrt{\lambda+\kappa^2}\sin(x\sqrt{\lambda+\kappa^2}) dE_\lambda \| \end{aligned}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

$$\leq \|\mu\| \sup_{\lambda\in\Omega_J} \left| \frac{\cos\left((x+\Delta x)\sqrt{\lambda+\kappa^2}\right)-\cos\left(x\sqrt{\lambda+\kappa^2}\right)}{\Delta x} + \sqrt{\lambda+\kappa^2}\sin(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})\right| \to 0$$

وقتی که $\Delta x \to 0$. در نتیجهٔ تساوی (۲۳) حاصل می‌شود. با ادامهٔ همین روند برای بردار c_X می‌توان نتیجه گرفت که

$$c_{XX} = -\mu\int_{\Omega_J} (\lambda+\kappa^2)\cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})dE_\lambda. \tag{۲۴}$$

از طرف دیگر، با استفاده از قضیهٔ طیفی [۳۰] یا [۳۱] (صفحهٔ ۲۵۹) مشاهده می‌شود که

$$\begin{aligned}(D_J+\kappa^2)c &= \left(\int_{\Omega_J}(\lambda+\kappa^2)dE_\lambda\right)\left(\mu\int_{\Omega_J}\cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})dE_\lambda\right)\\ &= \mu\int_{\Omega_J}(\lambda+\kappa^2)\cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})dE_\lambda\end{aligned} \tag{۲۵}$$

با جای‌گذاری روابط (۲۳) و (۲۴) در سیستم (۲۲) نتیجه می‌شود $c_{XX}+(D_J+\kappa^2)c=0$. هم‌چنین با استفاده از تعریف خانوادهٔ طیفی به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $c(0)=\mu$ و $c_X(0)=0$.

۱. پایداری جواب موجک شانون

در این قسمت به بیان پایداری جواب مسئلهٔ (۱) از طریق فرم نمایش موجک شانون می‌پردازیم. فرض کنید $u_J^\delta(x,y)$ نمایش جواب موجک شانون متناظر با دادهٔ کوشی اندازه‌گیری شده $\varphi_m(y)$ باشد. به‌عبارت دیگر،

$$u_J^\delta(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(m)}(x)\phi_{J,k}(y), \tag{۲۶}$$

که در آن بردار نامتناهی‌البعد

$$c^{(m)}(x) = \mu^m\int_{\Omega_J}\cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})dE_\lambda, \quad \mu^m = \{\mu^m(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\langle\varphi_m(0),\phi_{J,k}(0)\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

قضیهٔ ۳ پایداری نمایش جواب مبتنی بر موجک شانون نسبت به اختلال دادهٔ کوشی را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۳. (پایداری) *فرض کنید $u_J(x,0)$ و $u_J^\delta(x,0)$ به‌ترتیب جواب‌های منظم‌سازی مبتنی بر موجک شانون متناظر با داده‌های کوشی $\varphi(0)$ و $\varphi_m(0)$ باشند. به‌علاوه فرض کنید نامساوی (۱۸) برقرار باشد. در این صورت برای هر $x\in(0,d]$،*

$$\| u_J(x,0)-u_J^\delta(x,0)\|_{L^2} \leq \delta. \tag{۲۷}$$

اثبات. فرض کنید $u_J(x,0)$ و $u_J^\delta(x,0)$ به‌ترتیب نمایش جواب‌های متناظر با روابط (۲۱) و (۲۶) باشند. با استفاده از قضیهٔ پلانچرال[1] و قضیهٔ طیفی داریم:

1. Plancherel theorem

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

$$
\begin{aligned}
\| u_J(x,\cdot)-u_J^{\delta}(x,0)\|_{L^2} &\le \| c(x)-c^{(m)}(x)\|_{\ell^2} \\
&\le \| (\mu-\mu^m)\int_{\Omega_J}\cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})dE_\lambda\|_{\ell^2} \\
&\le \| \int_{\Omega_J}\cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})dE_\lambda\|_{\ell^2}\| \mu-\mu^m\|_{\ell^2} \\
&\le \sup_{\lambda\in\Omega_J}\left|\cos\left(x\sqrt{\lambda+\kappa^2}\right)\right| \| P_J\left(\varphi(0)-\varphi_m(0)\right)\|_{\ell^2} \\
&\le \| \varphi(0)-\varphi_m(0)\|_{\ell^2} \\
&\le \delta,
\end{aligned}
\tag{۲۸}
$$

زیرا P_J یک عملگر تصویر است و همواره نامساوی $\| P_J\varphi\| \le \| \varphi\|$ برقرار است.

قضیهٔ ۴. *فرض کنید $P_J u(x,\cdot)$ عملگر تصویر موجک متناظر با جواب دقیق $u(x,0)$ از مسئلهٔ (۱) باشد. در این صورت $P_J u(x,0)$ در دستگاه (۲۹) صدق می‌کند:*

$$
\begin{cases}
(P_J u)_{xx}+P_J(P_J u)_{yy}+\kappa^2 P_J u=0, & (x,y)\in(0,d]\times\mathbb{R}, \\
P_J u(0,y)=P_J\varphi(y), & y\in\mathbb{R}, \\
(P_J u)_x(0,y)=0, & y\in\mathbb{R}.
\end{cases}
\tag{۲۹}
$$

اثبات. با توجه به این‌که تابع u جواب مسئلهٔ (۱) است، به‌سادگی نتیجه می‌شود که $P_J u$ در مسئلهٔ (۳۰) صدق می‌کند.

$$
\begin{cases}
(P_J u)_{xx}+P_J(P_J u)_{yy}+P_J\left((I-P_J)u\right)_{yy}+\kappa^2 P_J u=0, & (x,y)\in(0,d]\times\mathbb{R}, \\
P_J u(0,y)=P_J\varphi(y), & y\in\mathbb{R}, \\
(P_J u)_x(0,y)=0, & y\in\mathbb{R}.
\end{cases}
\tag{۳۰}
$$

با استفاده از رابطهٔ (۱۷) و اتحاد پارسوال می‌توان نتیجه گرفت

$$
\begin{aligned}
\| P_J\left((I-P_J)u\right)_{yy}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\le \| P_J(i\omega)^2(\hat{u}-P_J u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\le \| P_J(i\omega)^2(\hat{u}-P_J u)\|^2_{L^2(\Omega_J)} \\
&+\| P_J(i\omega)^2(\hat{u}-P_J u)\|^2_{L^2(\Gamma_J)} \\
&=0.
\end{aligned}
\tag{۳۱}
$$

که در آن $\Gamma_J:=\mathbb{R}\setminus\Omega_J$. از این‌رو، $P_J u(x,y)$ جواب مسئلهٔ (۲۹) است.

حال فرض کنید جواب دقیق متناظر با تصویر موجک به‌صورت (۳۲) در نظر گرفته شود:

$$
P_J u(x,y)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(x)\phi_{J,k}(y),
\tag{۳۲}
$$

که در آن $a(x)=\{a_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}=\{\langle u(x,0),\phi_{J,k}(0)\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}}$. به‌راحتی می‌توان نشان داد که بردار ضرایب

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

نامتناهی‌البعد $a(x)$ در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۳) صدق می‌کند.

$$\begin{cases} a_{xx}+(D_J+\kappa^2)a=0, & x\in(0,d], \\ a(0)=\mu, \\ a_x(0)=0, \end{cases} \tag{۳۳}$$

که در آن $\mu=\{\mu(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}=\{\langle\varphi(0),\phi_{J,k}(0)\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}}$. قضیهٔ بعد ارتباط بین جواب مبتنی بر موجک شانون و عملگر تصویر موجک متناظر با جواب دقیق مسئلهٔ (۱) را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۵. *فرض کنید که $u(x,y)$ جواب دقیق مسئلهٔ (۱) باشد. در این صورت، برای هر $J\in Z$، $P_J u(x,y)=u_J(x,y)$.*

اثبات. تابع $v_J(x,y):=P_J u(x,y)-u_J(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\begin{aligned} v_J(x,y) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(x)\phi_{J,k}(y)-\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(x)\phi_{J,k}(y) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_k(x)-c_k(x))\phi_{J,k}(y) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k(x)\phi_{J,k}(y) \end{aligned} \tag{۳۴}$$

که در آن برای هر $k\in\mathbb{Z}$، $\beta_k(x):=a_k(x)-c_k(x)$. با استفاده از روابط (۲۲) و (۳۳) نتیجه می‌شود که بردار ضرایب نامتناهی‌البعد $\beta(x)=\{\beta_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۵) صدق می‌کند.

$$\begin{cases} \beta_{xx}+(D_J+\kappa^2)\beta=0, & x\in(0,d], \\ \beta(0)=0, \\ \beta_x(0)=0, \end{cases} \tag{۳۵}$$

به این‌ترتیب با مقایسهٔ دستگاه‌های (۲۲) و (۳۳) نتیجه می‌شود $\beta(x)=\mu\int_{\Omega_J}\cos(x\sqrt{\lambda+\kappa^2})dE_\lambda$ و $\mu=0$. در نتیجه $\beta\equiv 0$ یعنی، $P_J u\equiv u_J$.

تقریبی از جواب دقیق مسئلهٔ (۱) در زیرفضای تولید شده به‌وسیلهٔ موجک شانون در قضیهٔ ۶ بیان شده است.

قضیهٔ ۶. *فرض کنید $u(x,y)$ جواب دقیق مسئلهٔ (۱) متناظر با شرط پایدارسازی (۲) باشد. در این صورت،*

$$\| u(x,\cdot)-P_J u(x,\cdot)\|_{L^2}\le 2e^{(x-d)\sqrt{(\pi 2^J)^2-\kappa^2}}((\pi 2^J)^2-\kappa^2)^{-\frac{p}{2}}M. \tag{۳۶}$$

که در آن $p\ge 0$.

اثبات. با استفاده از رابطهٔ (۱۷) و اتحاد پارسوال داریم

$$\begin{aligned} \| u(x,\cdot)-P_J u(x,\cdot)\|_{L^2}^2 &= \| \hat{u}(x,0)-P_J u(x,0)\|_{L^2}^2 \\ &= \| (I-P_J)\chi_J^+(0)\hat{u}(x,0)\|_{L^2}^2 \\ &\le \| \chi_J^+(0)\hat{u}(x,0)\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{۳۷}$$

که در آن χ_J^+ نشان‌دهندهٔ تابع مشخصهٔ بازهٔ $[\pi 2^J,+\infty)$ است. با توجه به فرم جواب مسئلهٔ (۱) در فضای

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

فرکانس، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\| u(x,0)-P_J u(x,0)\|_{L^2} &= \Big(\int_{\Gamma_J} |\hat{\varphi}(\omega)\cosh(x\sqrt{|\omega|^2-\kappa^2})|^2 d\omega\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\int_{\Gamma_J} \Big|\frac{\cosh(x\sqrt{|\omega|^2-\kappa^2})}{\cosh(d\sqrt{|\omega|^2-\kappa^2})}\hat{u}(d,\omega)\Big|^2 d\omega\Big)^{1/2} \\
&\le \sup_{\omega\in\Gamma_J} 2e^{(x-d)\sqrt{|\omega|^2-\kappa^2}}(1+|\omega|^2)^{-p/2}M \\
&\le \sup_{\omega\in\Gamma_J} 2e^{(x-d)\sqrt{|\omega|^2-\kappa^2}}|\omega|^{-p}M \\
&\le \sup_{\omega\in\Gamma_J} 2e^{(x-d)\sqrt{|\omega|^2-\kappa^2}}(|\omega|^2-\kappa^2)^{-p/2}M \\
&\le 2e^{(x-d)\sqrt{(\pi 2^J)^2-\kappa^2}}((\pi 2^J)^2-\kappa^2)^{-p/2}M.
\end{aligned} \tag{۳۸}$$

توجه کنید که برای هر $|\omega|\ge\kappa$، نامساوی

$$\frac{1}{2}e^{(x-d)\sqrt{|\omega|^2-\kappa^2}} \le \cosh(x\sqrt{|\omega|^2-\kappa^2}) \le e^{(x-d)\sqrt{|\omega|^2-\kappa^2}}$$

برقرار است.

قضیهٔ ۷ نتیجهٔ اصلی این مقاله است و بیان می‌کند که تحت شرط پایدارسازی، نه تنها یک تقریب پایدار و دقیق از نوع هولدر-لگاریتمی با استفاده از منظم‌سازی موجک شانون برای جواب دقیق مسئله استخراج می‌شود، بلکه به مفهوم تاتنهان[1] این تقریب از مرتبهٔ بهینه نیز است. به‌عبارت دیگر تقریب هولدر- لگاریتمی، بهترین کران خطای ممکن برای مسئلهٔ (۱) *است که بهینه نیز است* ([۲۶] به قضیهٔ **۴.۲** رجوع کنید).

قضیهٔ ۷. فرض کنید شرایط (۱۸) و (۱۹) برای مسئلهٔ (۱) برقرار *باشند. به‌علاوه فرض کنید پارامتر منظم‌سازی* $J = J(\delta, M)$ *به‌صورت* (۳۹) *در نظر گرفته شود.*

$$J = \Big[\frac{1}{2}\log_2\Big(\frac{1}{\pi^2}\Big(\ln\Big(\Big(\frac{M}{\delta}\Big)^{1/d}\Big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\Big)^{-p/d}\Big)\Big)^2+\Big(\frac{\kappa}{\pi}\Big)^2\Big)\Big], \tag{۳۹}$$

که در آن $\delta\to 0$ نشان‌دهندهٔ جزء صحیح عدد حقیقی a است. در این صورت، وقتی که $\delta\to 0$، تقریب پایدار (۴۰) برقرار است:

$$\| u(x,\cdot)-u_J^{\delta}(x,\cdot)\|_{L^2} \le 2M^{\frac{x}{d}}\delta^{1-\frac{x}{d}}\Big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\Big)^{-p\frac{x}{d}}(1+o(1)). \tag{۴۰}$$

اثبات. به‌سادگی مشاهده می‌شود که

$$\begin{aligned}
\| u(x,0)-u_J^{\delta}(x,0)\|_{L^2} \le{}& \| u(x,0)-P_J(x,0)\|_{L^2} + \| P_J u(x,0)-u_J(x,0)\|_{L^2} \\
&+ \| u_J(x,0)-u_J^{\delta}(x,0)\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{۴۱}$$

با جای‌گذاری نتایج قضایای ۳، ۵ و ۶ در نامساوی مذکور، داریم

1. Tautenhahen

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

$$\| u(x,\cdot)-u_J^{\delta}(x,\cdot)\|_{L^2} \le 2e^{(x-d)\sqrt{(\pi 2^J)^2-\kappa^2}}((\pi 2^J)^2-\kappa^2)^{-p/2}M+\delta. \qquad (۴۲)$$

اکنون با جای‌گذاری J از رابطهٔ (۳۹) داریم:

$$2e^{(x-d)\sqrt{(\pi 2^J)^2-\kappa^2}}M \le 2M^{\frac{x}{d}}\delta^{1-\frac{x}{d}}\Big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\Big)^{p(1-\frac{x}{d})}, \qquad (۴۳)$$

و

$$\begin{aligned}((\pi 2^J)^2-\kappa^2)^{-p/2} &\le \Big(\ln\Big(\big(\frac{M}{\delta}\big)^{1/d}\big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\big)^{-p/d}\Big)\Big)^{-p}\\ &= \Big(\frac{1}{d}\ln\big(\frac{M}{\delta}\big)+\big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\big)^{-p/d}\Big)^{-p}\\ &= \Big(\frac{1}{\frac{1}{d}\ln\big(\frac{M}{\delta}\big)+\big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\big)^{-p/d}}\Big)^{p} \qquad (۴۴)\\ &= \Big(\frac{\frac{1}{d}\ln\big(\frac{M}{\delta}\big)}{\frac{1}{d}\ln\big(\frac{M}{\delta}\big)+\big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\big)^{-p/d}}\Big)^{p}\Big(\frac{1}{d}\ln\big(\frac{M}{\delta}\big)\Big)^{-p}.\end{aligned}$$

با جای‌گذاری روابط (۴۳) و (۴۴) در نامساوی (۴۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\| u(x,0)-u_J^{\delta}(x,0)\|_{L^2} &\le 2M^{\frac{x}{d}}\delta^{1-\frac{x}{d}}\Big(\ln\frac{M}{\delta}\Big)^{-p\frac{x}{d}}\\ &\quad\times\Big(\frac{\frac{1}{d}\ln\big(\frac{M}{\delta}\big)}{\frac{1}{d}\ln\big(\frac{M}{\delta}\big)+\big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\big)^{-p/d}}\Big)^{p}+\delta\\ &= 2M^{\frac{x}{d}}\delta^{1-\frac{x}{d}}\Big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\Big)^{-p\frac{x}{d}}(1+o(1)),\end{aligned}$$

وقتی $\delta\to 0$. به این ترتیب *نامساوی* (۴۰) *حاصل می‌شود.*

نکتهٔ ۸. *در حالت* $p=0$ *نامساوی* (۴۰) *منجر به تقریبی از نوع هولدر می‌شود که همگرایی جواب مسئله را به ازای* $x=d$ *در نرم-* L^2 *تضمین نمی‌کند.از این‌رو، برای تضمین همگرایی جواب برای هر* $0\le x\le d$، *کافی است در شرط پایدارسازی، حالت* $p>0$ *را در نظر بگیریم. در این حالت تقریب (۴۰) لگاریتمی نامیده می‌شود که از نظر سرعت همگرایی بسیار سریع‌تر از تقریب هولدر است. به‌ویژه در* $x=d$، *وقتی* $\delta\to 0$ *داریم*

$$\| u(d,\cdot)-u_J^{\delta}(d,\cdot)\|_{L^2} \le 2M\Big(\frac{1}{d}\ln\frac{M}{\delta}\Big)^{-p}(1+o(1)).$$

که یک تقریب پایدار و دقیق از نوع لگاریتمی است و همگرایی جواب را تضمین می‌کند.

نکتهٔ ۹. *در عمل معمولا کران پیشین* M، *در نامساوی (۱۸) نامشخص است. بنابراین با انتخاب پارامتر منظم‌سازی* J *بدین‌صورت*

$$J=\Big[\frac{1}{2}\log_2\Big(\frac{1}{\pi^2}\Big(\ln\Big(\big(\frac{1}{\delta}\big)^{1/d}\big(\frac{1}{d}\ln\frac{1}{\delta}\big)^{-p/d}\Big)\Big)^2+\big(\frac{\kappa}{\pi}\big)^2\Big)\Big],$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

نامساوی (۴۰) به تقریب پایدار زیر تقلیل پیدا می‌کند

$$\| u(x,0)-u_J^{\delta}(x,0)\|_{L^2} \le 2\delta^{1-\frac{x}{d}}\Big(\frac{1}{d}\ln\frac{1}{\delta}\Big)^{-p\frac{x}{d}}(1+o(1)) \tag{۴۵}$$

چون این تقریب از لحاظ مرتبهٔ بهینه است زیرا از طریق یک فرآیند بهینه سازی، بهترین کران خطای ممکن برای تقریب جواب مسئلهٔ (۱) به‌دست می‌آید [۲۵]، [۲۶]، [۲۷]. بنابراین هیچ روش محاسباتی وجود ندارد که بتوان با استفاده از آن تقریبی بهتر و دقیق‌تر را ارائه کرد. از این‌رو، می‌توان موجک‌ها را به‌عنوان ابزارهای قدرتمند و جدید در حل مسائل معکوس و بد رفتار در نظر گرفت.

پیاده‌سازی محاسباتی

در این بخش جنبه‌های عددی روش منظم‌سازی موجک شانون بحث می‌شود. تمام محاسبات در این بخش بر اساس نرم‌افزار MATHEMATICA انجام شده است. برای عدد زوج N، فرض کنید دنبالهٔ $\{\varphi(y_i)\}_{i=1}^{N}$ نمونه‌ای از دادهٔ کوشی $\varphi(y)$ روی بازهٔ $a \le y \le b$ باشد. به‌منظور استخراج داده‌های اختلالی، یک اختلال تصادفی از نوع توزیع نرمال و بطور یکنواخت به‌صورت (۴۶) به داده‌ها اضافه می‌شود:

$$\varphi_m := \varphi+\epsilon\ \text{"}RandomReal[NormalDistribution[.],""Length["\varphi"]]\text{"}; \tag{۴۶}$$

که در آن "$RandomReal[0]$" مولد یک عدد حقیقی تصادفی در بازهٔ $[0,1]$، "$NormalDistribution[0]$" توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار یک و "$Length["\varphi"]$" طول دنبالهٔ $\{\varphi(y_i)\}_{i=1}^{N}$ را نشان می‌دهد. هم‌چنین $\epsilon > 0$ نشان‌دهندهٔ سطح اغتشاش داده‌های اندازه‌گیری شده است. اغتشاش کلی دادها را با $\delta > 0$ نشان داده و به‌صورت $\delta := \|\varphi-\varphi_m\|_{\ell^2,N}$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$\| v\|_{\ell^2,N} := \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(v(x_i))^2}.$$

با استفاده از بخش ۴، نمایش جواب موجک شانون (۲۶) متناظر با دادهٔ اختلالی $\varphi_m(\cdot)$ برای مسئلهٔ (۱) با انتخاب پارامتر منظم‌سازی زیر در نظر گرفته می‌شود

$$J=\Big[\frac{1}{2}\log_2\Big(\frac{1}{\pi^2}\Big(\ln\Big(\Big(\frac{1}{\delta}\Big)^{1/d}\Big(\frac{1}{d}\ln\frac{1}{\delta}\Big)^{-p/d}\Big)\Big)^2+\Big(\frac{\kappa}{\pi}\Big)^2\Big)\Big],$$

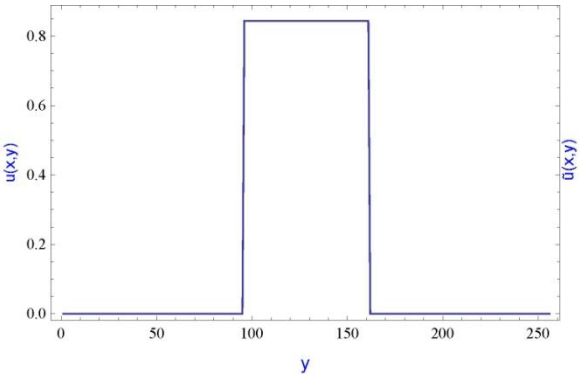
مثال ۱۰. *برای* $\kappa_i = 0$ *و* $d=1$، *مسئلهٔ کوشی وابسته به معادلهٔ اسکالر هلمهولتز را روی نوار نامتناهی بدین‌صورت در نظر بگیرید*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)+\kappa_r^2 u(x,y)=0, & 0<x\le 1, y\in\mathbb{R},\\ u(0,y)=\chi_A(y), & y\in\mathbb{R},\\ \partial_x u(0,y)=0, & y\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{۴۷}$$

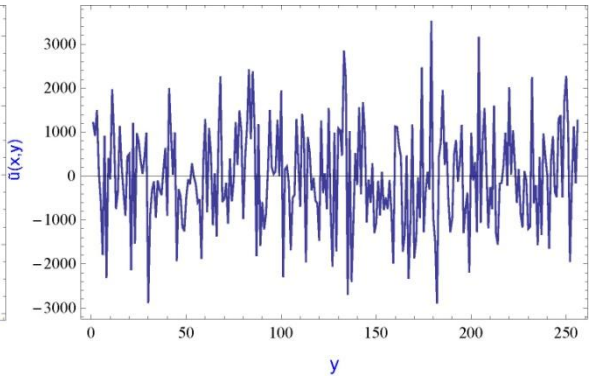
که در آن $\chi_A(0)$ تابع مشخصهٔ بازهٔ $A=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ است. تابع $u(x,y)=\cos(\kappa_r x)\chi_A(y)$ جواب تحلیلی مسئلهٔ مذکور با ناپیوستگی‌هایی در نقاط $y=\pm\frac{\pi}{4}$ است. ناپیوستگی‌های دادهٔ کوشی به جواب تحلیلی مسئله تزریق شده و بنابراین فرایند بازسازی جواب در نقاط ناپیوسته با مشکل روبرو می‌شود. از نقطه نظر عملی، تنها قادر به تعیین

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

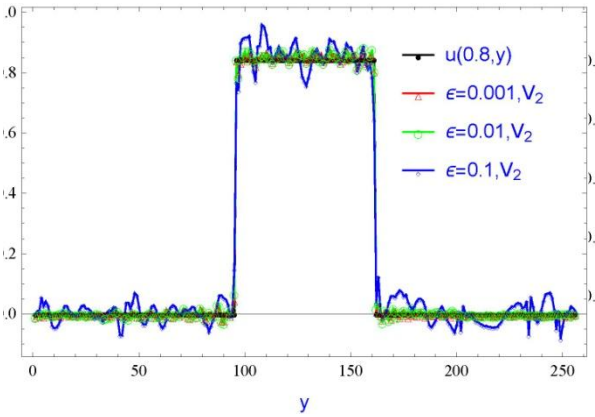
میدان تشعشعی روی قسمتی از دامنهٔ مورد نظر هستیم. به‌عبارت دیگر، برای این مسئله تنها قادر به اندازه‌گیری دادهٔ کوشی $\chi_A(y)$ در نقطهٔ $x=0$ هستیم. از این‌رو، هدف از حل مسئله عبارت است از این‌که چگونه میدان تشعشعی کل را از طریق داده‌های اندازه‌گیری شده برای تمام نقاط $0<x\leq 1$ بازیابی کنیم. برای این منظور، مسئله (۴۷) را برای عدد موج $\kappa_r=15$ و $x=0.8$ ارزیابی می‌کنیم. در شکل ۱، تصویرهای (الف) و (ب) به‌ترتیب جواب تحلیلی و جواب بازسازی شده بدون روش منظم‌سازی را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که جواب بازسازی شده از داده‌های اختلالی با سطح اغتشاش $\epsilon=0.001$ بدون طرح منظم‌سازی دارای نوساناتی با دامنهٔ $[-3000,3000]$ است که به‌علت تأثیر مولفه‌های فرکانسی بالا در جواب مسئله است. بنابراین باید از روش‌هایی بنام منظم‌سازی برای بازسازی جواب مسئله استفاده شود. مقایسهٔ جواب تحلیلی و جواب‌های منظم‌سازی شده متناظر با سطوح اغتشاش $\epsilon=0.001,0.01,0.1$ در زیرفضاهای مقیاس V_2 تا V_5 انجام شده و نتایج از طریق تصویرهای (پ) تا (د) نمایش داده شده است. از این تصاویر نتیجه می‌گیریم هر چه سطح اغتشاش کوچک‌تر باشد، دقت جواب منظم‌سازی شده بیش‌تر است. از بین جواب‌های منظم‌سازی شده در زیرفضاهای مقیاس V_2 تا V_5، جواب‌های بازسازی شده در زیرفضای V_2 دقت بیش‌تری دارند. در حقیقت، اگر پارامتر منظم‌سازی J بزرگ در نظر گرفته شود، اختلال موجود در دادهٔ کوشی φ_m به اندازهٔ کافی به‌وسیلهٔ‌عملگر تصویر P_J میرا نشده و بنابراین شدت تقویت مؤلفه‌های فرکانسی بالا در $\hat{\varphi}_m$ منجر به کاهش دقت جواب منظم‌سازی می‌شود.



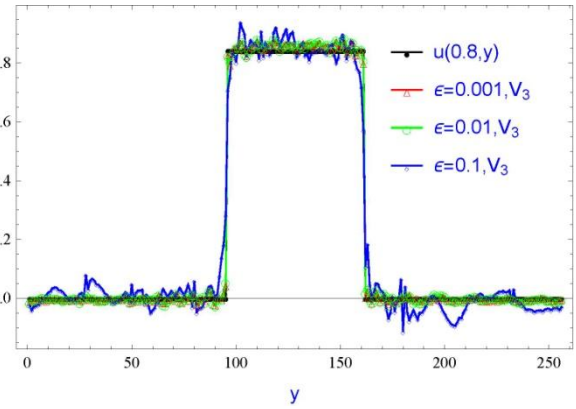
الف) جواب تحلیلی



ب)جواب بدون منظم سازی



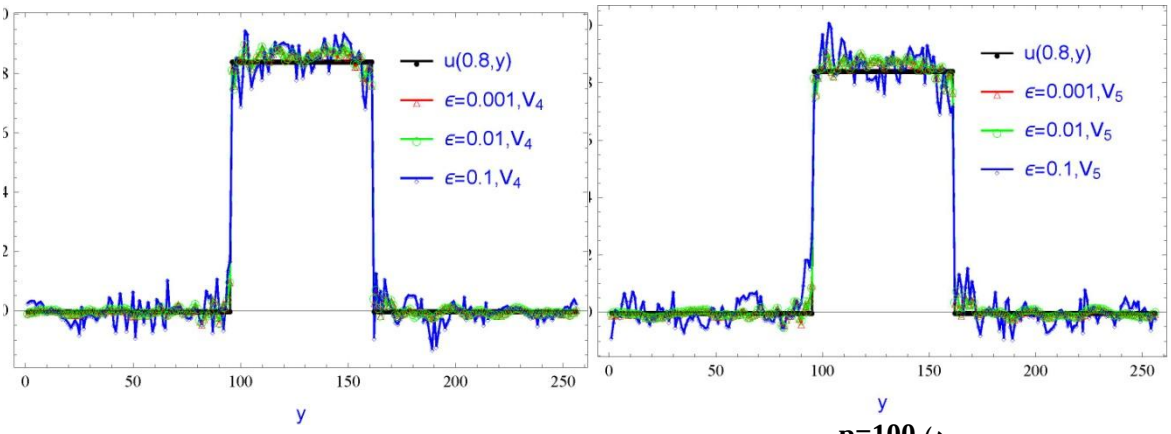
پ) p=2



ت) p=25

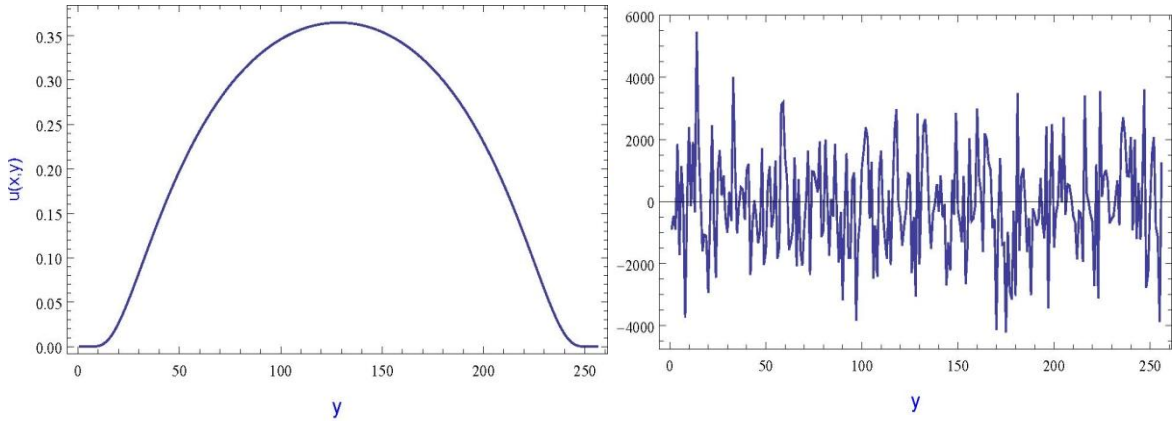
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

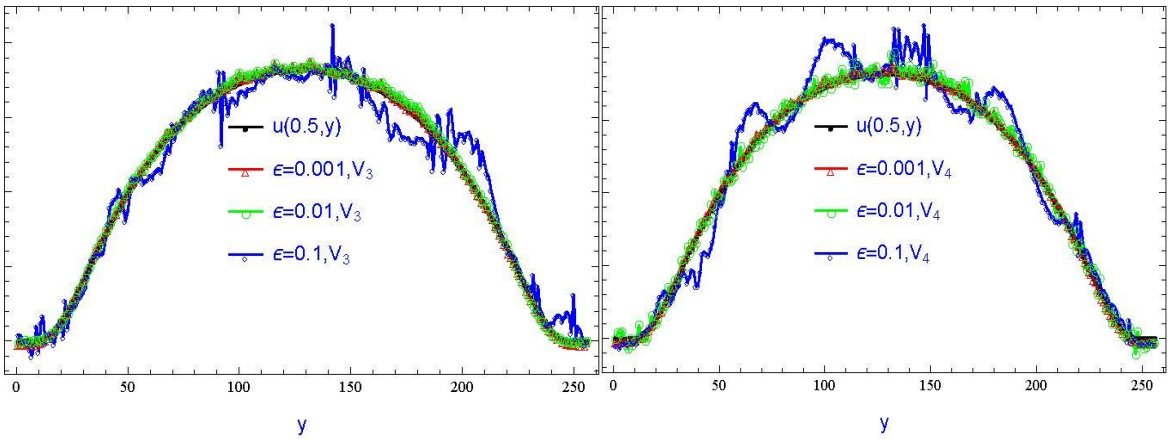


ج) p=50 د) p=100

شکل ۱. مقایسهٔ جواب تحلیلی و جواب‌های منظم‌سازی در زیرفضاهای مختلف



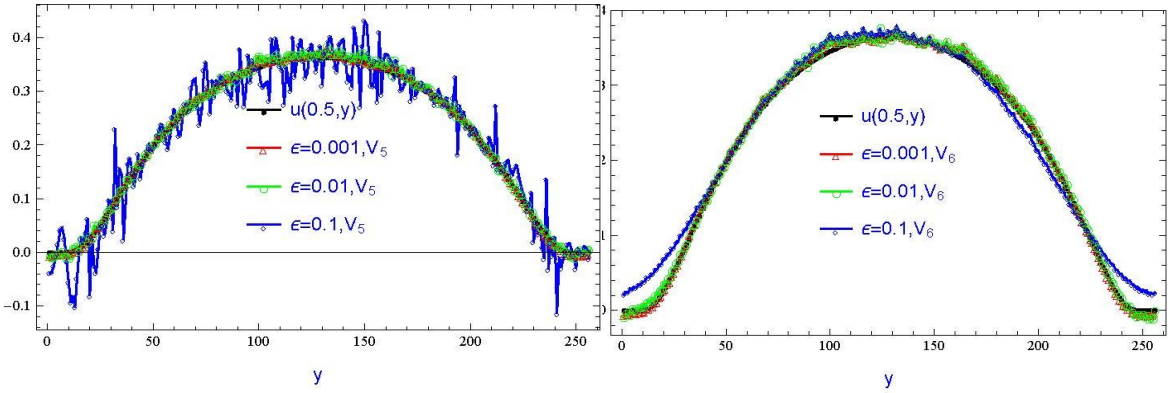
الف)جواب تحلیلی ب)جواب بدون منظم‌سازی



پ)p=2 ت)p=50

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]



ج) p=80 د) p=190

شکل۲. مقایسهٔ جواب تحلیلی و جواب‌های منظم‌سازی در زیرفضاهای مختلف

مثال ۱۱. *برای عدد موج* $\kappa = 50$ *و* $d = 1$*، مسئلهٔ کوشی (۱) متناظر با دادهٔ کوشی*

$$\varphi(y) = \begin{cases} \exp(\dfrac{\pi^2}{y^2 - \pi^2}), & |y| < \pi, \\ 0, & |y| \geq \pi, \end{cases} \tag{۴۸}$$

را در نظر بگیرید. چون $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$، بنابراین طیف فرکانسی آن نیز به فضای $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ تعلق دارد. برای محاسبهٔ $u(x,y)$ می‌توان از تبدیل فوریهٔ معکوس برای دامنهٔ متناهی $[-\pi,\pi]$ بدین‌صورت استفاده کرد:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega y}\, d\omega,$$

تفاوت این مثال با مثال قبل در این است که دادهٔ کوشی در این مسئله یک تابع هموار با محمل فشرده است. چون پایه‌های توابع مقیاس موجک شانون توابعی هموار و دارای طیف فرکانسی با محمل فشرده هستند، از این‌رو، می‌توان داده‌های هموار را با دقت بیش‌تری تقریب زد. نحوهٔ رفتار جواب تحلیلی و جواب‌های منظم‌سازی شده از دادهٔ کوشی φ به‌ازای سطوح مختلف اغتشاش در شکل ۲ نمایش داده شده است. با توجه به تصویر قسمت (ب)، نتیجه می‌شود که تأثیر تصادفی اغتشاش در دادهٔ کوشی با مقدار $\epsilon = 0.001$، منجر به خطایی نوسانی با دامنهٔ $[-4000, 6000]$ در جواب تحلیلی مسئله بدون در نظر گرفتن طرح منظم‌سازی شده است و فرایند بازیابی جواب تحلیلی مسئله را با مشکل مواجهه می‌کند. با استفاده از روش منظم‌سازی موجک شانون، تصویرهای (پ) تا (د) جواب‌های منظم‌سازی مسئله را به‌ازای سطوح مختلف اغتشاش در زیرفضاهای مقیاس V_3 تا V_6 در نقطهٔ $x = 0.5$ نمایش می‌دهند. هریک از تصویرهای (پ) تا (د) به‌ترتیب با اعمال شرط پایدارسازی متناظر با درجهٔ همواری $p = 2, 50, 80, 190$ در فضای سوبولف H^p استخراج شده‌اند. مشاهده می‌شود که جواب منظم‌سازی شده با روش موجک شانون در زیرفضای V_3، نسبت به بقیه دقت بیش‌تری دارد. اگر چه جواب‌های منظم‌سازی شده در زیرفضاهای V_4 تا V_6، با کاهش سطح اغتشاش از دقت قابل قبولی برخوردار هستند، اما جواب استخراج شده در زیرفضای V_3 دقت بیش‌تری داشته و می‌توان آن را به‌عنوان زیرفضای بهینه در نظر گرفت.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مسئلهٔ معکوس و بدرفتار متناظر با مسئلهٔ کوشی برای معادلهٔ هلمهولتز در یک نوار نامتناهی در

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

نظر گرفته شد. با استفاده از روش منظم‌سازی موجک شانون، یک تخمین بهینه و پایدار از نوع هولدر-لگاریتمی از طریق اعمال شرط پایدار سازی برای مسئله استخراج شد. آنالیز روش پیشنهادی نشان می‌دهد که به‌ازای $p > 0$ ، تخمین نوع لگاریتمی از سرعت همگرایی به مراتب بیش‌تری نسبت به تخمین نوع هولدر به‌منظور بازیابی جواب در نقطه $x = d$ برخوردار است. از نقطه نظر محاسباتی، برای تأیید عملکرد و کارایی روش منظم‌سازی موجک شانون، مثال‌هایی ارائه شده است. با توجه به مثال‌های ارائه شده و آنالیز کیفی روش، می‌توان نتیجه گرفت که موجک‌ها از عملکرد خوب و دقیقی در طراحی روش‌های منظم‌سازی برخوردارند. به‌علاوه این روش را می‌توان به‌منظور حل ردهٔ گسترده‌ای از مسائل معکوس و بدرفتار درگیر با معادلات دیفرانسیل نسبی از نوع سهموی و هذلولوی به‌کار برد. به‌عنوان مثال می‌توان مسائل انتشار حرارت معکوس پس‌رو در زمان، مسئلهٔ رسانش حرارتی معکوس در مکان، مسائل معکوس درگیر با معادلهٔ موج شرودینگر و غیره را با روش‌های منظم‌سازی موجک شانون بررسی کرد. این مسائل از نقطه نظر ریاضی فیزک، مسائلی جذاب و چالش برانگیز است و بررسی و تحلیل آنها نیازمند تحقیقات نظری در آینده است.

منابع

1. Beskos D. E., "Boundary element method in dynamic analysis", part II (1986-1996), ASME Appl. Mech. Rev, 50 (1997) 149-197.
2. Chen J. T., Wong F. C., "Dual formulation of multiple reciprocity method for the acoustic mode of a cavity with a thin partition", J. Sound, Vib. 217 (1998) 75-95.
3. Harari I., Barbone P. E., Slavutin M., Shalom R., "Boundary infinite elements for the Helmholtz equation in exterior domains", Int. J. Numer. Meth. Eng. 41 (1998) 1105-1131.
4. Liang J., Subramaniam S., "Computation of molecular electrostatics with boundary element methods", Biophys, J. 73 (1997) 1830-1841.
5. Hall W. S., Mao X. Q., "A boundary element investigation of irregular frequencies in electromagnetic scattering", Eng. Anal. Bound. Elem. 16 (1995) 245-252.
6. Kraus A. D., Aziz A., Welty J., "Extended Surface Heat Transfer", Wiley, New York (2001).
7. Kononov A. V., Riyanti C. D., de Leeuw S. W., Oosterlee C. W., Vuik C., "Numerical performance of a parallel solution method for a heterogeneous 2D Helmholtz equation", Computing and Visualization in Science, 11(2008) 139-146.
8. Reginska T., Reginski K., "Approximate solution of a Cauchy problem for the Helmholtz equation", Inverse Problems, 22(2006) 975-989.
9. Hadamard J., "Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations", University Press, London, UK, (1923).
10. Marin L., Elliott L., Heggs P. J., Ingham D. B., Lesnic D., Wen X., "BEM solution for the Cauchy problem associated with Helmholtztype equations by the Landweber method", Eng. Anal. Bound, Elem. 28 (2004) 1025-1034.
11. Marin L., Elliott L., Heggs P. J., Ingham D. B., Lesnic D., Wen X., "Conjugate gradient-boundary element solution to the Cauchy problem for Helmholtz-type equations", Comput, Mech. 3 (2003) 367-377.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

12. Bai M. R., "Application of BEM(boundary element method)- based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries", Journal of the Acoustical Society of America., 92 (1992) 533-549.
13. Marin L., Lesnic D., "The method of fundamental solutions for the Cauchy problem associated with two-dimensional Helmholtz-type equations", Comput & Structures. 83 (2005) 267-278.
14. Wei T., Qin H. H., Shi R., "Numerical solution of an inverse 2D Cauchy problem connected with the Helmholtz equation", Inverse Problems. 24 (2008) 1-18.
15. Feng X. L., Ning W. T., "A wavelet regularization method for solving numerical analytic continuation", Int. J. Comput. Math., 92 (2015) 1025-1038.
16. Reginska T., "Sideways heat equation and wavelets", J. Comput. Appl. Math., 63 (1995) 209-214.
17. Reginska T., Elden L., "Solving the sideways heat equation by awavelet-Galerkin method", Inverse Probl., 13 (1997) 1093-1106.
18. Hao D. N., Schneider A., Reinhardt H. J., "Regularization of a noncharacteristic Cauchy problem for a parabolic equation", Inverse Probl., 11 (1995) 1247-1263.
19. Wang J. R., "Uniform convergence of wavelet solution to the sideways heat equation", Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 26 (2010) 1981-1992.
20. Qiu C. Y., Fu C. L., "Wavelets and regularization of the Cauchy problem for the Laplace equation", J. Math. Anal. Appl., 338 (2) (2008) 1440-1447.
21. Vani C., Avudainayagam A., "Regularized solution of the Cauchy problem for the Laplace equation using Meyer Wavelets", Math. Comput. Model., 36 (2002) 1151-1159.
22. Linhares de Mattos J. R., Lopes E. P., "A wavelet Galerkin method applied to partial differential equation with variable coefficients", Electron. J. Differential Equations 10 (2003) 211-225.
23. Karimi M., Rezaee A. R., "Regularization of the Cauchy problem for the Helmholtz equation by using Meyer wavelet", J. Comput. Appl. Math. 320 (2017) 79-95.
24. Karimi M., Moradlou F., Hajipour M., "On regularization and error estimates for the backward heat conduction with time-dependent thermal diffusivity factor", Commun. Nonlinear. Sci. Numer, Simulat 63 (2018) 21-37.
25. Tautenhahen U., "Optimal stable approximations for the sideways heat equation, J. Inv. Ill-Posed Problems 5 (1997) 287-307.
26. Tautenhahen U., "Conditional stability estimates and regularization with applications to Cauchy problems for the Helmholtz equation", Numer. Funct. Anal. Optim. 30 (9-10) (2009) 1065-1097.
27. Tautenhahn U., "Optimal stable solution of Cauchy problem for elliptic equation", J. Anal. Appl. 15 (4) (1996) 961-984.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]

28. Daubechies I., "Ten Lectures on Wavelets", SIAM, Philadelphia, PA (1992).

29. Reginska T., Eldén L., "Stability and convergence of a wavelet-Galerkin method for the sideways heat equation", J. Inverse Ill-Posed Probl. 8 (2000) 31-49.

30. Kreyszig E., "Introductory functional analysis with applications", High Educational Press, (1986).

31. Conway J. B., "A course in functional analysis", Springer-Verlag, NewYork (1990).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.371]