شبیه سازی عددی پدیده نامتعارف انتشار الکترونی یون‌ها در عصب با استفاده از روش پتروف-گلرکین موضعی

سید محمود ضابط زاده*
دانشگاه پیام نور، دانشکدهٔ علوم پایه، تهران
هادی روحانی قهساره
دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی علوم کاربردی

دریافت ۹۸/۰۲/۲۷ پذیرش ۹۸/۰۸/۱۸

چکیده

معادله دیفرانسیل کابل از اساسی‌ترین مدل‌های ریاضی در علوم عصب‌شناسی است که توصیف‌کننده پدیدهٔ انتشار الکترونی یون‌ها در شبکه اعصاب است. یافته‌های جدید نشان می‌دهد که معادله استاندارد کابل برای توصیف دقیق این پدیدهٔ انتشار دارای برخی نواقص است. از این‌رو، اخیراً مدل‌های ریاضی ارتقاء یافته توصیف‌کننده فرایند، مبتنی بر نظریه حسابان کسری ارائه شده است. در این تحقیق، معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری دوبعدی کابل غیرخطی به‌عنوان یک مدل جدید در دینامیک عصب‌ها، به‌طور عددی بررسی می‌شود. یک روش محاسباتی کارا و قدرتمند که ترکیبی از روش‌های ادغام زمانی و روش بدون شبکه مبتنی بر شکل ضعیف موضعی معادله حاکم است، برای حل عددی مدل پیاده سازی و اجرا شده است. برای این منظور ابتدا یک طرح تفاضلاتی ضمنی با مرتبه دقت دو برای گسسته‌سازی مدل در جهت زمان ارائه شده است. سپس یک روش عددی بدون شبکه مبتنی بر ایده روش پتروف-گالرکین موضعی برای گسسته‌سازی کلی مسئله استفاده شده است. روش ترکیبی پیشنهادی برای حل تقریبی سه مثال اجرا شده است. نتایج عددی حاصل ارائه شده توسط جدول‌ها و برخی شکل‌ها کارآیی و دقت زیاد روش را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: معادله کابل غیرخطی، معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری، روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی، روش بدون شبکه پتروف - گالرکین موضعی، آنالیز پایداری.

مقدمه

در دو دهۀ اخیر استفاده پژوهش‌گران از نظریه حسابان کسری در مدل‌بندی مسائل متنوع در فیزیک، علوم مهندسی، پزشکی، علوم‌زیستی و حتی اقتصاد به‌صورت چشم‌گیری افزایش یافته است. در واقع در اکثر پدیده‌ها، به‌ویژه فرایندهای پیچیده و نامتعارف فیزیکی و طبیعی، نظریه حسابان کلاسیک به‌طور کامل و دقیق قادر به توصیف پدیده و بیان ویژگی‌های ذاتی فرایند نیست، در حالی که، با استفاده از نظریه حسابان کسری و مفهوم مشتقات توسعه یافته و از مرتبه کسری می‌توان فرمول‌بندی‌های دقیق ریاضی برای این نوع پدیده‌ها ارائه کرد. به‌منظور اطلاعات بیش‌تر در رابطه با نظریه حسابان کسری و برای آشنایی با برخی از کاربردهای عملی و جذاب حسابان کسری، منابع [۱]، [۲] پیشنهاد می‌شوند. یکی از کاربردهای اساسی و مهم نظریه حسابان کسری، مدل‌بندی مسائل متنوع در حوزۀ علوم زیست ریاضی است [۲]. بدون شک از مهم‌ترین مدل‌های ریاضی در علوم عصب‌شناسی موجودات زنده، معادله کابل[1] است. در

*نویسنده مسئول zabetzadeh@yahoo.com

1. Cable equation

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

حقیقت معادله کابل از معادله معروف نرنست- پلانک[1] که توصیف‌کنندهٔ انتشار الکتریکی یون‌ها در استوانه‌های همگن و هموار است، نتیجه می‌شود. با این وجود، معادله نرنست- پلانک و شکل ساده شده آن (معادله کابل) برای توصیف پدیده‌های غیرعادی در سیستم‌های زیستی از جمله پدیده انتشار الکتریکی یون‌ها در عصب‌های خاردار دارای نقاط ضعف است. از این‌رو، در سال‌های اخیر با استفاده از نظریه حسابان کسری برخی مدل‌های کسری توسعه یافته از این دسته ازمعادلات معرفی شده‌اند که به‌سادگی قابلیت توصیف رفتار غیرعادی این دسته از پدیده‌های طبیعی در سیستم‌های زیستی را دارند. یک مدل تعمیم یافته از معادلهٔ کابل، معادله دیفرانسیل کسری کابل غیرخطی در فضای دو بعدی است که بدین‌صورت ارائه می‌شود [۳]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -{}_0^R D_t^{\alpha} u(\mathbf{x},t) + {}_0^R D_t^{\beta} \Delta u(\mathbf{x},t) - F(u(\mathbf{x},t)) + g(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} = (x,y) \in \Omega, \quad 0 \le t \le T, \quad (۱)$$

همراه با شرایط مرزی و اولیه:

$$u(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 \le t \le T, \quad (۲)$$

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \quad (۳)$$

که در آن $u(\mathbf{x},t)$ تابع مجهول است و باید محاسبه شود. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ دامنه مکانی مسئله با مرز هموار $\partial\Omega$ است. عملگر $\Delta(.) = \partial^2(.)/\partial x^2 + \partial^2(.)/\partial y^2$ اشاره به عملگر لاپلاس دارد. توابع $g(\mathbf{x},t)$، $f(\mathbf{x},t)$ و $u_0(\mathbf{x})$ توابع معلوم و به اندازهٔ کافی هموار هستند. $0 < \alpha, \beta < 1$ و ${}_0^R D_t^{\alpha} u$ نشان‌دهندهٔ مشتق چپ کسری ریمان لیوویل[2] نسبت به متغیر زمانی t بوده است و برای $0 < \alpha < 1$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$${}_0^R D_t^{\alpha} u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(\mathbf{x},\zeta)}{(t-\zeta)^{\alpha}} d\zeta. \quad (۴)$$

به‌علاوه $F(u(\mathbf{x},t))$ تابع منبع غیرخطی است و فرض می‌شود در شرط لیپ-شیتزی[3] صدق می‌کند. به این معنا که عدد ثابت و مثبت $\mathcal{K}$ موجود است به‌طوری‌که

$$\| F(u_1) - F(u_2) \| \le \mathcal{K} \| u_1 - u_2 \|. \quad (۵)$$

از آن‌جاکه یافتن جواب تحلیلی برای مسئلهٔ (1) بسیار مشکل و در بسیاری مواقع غیرممکن است، تلاش‌های زیادی برای یافتن جواب‌های تقریبی این معادله انجام شده است. نویسندگان در[۴] با استفاده از ترکیب روش تفاضلات متناهی[4] و روش‌های طیفی[5] ، جواب‌های عددی برای معادله کابل کسری در حالت یک‌بعدی ارائه کردند. در [۵]، یک روش تفاضلات متناهی فشرده تعمیم یافته برای حل عددی معادله کابل کسری یک بعدی ارائه و پایداری و همگرایی این روش بررسی شده است. ژانگ[6] و همکارانش [۶] با استفاده از ترکیب روش تفاضلات متناهی و هم‌محلی اسپلاین‌های متعامد[7]، جواب‌های تقریبی معادله کابل کسری خطی در حالت دو بعدی را محاسبه کردند. یو و جیانگ[8] با به‌کارگیری روش تفاضلات متناهی فشرده[9] مرتبهٔ چهارم جواب‌های عددی برای معادله کابل دو بعدی ارائه کردند

1. Nernest-Planck equation
2. Riemann–Liouville fractional
3. Lipschitz condition
4. Finite difference method
5. Spectral method
6. Zhang
7. Orthogonal spline collocation method
8. Yu and Jiang
9 Compact finite difference method

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

[۷]. آنها به‌کمک روش فوریه پایداری و همگرایی روش ارائه شده را اثبات کردند. وانگ[۱] و همکارانش [۸] به‌کمک گسسته‌سازی زمانی مرتبهٔ دوم و روش عناصر متناهی-گالرکین[۲] جواب‌های عددی برای معادله کابل غیرخطی یک بعدی به‌دست آوردند. به تازگی نیز با استفاده از روش بدون شبکه درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی جواب‌های تقریبی برای معادله کابل خطی در حالت دو بعدی در [۹] ارائه شده است. به‌علاوه در [۳] نویسندگان به‌کمک گسسته‌سازی زمانی مرتبهٔ دوم و یک روش ترکیبی عناصر محدود، برای معادلهٔ کابل غیرخطی دوبعدی جواب‌های عددی یافتند و پایداری و همگرایی روش عددی ارائه شده را بررسی کردند. از سوی دیگر حالت‌های تعمیم یافته این معادله نیز بررسی شده است. در [۱۰]، [۱۱] معادلهٔ کسری کابل با مرتبه‌های متغیر بررسی شده است. هم‌چنین یک حالت تعمیم یافته از معادله کابل کسری با مشتق کاپوتو نیز در [۱۲] معرفی شده است و جوابی تحلیلی برای حالت یک‌بعدی و خطی این معادله ارائه شده است.

در سال‌های اخیر رده‌ای از روش‌های عددی که به‌روش‌های بدون شبکه[۳] معروفند بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. از آن‌جاکه محاسبات در روش‌های بدون شبکه روی یک مجموعه گسسته از نقاط دامنه صورت می‌گیرد، از این‌رو، این روش‌ها در حل تقریبی مسائل کاربردی، چندبعدی و به‌ویژه روی دامنه‌های پیچیده و نامنظم بسیار کارا و انعطاف‌پذیر هستند و مشکلات شبکه‌بندی در روش‌های عددی سنتی را ندارد [۱۳]. مشهورترین روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه شعاعی[۴] هستند. علاقه‌مندان برای آشنایی بیش‌تر با روش‌های بدون شبکه به [۱۴] مراجعه کنند. روش‌های بدون شبکه مبتنی بر RBFs نیز ممکن است به دو شکل استفاده شود. یکی به‌صورت شکل قوی[۵]، که آن را روش هم‌محلی[۶] می‌نامند. این روش در [۱۵] به‌وسیلهٔ کانسا ابداع شد. شکل دوم به‌صورت شکل ضعیف[۷] است که به‌وسیلهٔ لیو[۸] [۱۳،۱۶] در دو رویکرد موضعی و سراسری استفاده شد. در حال حاضر، روش‌های بدون شبکه مبتنی بر هر دو رویکرد شکل ضعیف و شکل قوی، جزء ابزارهای قوی و موفق برای حل عددی مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی پیچیده و کاربردی هستند. در سال‌های اخیر محققان ایرانی نیز تلاش‌های ارزشمندی در زمینهٔ توسعه و اجرای روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی برای حل مسائل کاربردی و عملی ارائه کرده‌اند. دکتر دهقان[۹] و همکارش در [۱۷] با به‌کار بردن چند روش بدون شبکه متفاوت جواب‌های عددی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی کلین-گوردن شرودینگر[۱۰] در حالت‌های یک، دو و سه بعدی ارئه کردند. این جواب‌ها پس از گسسته‌سازی زمانی به روش کرانک - نیکلسون[۱۱] با استفاده از دو روش متفاوت کانسا با پایه‌های RBFs و همچنین با استفاده از پایه‌های کم‌ترین مربعات متحرک تعمیم یافته[۱۲] به‌دست آمده است. هم‌چنین انواع مختلفی از روش‌های بدون شبکه به‌وسیلهٔ دهقان و همکارانش برای حل عددی دسته متنوعی از معادلات دیفرانسیل کسری استفاده شده‌اند [۱۸]، [۱۹]، [۲۰]. هم‌چنین ایلاتی[۱۳] و همکارانش در [۲۱]، [۲۲]، [۲۳] چند مدل کاربردی از جمله، دستگاه انتشار واکنشی همرفتی غیرخطی[۱۴] به‌منظور پیش‌بینی فرایند انتشار آلودگی آب‌های زیرزمینی و معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم سیواشینسکی

1. Wang
2. Galerkin finite element method
3. Meshless methods
4. Radial Basis Functions (RBFs)
5. Strong form
6. Collocation method
7. Weak form
8. Liu
9. Dehghan
10. Klien-Gordon-Schrodinger
11. Crank Nikolson scheme
12. Genelalized moving least squre
13 I.lati
14. Nonlinear advection–diffusion–reaction system

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

غیرخطی[1] ناشی از مسئله استحکام آلیاژی، را به‌کمک روش بدون شبکه مبتنی بر پایه‌های درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی بحث و بررسی شده‌اند. شیوانیان[2] در [۲۴] با استفاده از روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی طیفی مبتنی بر شکل قوی، معادله دیفرانسل کسری- زمانی تلگراف[3] را در حالت دو بعدی حل کرد. او و همکارانش در [۲۵] نیز با استفاده از روش روش بدون شبکه، بر مبنای ترکیب شکل ضعیف برای نقاط درونی دامنهٔ مکانی و شکل قوی برای نقاط مرزی آن، جواب عددی معادله دیفرانسیل کسری- زمانی موج را در حالت دو بعدی به‌دست آوردند. آنها ثابت کردند که همگرایی زمانی جواب‌های عددی ارائه از مرتبهٔ $O(\tau^{6-2\alpha}), 1<\alpha\leqslant 2$ است. هم‌چنین شیوانیان و جعفرآبادی روش بدون شبکه طیفی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی را برای حل برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری پیاده‌سازی و اجرا کرده‌اند [۲۶]، [۲۷]. اخیراً روحانی قهساره[4] و همکارانش انواع مختلفی از روش‌های عددی بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی در حالت‌های پیکربندی ضعیف و قوی را برای حل مسائل متنوع کاربردی مدل‌بندی شده به‌وسیلهٔ معادلات دیفرانسیلی از مرتبه‌های صحیح وکسری استفاده کرده‌اند [۲۸]، [۲۹]، [۳۰]، [۳۱]، [۳۲]، [۳۳].

در این مقاله، یک روش عددی کارا و قدرتمند برای حل تقریبی مسئله (۱)- (۳) پیاده‌سازی و اجرا می‌شود. برای این منظور ابتدا مسئله به‌وسیلهٔ یک فرایند تفاضلاتی ضمنی مرتبهٔ دوم در دامنهٔ زمانی گسسته‌سازی می‌شود و سپس یک روش عددی بدون شبکه بر مبنای پیکربندی ضعیف معادله، برای گسسته‌سازی کامل، استفاده می‌شود.

گسسته‌سازی زمانی مدل

در این بخش، یک رویکرد تفاضلاتی ضمنی مرتبهٔ دوم برای گسسته‌سازی زمان معادلهٔ (۱) ارائه می‌شود. برای این منظور، بازهٔ زمانی $[0,T]$ را به L زیردامنهٔ مساوی $[t_k,t_{k+1}],\ \ k=0,...,L-1$ افراز می‌کنیم به‌طوری‌که $t_k=k\tau$ و $\tau=T/L$ بیان‌گر طول گام زمانی باشد. اکنون بنا بر ایده تفاضلات متناهی، تقریب مرتبهٔ دوم

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t_{k+1})=\frac{3u(\mathbf{x},t_{k+1})-4u(\mathbf{x},t_k)+u(\mathbf{x},t_{k-1})}{2\tau}+O(\tau^2), \qquad (۶)$$

را برای مشتق زمانی مرتبهٔ اول تابع u در گام زمانی $k+1$ ام در نظر می‌گیریم. از طرف دیگر در [۳۴]، [۳۵] با استفاده از عملگر تفاضلی انتقال یافته گرانولد[5]، یک تقریب مناسب از مرتبهٔ دوم برای مشتقات کسری ریمان-لیوویل ارائه شده است. در این‌جا از طرح گسسته‌سازی بیان شده در [۳۴]، [۳۵] برای تقریب مشتقات کسری زمانی موجود در (۱) استفاده می‌شود. این تقریب بدین‌صورت معرفی شده است:

$${}_0^R D_t^\alpha u(t_{k+1})=\sum_{s=0}^{k+1}\frac{w_s^\alpha}{\tau^\alpha}u(t_{k+1-s})+O(\tau^2), \qquad (۷)$$

که در آن

$$w_s^\alpha=\begin{cases}\dfrac{2+\alpha}{2}g_0^\alpha & ,s=0\\ \dfrac{2+\alpha}{2}g_s^\alpha-\dfrac{\alpha}{2}g_{s-1}^\alpha & ,s>0\end{cases} \qquad (۸)$$

و

1. Nonlinear biharmonic Sivashinsky equation
2. Shivanian
3. Time fractional telegraph equation
4. Roohani Ghehsareh
5. Shifted Grunwald difference operator

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

$$g_0^\alpha = 1, \quad g_s^\alpha = (1-\frac{\alpha+1}{s})g_{s-1}^\alpha, \quad s>0. \tag{۹}$$

اکنون می‌توان تقریب‌های مرتبهٔ دوم (۶) و (۷) را برای مشتقات صحیح و کسری زمانی ظاهر شده در مسئله استفاده کرد. از این‌رو، معادلهٔ (۱) در لحظه t_{k+1} به‌صورت (۱۰) گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{3u^{k+1}-4u^k+u^{k-1}}{2\tau} = -\sum_{s=0}^{k+1}\frac{w_s^\alpha}{\tau^\alpha}u^{k+1-s} + \sum_{s=0}^{k+1}\frac{w_s^\beta}{\tau^\beta}\Delta u^{k+1-s} - F(u^{k+1}) + g^{k+1}, \tag{۱۰}$$

که در آن $u^k = u(\mathbf{x},t_k)$ و $g^k = g(\mathbf{x},t_k)$. با انجام برخی ساده‌سازی‌ها رابطهٔ مذکور به‌صورت (۱۱) بازنویسی می‌شود:

$$(3+2\tau^{1-\alpha}w_0^\alpha)u^{k+1} - 2\tau^{1-\beta}w_0^\beta\Delta u^{k+1} = 4u^k - u^{k-1} - 2\tau^{1-\alpha}\sum_{s=1}^{k+1}w_s^\alpha u^{k+1-s}$$
$$+2\tau^{1-\beta}\sum_{s=1}^{k+1}w_s^\beta\Delta u^{k+1-s} - 2\tau F(u^{k+1}) + 2\tau g^{k+1}. \tag{۱۱}$$

همچنین در گام $k=0$ داریم:

$$\frac{u^1-u^0}{\tau} = -\frac{w_0^\alpha u^1 + w_1^\alpha u^0}{\tau^\alpha} + \frac{w_0^\beta\Delta u^1 + w_1^\beta\Delta u^0}{\tau^\beta} - F(u^1) + g^1, \tag{۱۲}$$

یا

$$(1+\tau^{1-\alpha}w_0^\alpha)u^1 - \tau^{1-\beta}w_0^\beta\Delta u^1 = (1-\tau^{1-\alpha}w_1^\alpha)u^0 + \tau^{1-\beta}w_1^\beta\Delta u^0 - \tau F(u^1,\mathbf{x},t_1) + \tau g^1. \tag{۱۳}$$

در بخش بعدی نشان می‌دهیم طرح‌های گسسته سازی زمانی پیشنهادی در (۱۰) و (۱۲) پایدار هستند.

تحلیل پایداری طرح گسسته‌سازی زمانی

در این بخش، پایداری طرح گسسته‌سازی زمانی ارائه شده در (۱۰) و (۱۲) بررسی می‌شود. برای این منظور، ضرب داخلی زیر را در $L^2(\Omega)$ در نظر گرفته:

$$(u(x),v(x)) = \int_\Omega u(x)v(x)d\Omega, \tag{۱۴}$$

و نُرم القایی $\|u(x)\| = \sqrt{(u(x),u(x))}$ را استفاده می‌کنیم.

لم ۱. [۳۵]، [۳۴]، فرض کنید $\{w_s^\alpha\}$ تعریف شده در (۸) باشد. در این‌صورت به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت L و هر بردار حقیقی $[v^0,v^1,\ldots,v^L]\in\mathbb{R}^{L+1}$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{L}\sum_{s=0}^{n}w_s^\alpha(v^{n-s},v^n) \ge 0. \tag{۱۵}$$

لم ۲. [۳۶]، فرض کنید $\{u^n\}_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای از توابع واقع در $L^2(\Omega)$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$(\frac{3u^{n+1}-4u^n+u^{n-1}}{2\tau}, u^{n+1}) \ge \frac{1}{4\tau}[\Lambda^{n+1}(u) - \Lambda^n(u)], \tag{۱۶}$$

که در آن

$$\Lambda^n(u) = 3\|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\|^2 + 2\|u^n - u^{n-1}\|^2, \quad n\ge 1. \tag{۱۷}$$

به‌علاوه

$$\Lambda^n(u) \ge \|u^n\|^2. \tag{۱۸}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

لم ۳. فرض کنید که تابع اولیهٔ $u^0(x)$ در(۱۲) به $\tilde{u}^0(x)$ آشفته شود. در این‌صورت برای جواب آشفته $\tilde{u}^1(x)\in H^2(\Omega)$، تابع خطای $\varepsilon^1=u^1-\tilde{u}^1\in H_0^2(\Omega)$ در رابطهٔ (۱۹) صدق می‌کند:

$$\|\varepsilon^1\|^2\le C(\|\varepsilon^0\|^2+\|\nabla\varepsilon^0\|^2). \qquad (۱۹)$$

اثبات: فرض کنید $u^0(x)$ و $\tilde{u}^0(x)$ به‌ترتیب جواب‌های واقعی و آشفته معادلهٔ (۱۲) باشد. در این‌صورت برای توابع خطای ε^1 و ε^0 به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}(\frac{\varepsilon^1-\varepsilon^0}{\tau},\varepsilon^1)&=\frac{-1}{\tau^\alpha}(w_0^\alpha(\varepsilon^1,\varepsilon^1)+w_1^\alpha(\varepsilon^0,\varepsilon^1))\\&-\frac{1}{\tau^\beta}(w_0^\beta(\nabla\varepsilon^1,\nabla\varepsilon^1)+w_1^\beta(\nabla\varepsilon^0,\nabla\varepsilon^1))+(F(\tilde{u}^1)-F(u^1),\varepsilon^1).\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

با به‌کارگیری نامساوی کوشی - شوارتز[1]، رابطهٔ (۵) و معادلهٔ (۲۱):

$$(\frac{\varepsilon^1-\varepsilon^0}{\tau},\varepsilon^1)=\frac{1}{2\tau}(\|\varepsilon^1\|^2-\|\varepsilon^0\|^2)+\frac{\tau}{2}\|\frac{\varepsilon^1-\varepsilon^0}{\tau}\|^2, \qquad (۲۱)$$

رابطهٔ (۲۰) به‌صورت (۲۲) تغییر می‌کند:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\tau}(\|\varepsilon^1\|^2-\|\varepsilon^0\|^2)+\frac{\tau}{2}\|\frac{\varepsilon^1-\varepsilon^0}{\tau}\|^2&\le\frac{-1}{\tau^\alpha}(w_0^\alpha\|\varepsilon^1\|^2+w_1^\alpha\|\varepsilon^0\|\|\varepsilon^1\|)\\&-\frac{1}{\tau^\beta}(w_0^\beta\|\nabla\varepsilon^1\|^2+w_1^\beta\|\nabla\varepsilon^0\|\|\nabla\varepsilon^1\|)+\mathcal{K}\|\varepsilon^1\|^2.\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

باتوجه به نامنفی بودن جمله $\frac{\tau}{2}\|\frac{\varepsilon^1-\varepsilon^0}{\tau}\|^2$ و نامساوی یانگ[2] داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\tau}(\|\varepsilon^1\|^2-\|\varepsilon^0\|^2)&\le-\frac{1}{\tau^\alpha}(w_0^\alpha\|\varepsilon^1\|^2-(w_0^\alpha\|\varepsilon^1\|^2+\frac{(w_1^\alpha)^2}{4w_0^\alpha}\|\varepsilon^0\|^2))\\&-\frac{1}{\tau^\beta}(w_0^\beta\|\nabla\varepsilon^1\|^2-(w_0^{1-\gamma}\|\nabla\varepsilon^1\|^2+\frac{(w_1^\beta)^2}{4w_0^\beta}\|\nabla\varepsilon^0\|^2))+\mathcal{K}\|\varepsilon^1\|^2.\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

با ضرب طرفین رابطهٔ اخیر در 2τ، این رابطه بدین‌صورت ساده می‌شود:

$$\|\varepsilon^1\|^2-\|\varepsilon^0\|^2\le\tau^{1-\alpha}\frac{(w_1^\alpha)^2}{2w_0^\alpha}\|\varepsilon^0\|^2+\tau^{1-\beta}\frac{(w_1^\beta)^2}{2w_0^\beta}\|\nabla\varepsilon^0\|^2+2\tau\mathcal{K}\|\varepsilon^1\|^2, \qquad (۲۴)$$

یا به‌صورت معادل:

$$(1-2\tau\mathcal{K})\|\varepsilon^1\|^2\le(1+\tau^{1-\alpha}\frac{(w_1^\alpha)^2}{2w_0^\alpha})\|\varepsilon^0\|^2+\tau^{1-\beta}\frac{(w_1^\beta)^2}{2w_0^\beta}\|\nabla\varepsilon^0\|^2. \qquad (۲۵)$$

با انتخاب τ به‌اندازهٔ کافی کوچک، به دست می‌آوریم:

$$\|\varepsilon^1\|^2\le\frac{1}{1-2\tau\mathcal{K}}[(1+\tau^{1-\alpha}\frac{(w_1^\alpha)^2}{2w_0^\alpha})\|\varepsilon^0\|^2+\tau^{1-\beta}\frac{(w_1^\beta)^2}{2w_0^\beta}\|\nabla\varepsilon^0\|^2]. \qquad (۲۶)$$

که تأیید کننده رابطهٔ (۱۹) است.

1. Cauchy-Schwarz inequality
2. Young inequality

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

قضیه: فرض کنید $u^k \in H^2(\Omega)$ و $\tilde{u}^k \in H^2(\Omega)$ به‌ترتیب جواب‌های واقعی و آشفته شده معادله گسسته‌سازی شده (۱۰) باشند، در این‌صورت تابع خطا $\varepsilon^k = u^k - \tilde{u}^k \in H_0^2(\Omega)$ دارای این کران است:

$$\| \varepsilon^k \|^2 \le \mathcal{C}(\| \nabla \varepsilon^0 \| + \| \varepsilon^0 \|). \qquad (۲۷)$$

اثبات: فرض کنید $u^k(x)$ و $\tilde{u}^k(x)$ به‌ترتیب جواب‌های واقعی و آشفته شده معادله گسسته‌سازی شده (۱۰) باشند. از این‌رو، رابطهٔ (۲۸) به سادگی قابل نتیجه‌گیری است:

$$\left(\frac{3\varepsilon^k - 4\varepsilon^{k-1} + \varepsilon^{k-2}}{2\tau}, \varepsilon^k\right) = -\sum_{s=0}^{k} \frac{w_s^\alpha}{\tau^\alpha}(\varepsilon^{k-s}, \varepsilon^k) - \sum_{s=0}^{k} \frac{w_s^\beta}{\tau^\beta}(\nabla \varepsilon^{k-s}, \nabla \varepsilon^k)$$
$$+ (F(\tilde{u}^k) - F(u^k), \varepsilon^k). \qquad (۲۸)$$

اکنون با جمع کردن طرفین رابطهٔ (۲۸) به‌ازای $k = 2, \ldots, L$ و استفاده از لم ۲، رابطهٔ (۲۹) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\Lambda^L(\varepsilon) - \Lambda^1(\varepsilon)}{4\tau} \le -\sum_{k=2}^{L}\sum_{s=0}^{k} \frac{w_s^\alpha}{\tau^\alpha}(\varepsilon^{k-s}, \varepsilon^k) - \sum_{k=2}^{L}\sum_{s=0}^{k} \frac{w_s^\beta}{\tau^\beta}(\nabla \varepsilon^{k-s}, \nabla \varepsilon^k)$$
$$+ \sum_{k=2}^{L}(F(\tilde{u}^k) - F(u^k), \varepsilon^k). \qquad (۲۹)$$

با ترکیب (۲۲) و (۲۹) رابطهٔ (۳۰) به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Lambda^L(\varepsilon) - \Lambda^1(\varepsilon)}{4\tau} + \frac{1}{2\tau}(\| \varepsilon^1 \|^2 - \| \varepsilon^0 \|^2) + \frac{\tau}{2}\left\| \frac{\varepsilon^1 - \varepsilon^0}{\tau} \right\|^2 \le -\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=0}^{k} \frac{w_s^\alpha}{\tau^\alpha}(\varepsilon^{k-s}, \varepsilon^k)$$
$$- \sum_{k=0}^{L}\sum_{s=0}^{k} \frac{w_s^\beta}{\tau^\beta}(\nabla \varepsilon^{k-s}, \nabla \varepsilon^k) + \frac{1}{\tau^\alpha} w_0^\alpha \| \varepsilon^0 \|^2 + \frac{1}{\tau^\beta} w_0^\beta \| \nabla \varepsilon^0 \|^2$$
$$+ \sum_{k=1}^{L}(F(\tilde{u}^k) - F(u^k), \varepsilon^k). \qquad (۳۰)$$

با به‌کارگیری (۵)، رابطهٔ (۳۰) بدین‌صورت ساده می‌شود:

$$\Lambda^L(\varepsilon) + 2\| \varepsilon^1 \|^2 + 2\| \varepsilon^1 - \varepsilon^0 \|^2$$
$$\le \Lambda^1(\varepsilon) + 2\| \varepsilon^0 \|^2 + 4\tau^{1-\alpha} w_0^\alpha \| \varepsilon^0 \|^2 + 4\tau^{1-\beta} w_0^\beta \| \nabla \varepsilon^0 \|^2 + 4\tau \mathcal{K} \sum_{k=1}^{L} \| \varepsilon^k \|^2$$
$$= 3\| \varepsilon^1 \|^2 - \| \varepsilon^0 \|^2 + 2\| \varepsilon^1 - \varepsilon^0 \|^2 + 2\| \varepsilon^0 \|^2 + 4\tau^{1-\alpha} w_0^\alpha \| \varepsilon^0 \|^2 + 4\tau^{1-\beta} w_0^\beta \| \nabla \varepsilon^0 \|^2$$
$$+ 4\tau \mathcal{K} \sum_{k=1}^{L} \| \varepsilon^k \|^2, \qquad (۳۱)$$

یا به‌صورت معادل:

$$\Lambda^L(\varepsilon) \le \| \varepsilon^1 \|^2 + (1 + 4\tau^{1-\beta} w_0^\beta) \| \nabla \varepsilon^0 \|^2 + 4\tau^{1-\alpha} w_0^\alpha \| \varepsilon^0 \|^2 + 4\tau \mathcal{K} \sum_{k=1}^{L} \| \varepsilon^k \|^2 . \qquad (۳۲)$$

اکنون با استفاده از لم ۲ و لم ۳، آخرین رابطه به‌صورت (۳۳) نوشته می‌شود:

$$(1 - 4\tau \mathcal{K}) \| \varepsilon^L \|^2 \le (1 + 4\tau^{1-\beta} w_0^\beta + C) \| \nabla \varepsilon^0 \|^2 + (4\tau^{1-\alpha} w_0^\alpha + C) \| \varepsilon^0 \|^2 + 4\tau \mathcal{K} \sum_{k=1}^{L-1} \| \varepsilon^k \|^2 . \qquad (۳۳)$$

با استفاده از نامساوی گسسته گرانوال[1] و به‌ازای τ به‌اندازهٔ کافی کوچک داریم:

$$\| \varepsilon^L \|^2 \le \mathcal{C}(\| \nabla \varepsilon^0 \|^2 + \| \varepsilon^0 \|^2). \qquad (۳۴)$$

1. Discrete Gronwall's inequality

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

فرض کنید $\| \varepsilon^K \| = \max\{\| \varepsilon^L \|, L = 0,...,k\}$، در این‌صورت رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\| \varepsilon^k \|^2 \le \| \varepsilon^K \|^2 \le \mathcal{C}(\| \nabla \varepsilon^0 \|^2 + \| \varepsilon^0 \|^2). \tag{۳۵}$$

در ادامه یک روش عددی بدون شبکه برای گسسته‌سازی کامل معادلات نیمه گسسته‌سازی شده (۱۱) و (۱۳) ارائه می‌شود.

گسسته سازی مکانی با استفاده از روش بدون شبکه پتروف گالرکین موضعی

در این بخش، یک دسته از روش‌های مؤثر بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی[1]، یعنی روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی موضعی[2] مبتنی بر شکل ضعیف، برای گسسته‌سازی مکانی معادلات مستقل از زمان حاصل در بخش قبل استفاده می‌شود. روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، بهبودی از روش بدون شبکه درون‌یابی نقطه‌ای است که به‌وسیلهٔ لیو در [۱۶]، با ترکیب RBFs با روش درون‌یابی نقطه‌ای، برای اولین بار معرفی شد. بنابر روش پتروف-گالرکین موضعی [۱۳]، ابتدا طرفین معادلات (۱۳) و (۱۱) را در تابع آزمون v و روی یک دامنه موضعی $\Omega_i \subset \Omega$ (یک زیرمجموعهٔ دلخواه و فشرده Ω) ضرب داخلی می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}(1+\tau^{1-\alpha}w_0^\alpha)\int_{\Omega_i} vu^1 d\Omega - \tau^{1-\beta}w_0^\beta \int_{\Omega_i} v\Delta u^1 d\Omega = (1-\tau^{1-\alpha}w_1^\alpha)\int_{\Omega_i} vu^0 d\Omega \\ +\tau^{1-\beta}w_1^\beta \int_{\Omega_i} v\Delta u^0 d\Omega - \tau\int_{\Omega_i} vF(u^1)d\Omega + \tau\int_{\Omega_i} vg^1 d\Omega,\end{aligned} \tag{۳۶}$$

و هم‌چنین

$$\begin{aligned}(3+2\tau^{1-\alpha}w_0^\alpha)\int_{\Omega_i} vu^{k+1} d\Omega - 2\tau^{1-\beta}w_0^\beta \int_{\Omega_i} v\Delta u^{k+1} d\Omega = 4\int_{\Omega_i} vu^k d\Omega - \int_{\Omega_i} vu^{k-1} d\Omega \\ -2\tau^{1-\alpha}\sum_{s=1}^{k+1} w_s^\alpha \int_{\Omega_i} vu^{k+1-s} d\Omega + 2\tau^{1-\beta}\sum_{s=1}^{k+1} w_s^\beta \int_{\Omega_i} v\Delta u^{k+1-s} d\Omega - 2\tau\int_{\Omega_i} vF(u^{k+1})d\Omega \\ +2\tau\int_{\Omega_i} vg^{k+1} d\Omega.\end{aligned} \tag{۳۷}$$

اکنون با استفاده از قضیه دیورژانس[3] و انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء[4] [۳۷] روابط مذکور بدین‌صورت بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}(1+\tau^{1-\alpha}w_0^\alpha)\int_{\Omega_i} vu^1 d\Omega + \tau^{1-\beta}w_0^\beta \int_{\Omega_i} \nabla v\nabla u^1 d\Omega - \tau^{1-\beta}w_0^\beta \int_{\Gamma_i} v\frac{\partial u^1}{\partial n} d\Gamma = (1-\tau^{1-\alpha}w_1^\alpha)\int_{\Omega_i} vu^0 d\Omega \\ -\tau^{1-\beta}w_1^\beta \int_{\Omega_i} \nabla v\nabla u^0 d\Omega + \tau^{1-\beta}w_1^\beta \int_{\Gamma_i} v\frac{\partial u^0}{\partial n} d\Gamma - \tau\int_{\Omega_i} vF(u^1)d\Omega + \tau\int_{\Omega_i} vg^1 d\Omega,\end{aligned} \tag{۳۸}$$

و نیز

$$\begin{aligned}(3+2\tau^{1-\alpha}w_0^\alpha)\int_{\Omega_i} vu^{k+1} d\Omega + 2\tau^{1-\beta}w_0^\beta \int_{\Omega_i} \nabla v\nabla u^{k+1} d\Omega - 2\tau^{1-\beta}w_0^\beta \int_{\Gamma_i} v\frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} d\Gamma \\ = 4\int_{\Omega_i} vu^k d\Omega - \int_{\Omega_i} vu^{k-1} d\Omega - 2\tau^{1-\alpha}\sum_{s=1}^{k+1} w_s^\alpha \int_{\Omega_i} vu^{k+1-s} d\Omega - 2\tau^{1-\beta}\sum_{s=1}^{k+1} w_s^\beta \int_{\Omega_i} \nabla v\nabla u^{k+1-s} d\Omega \\ +2\tau^{1-\beta}\sum_{s=1}^{k+1} w_s^\beta \int_{\Gamma_i} v\frac{\partial u^{k+1-s}}{\partial n} d\Gamma - 2\tau\int_{\Omega_i} vF(u^{k+1})d\Omega + 2\tau\int_{\Omega_i} vg^{k+1} d\Omega.\end{aligned} \tag{۳۹}$$

1. Meshless local Petrov-Galerkin method
2. Local Radial Point Interpolation Method(LRPIM)
3. Divergence theorem
4. Integral by parts

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

که در آن Γ_i مرز بسته و هموار دامنه Ω_i را نشان می‌دهد و $n=(n_1,n_2)$ به بردار یکه خارج شونده مرز Γ_i اشاره دارد و نیز $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}n_1+\frac{\partial u}{\partial y}n_2$. در محاسبات پیش‌رو تابع آزمون، تابع پله‌ای هیوی ساید[1] [۱۳] روی دامنه موضعی Ω_i انتخاب می‌شود. این تابع به‌صورت (۴۰) است:

$$v_i(\mathbf{x})=\begin{cases}1 & \mathbf{x}\in\Omega_i\\ 0 & \mathbf{x}\notin\Omega_i.\end{cases} \tag{۴۰}$$

از این‌رو، روابط (۳۸) و (۳۹) بدین‌صورت ساده می‌شوند:

$$(1+\tau^{1-\alpha}w_0^{\alpha})\int_{\Omega_i}u^1d\Omega-\tau^{1-\beta}w_0^{\beta}\int_{\Gamma_i}\frac{\partial u^1}{\partial n}d\Gamma=(1-\tau^{1-\alpha}w_1^{\alpha})\int_{\Omega_i}u^0d\Omega$$
$$+\tau^{1-\beta}w_1^{\beta}\int_{\Gamma_i}\frac{\partial u^0}{\partial n}d\Gamma-\tau\int_{\Omega_i}F(u^1)d\Omega+\tau\int_{\Omega_i}g^1d\Omega, \tag{۴۱}$$

و نیز:

$$(3+2\tau^{1-\alpha}w_0^{\alpha})\int_{\Omega_i}u^{k+1}d\Omega-2\tau^{1-\beta}w_0^{\beta}\int_{\Gamma_i}\frac{\partial u^{k+1}}{\partial n}d\Gamma=4\int_{\Omega_i}u^kd\Omega-\int_{\Omega_i}u^{k-1}d\Omega-2\tau^{1-\alpha}\sum_{s=1}^{k+1}w_s^{\alpha}\int_{\Omega_i}u^{k+1-s}d\Omega$$

$$+2\tau^{1-\beta}\sum_{s=1}^{k+1}w_s^{\beta}\int_{\Gamma_i}\frac{\partial u^{k+1-s}}{\partial n}d\Gamma-2\tau\int_{\Omega_i}F(u^{k+1})d\Omega+2\tau\int_{\Omega_i}g^{k+1}d\Omega. \tag{۴۲}$$

اکنون برای گسسته‌سازی مکانی بر اساس روش‌های بدون شبکه، یک مجموعه از نقاط پراکنده یا نقاط میدان[2] با توزیع منظم در دامنه Ω در نظر می‌گیریم؛ یعنی $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^{N}\subset\overline{\Omega}$. حال تابع مجهول u در هر گام زمانی به‌صورت ترکیب خطی (۴۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$u^k(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{N}u_j^{(k)}\varphi_j(\mathbf{x}), \tag{۴۳}$$

که در آن $u_j^{(k)}$ ضرایب مجهول است و باید محاسبه شوند. هم‌چنین $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ یک مجموعه از توابع پایه‌ای وابسته به نقاط میدانی است. در این تحقیق این دسته از توابع پایه‌ای به‌وسیلهٔ روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی تولید می‌شود. در ادامه نحوهٔ ساخت مجموعه توابع شکل $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ متناظر با مجموعه نقاط میدان $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^{N}$ به‌صورت مختصر بیان می‌شود. برای اطلاعات بیش‌تر منابع [۹]، [۱۳] پیشنهاد می‌شوند. این توابع پایه‌ای، N مؤلفه اول بردار $\Theta^t(\mathbf{x})$ (۴۴) است:

$$\Theta^t(\mathbf{x})=\{\mathbf{R}^{\mathbf{t}}(\mathbf{x})\,P^t(\mathbf{x})\}G^{-1}=\{\varphi_1(\mathbf{x})\,\varphi_2(\mathbf{x})\ldots\varphi_N(\mathbf{x})\,\varphi_{N+1}(\mathbf{x})\ldots\varphi_{N+m}(\mathbf{x})\}, \tag{۴۴}$$

که در آن

$$R(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}R_1(\mathbf{x})\\ R_2(\mathbf{x})\\ \vdots\\ R_N(\mathbf{x})\end{pmatrix},\quad P(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}P_1(\mathbf{x})\\ P_2(\mathbf{x})\\ \vdots\\ P_m(\mathbf{x})\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}R & P\\ P^t & O\end{pmatrix}_{N+m\times N+m}. \tag{۴۵}$$

1. Heaviside step function
2. Field Points

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

در رابطهٔ (۴۵) R_j تابع پایه شعاعی به مرکز j امین نقطه از مجموعه نقاط میدان است، $\{P_j\}_{j=1}^{m}$نشان‌دهندهٔ یک مجموعه کامل از پایه‌های چندجمله‌ای در فضای مختصات دکارتی است. ساختن این تک‌جمله‌ای‌ها با استفاده از مثلث خیام بسیار ساده است. مثلا، در فضای دو بعدی مجموعه پایه کامل چندجمله‌ای بدین‌صورت است:

$$P^t(x) = \{\} \qquad , m = 0$$

$$P^t(x) = \{1, x, y\} \qquad , m = 3$$

$$P^t(x) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \qquad , m = 6$$

$$P^t(x) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\} \qquad , m = 10$$

به‌علاوه، G ماتریسی نامنفرد است [۱۳]، [۱۴] و O ماتریس صفر را نشان می‌دهد. توابع پایه درون‌یاب نقطه‌ای شعاعی خاصیت تابع دلتای کرونکر[1] دارند. به این معنا که:

$$\varphi_j(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}, \tag{۴۶}$$

هم‌چنین این توابع شکل خاصیت افراز یکه[2] نیز دارند، یعنی:

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(\mathbf{x}) = 1. \tag{۴۷}$$

از سوی دیگر مشتقات جزئی تابع هموار u^k نیز برحسب مشتقات جزئی توابع شکل (۴۷)، به‌راحتی قابل محاسبه هستند:

$$\frac{\partial^n u^k(\mathbf{x})}{\partial x^n} = \sum_{j=1}^{N} u_j^{(k)} \frac{\partial^n \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial x^n}, \qquad \frac{\partial^n u^k(\mathbf{x})}{\partial y^n} = \sum_{j=1}^{N} u_j^{(k)} \frac{\partial^n \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial y^n}. \tag{۴۸}$$

در این مقاله، در انجام فرایند بالا و ساخت توابع شکل، دو تابع پایه شعاعی در نظر گرفته می‌شود. یکی تابع پایه شعاعی اسپلاین صفحه نازک[3] که به‌صورت $\varphi(r) = r^4 ln(r)$ تعریف می‌شود؛ و دیگری تابع پایه شعاعی چند ربعی تعمیم یافته[4] که به‌صورت $\varphi(r) = (r^2 + c^2)^{2.5}$ است. در این توابع و توابع پایه شعاعی دیگر، r تنها متغیر موجود، فاصله اقلیدسی بین نقطهٔ دلخواه $\mathbf{x}$ و نقطه میدان مورد نظر $\mathbf{x}_i$ که به‌عنوان مرکز در نظر گرفته می‌شود، است. در فضای دو بعدی این فاصله به‌صورت $r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر عدد ثابت $c > 0$ موجود در تابع پایه شعاعی GMQ پارامتر شکل[5] نامیده می‌شود. این عدد تأثیر به‌سزایی در کارآیی روش و دقت جواب‌های عددی دارد. از این‌رو، انتخاب بهینه آن در انجام محاسبات بسیار مهم است. تابع پایه شعاعیTPS تابعی با همواری متعلق به C^3 است و نیز معین مثبت مشروط[6] از مرتبهٔ ۳ است. از این‌رو، طبق [۱۴] در استفاده از این تابع برای ساختن توابع شکل باید از مجموعه پایه چندجمله‌ای با $m = 6$ استفاده شود. هم‌چنین بر همین اساس، تابع پایه شعاعی GMQ همواری نامتناهی دارد و معین مثبت مشروط از مرتبهٔ ۳ است و در به‌کارگیری این تابع در ساختن توابع شکل درون‌یاب نقطه‌ای شعاعی، $m = 6$ مناسب است. در ادامه، به یک مجموعه دیگر از نقاط پراکنده با عنوان نقاط ارزیاب[7] در $\overline{\Omega}$ نیاز است. این مجموعه می‌تواند از مجموعه نقاط میدان متفاوت بوده و یا با آنها یکسان

1. Kronecker delta function
2. Partitions of unity
3. Thin Plate Spline (TPS)
4. Generalized Multi-Quadrics (GMQ)
5. Shape parameter
6. Conditionally positive definite
7. Evaluation points

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

باشد. در این‌جا هر دو مجموعه نقاط یکسان در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید مجموعه نقاط $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N}$ به دو مجموعه کوچکتر افراز شود، یکی مجموعه نقاط درونی[1] دامنه Ω است که با $\chi_I = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_I}$ نشان داده می‌شود و دیگری مجموعه نقاط مرزی[2] دامنه Ω که با $\chi_B = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_B}$ نشان داده می‌شود. اکنون به‌ازای هر نقطه درونی $\mathbf{x}_i \in \chi_I$، یک دامنهٔ پوششی[3] Ω_i حول $\mathbf{x}_i$ در نظر می‌گیریم. این دامنه پوششی می‌تواند هر ساختار هندسی دلخواهی را دارا باشد، ولی باید داشته باشیم $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N_I} \Omega_i$. در این‌جا، برای سادگی، Ω_i را دایره‌ای به مرکز $\mathbf{x}_i$ و شعاع r_0 در نظر می‌گیریم. اکنون با جای‌گذاری (۴۳) در روابط (۴۱) و (۴۲) و به‌ازای هر نقطه درونی $\mathbf{x}_i \in \chi_I$ و دامنه موضعی آن $\Omega_i \quad , i = 1,\ldots,N_I$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&(1+\tau^{1-\alpha} w_0^{\alpha})\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega_i}\varphi_j d\Omega\right)u_j^{(1)} - \tau^{1-\beta} w_0^{\beta}\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_i}\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}d\Gamma\right)u_j^{(1)} \\
&= (1-\tau^{1-\alpha} w_1^{\alpha})\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega_i}\varphi_j d\Omega\right)u_j^{(0)} + \tau^{1-\beta} w_1^{\beta}\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_i}\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}d\Gamma\right)u_j^{(0)} \\
&\quad -\tau\int_{\Omega_i} F\left(\sum_{j=1}^{N}\varphi_j u_j^{(1)}\right)d\Omega + \tau\int_{\Omega_i} g^1 d\Omega,
\end{aligned}
\tag{۴۹}
$$

و

$$
\begin{aligned}
&(3+2\tau^{1-\alpha} w_0^{\alpha})\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega_i}\varphi_j d\Omega\right)u_j^{(k+1)} - 2\tau^{1-\beta} w_0^{\beta}\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_i}\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}d\Gamma\right)u_j^{(k+1)} \\
&= 4\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega_i}\varphi_j d\Omega\right)u_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega_i}\varphi_j d\Omega\right)u_j^{(k-1)} - 2\tau^{1-\alpha}\sum_{s=1}^{k+1} w_s^{\alpha}\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega_i}\varphi_j d\Omega\right)u_j^{(k+1-s)} \\
&\quad +2\tau^{1-\beta}\sum_{s=1}^{k+1} w_s^{\beta}\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_i}\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}d\Gamma\right)u_j^{(k+1-s)} - 2\tau\int_{\Omega_i} F\left(\sum_{j=1}^{N}\varphi_j u_j^{(k+1)}\right)d\Omega + 2\tau\int_{\Omega_i} g^{k+1} d\Omega.
\end{aligned}
\tag{۵۰}
$$

از سوی دیگر، به ازای نقاط ارزیاب مرزی (χ_B)، باید شرط مرزی (۲) اعمال شود. از این‌رو، داریم:

$$
\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(\mathbf{x}_i)u_j^{(k+1)} = f(\mathbf{x}_i, t_{k+1}) \qquad i = N_I+1,\ldots,N. \tag{۵۱}
$$

از تجمیع معادلات (۵۱) با معادلات (۴۹) و (۵۰)، یک دستگاه جبری به‌دست آمده، که به‌دلیل وجود جمله غیرخطی F در آن، دستگاه حاصل غیرخطی است. شکل کلی این دستگاه بدین‌صورت است:

$$
AU^{(k+1)} = \sum_{s=0}^{k} A_s U^s + F(U^{k+1}) + B \qquad , k = 0,1,\ldots \tag{۵۲}
$$

که در آن $U^{(k+1)}$ بردار مجهول مسئله یا جواب در گام زمانی t_{k+1} است و $U^{(s)}, s = 0,\ldots,k$ بردارهای جواب به‌دست آمده در گام‌های زمانی قبلی هستند. بردار B، بردار معلوم، $\{A_s\}_{s=0}^{k}$ و A ماتریس‌های $N \times N$ و $F(U^{k+1})$ جملات جبری غیرخطی دستگاه هستند. در مواجهه با این دستگاه غیرخطی، یک الگوریتم پیشگو بهبودگر[4] [۳۸] استفاده می‌شود. این الگوریتم به‌صورت مختصر در الگوریتم (۱) ارائه شده است. هم‌چنین برای اجرا، یک بردار اولیه نیاز است. این بردار اولیه را می‌توان با توجه به شرط اولیه داده شده در (۳)، و درون‌یابی تابع $u_0(\mathbf{x})$ در نقاط میدان

1. Interior points
2. Boundary points
3. Support domain
4. Predictor–corrector algorithm

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

به‌دست آورد.

نتایج عددی

در این بخش، به‌منظور محک زدن و نشان دادن دقت و کارآیی روش ارائه شده در بخش‌های قبل، چند مثال عددی ارائه می‌کنیم. در آغاز یک مجموعه نقاط پراکنده یکنواخت با طول گام h را به‌عنوان هر دو مجموعه نقاط میدان و نقاط ارزیاب در نظر می‌گیریم. سپس با استفاده از این نقاط و توابع پایه شعاعی معرفی شده در بخش قبلی توابع شکل درون‌یاب نقطه‌ای شعاعی را تولید می‌کنیم. برای انتخاب پارامتر شکل مناسب برای تابع پایه شعاعی GMQ، بر طبق [۱۳] از $c = d_c.\alpha_c$ استفاده می‌کنیم، که در آن α_c یک ضریب ثابت و مثبت است و $d_c = \frac{\sqrt{A_\Omega}}{\sqrt{N}-1}$ است. A_Ω نیز تقریبی مناسبی از مساحت Ω و N تعداد نقاط میدان است. به‌علاوه، به‌ازای هر نقطه ارزیاب درونی، دایره به مرکز نقطه مورد نظر و شعاع $r_0 = 0.8h$ به‌عنوان دامنهٔ پوششی موضعی در نظر گرفته می‌شود، به‌طوری‌که در هر دامنهٔ پوششی تنها یک نقطه ارزیاب قرار گیرد و اجتماع کل آنها دامنهٔ کلی Ω را پوشش دهد. از سوی دیگر، همهٔ انتگرال‌های مرزی و دوگانه موجود در فرم‌های ضعیف (۴۹) و (۵۰) با استفاده از روش عددی انتگرال‌گیری گاوس[1] پانزده نقطه‌ای تقریب زده می‌شود.

الگوریتم ۱. الگوریتم پیشگو -بهبودگر

حدس اولیه $U^{(k+1),*} = U^{(k)}$ را در نظر می‌گیریم.

$switch = 1$

تا زمانی‌که $switch > 0$ انجام بده:

دستگاه (۵۲) را حل کن:

$$A\hat{U}^{(k+1)} = \sum_{s=0}^{k} A_s U^{(s)} + G(U^{(k+1),*}) + B$$

اگر $\| U^{(k+1),*} - \hat{U}^{(k+1)} \| < \varepsilon$ آن‌گاه:

$switch = -1$

در غیر این‌صورت:

$U^{(k+1),*} = \hat{U}^{(k+1)}$

پایان

پایان

برای آزمودن دقت جواب‌های عددی به‌دست آمده در مثال‌ها، از خطای مطلق استفاده می‌شود. یعنی:

$$\varepsilon_\infty = \| u(\mathbf{x},t_k) - \hat{u}(\mathbf{x},t_k) \|_\infty, \qquad (۵۳)$$

که در آن $u(\mathbf{x},t_k)$ و $\hat{u}(\mathbf{x},t_k)$ به‌ترتیب به جواب‌های واقعی و تقریبی اشاره دارند. هم‌چنین نسبت همگرایی جواب‌های عددی به‌دست آمده نسبت به زمان به‌وسیلهٔ‌رابطهٔ (۵۴) آزموده می‌شود:

$$rate = \frac{log(\varepsilon_\infty(\tau_1)/\varepsilon_\infty(\tau_2))}{log(\tau_1/\tau_2)}. \qquad (۵۴)$$

مثال ۱. به‌عنوان مثال اول معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی کابل بدین‌صورت را در نظر می‌گیریم [۳]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -{}_0^R D_t^\alpha u + {}_0^R D_t^\beta \Delta u - u^3 + u + g(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} = (x,y) \in [0,1]^2, \quad 0 \le t \le 1$$

که در شرایط مرزی دیریکله و آغازین همگن زیر صدق می‌کند:

1. Gauss quadrature rule

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

$$u(\mathbf{x},t)=0,\quad \mathbf{x}\in\partial[0,1]^2,\quad 0\le t\le 1$$

$$u(\mathbf{x},0)=0,\quad \mathbf{x}\in[0,1]^2$$

و هم‌چنین داریم:

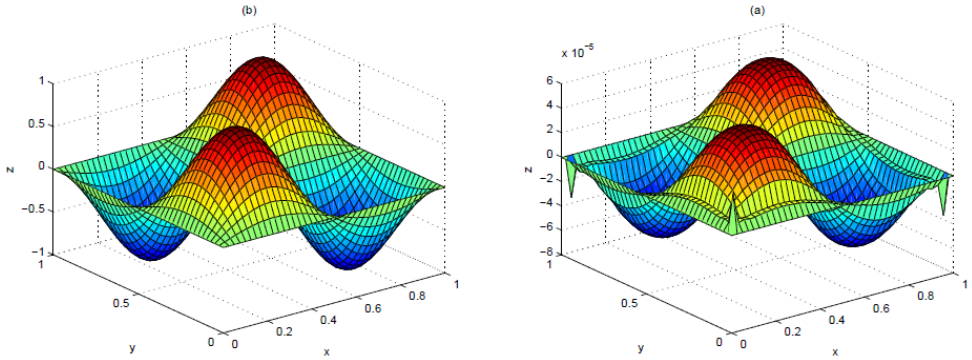
$$g(x,y,t)=(2t-t^2+\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+16\pi^2\frac{t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)})\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)+t^6\sin^3(2\pi x)\sin^3(2\pi y)$$

این مسئله دارای جواب واقعی $u(x,y,t)=t^2\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ است. پس از اجرای روش محاسباتی بیان شده در بخش‌های قبلی، خطای مطلق جواب‌های عددی به‌دست آمده برای مسئله به‌ازای $\tau=0.005$ ، $N=676$ ، $\alpha=0.8$ و $\beta=0.9$، در بعضی از گام‌های زمانی تا زمان $t=1$ به‌ازای پایه‌های به‌دست آمده با هر دو تابع پایه شعاعیTPS و GMQ در جدول ۱ ارائه شده است. از سوی دیگر، جواب تقریبی مسئله و خطای مطلق، با فرض $\tau=\frac{1}{80}$، $N=1681$ ، $\alpha=0.8$ و $\beta=0.7$ در شکل ۱ ارائه شده است. جدول ۱ و شکل ۱ بیان‌گر کارآیی و دقت مناسب روش معرفی شده در مواجهه با این مسئله است. البته با توجه به نتایج جدول، جواب‌های تقریبی به‌دست آمده با تابع پایه شعاعی GMQ کمی بهتر از TPS است. هم‌چنین در بخش گسسته‌سازی زمانی، هر دو تقریب ارائه شده برای مشتقات صحیح و کسری نسبت به زمان از مرتبه دو بودند. از این‌رو، انتظار می‌رود مرتبه همگرایی جواب‌ها نسبت به زمان از مرتبه دو باشد. این مطلب در جدول ۲ برای هر دو تابع پایه GMQ و TPS و به ازای برخی مقادیر α و β به خوبی مشخص است. به‌علاوه، همان‌گونه قبلاً اشاره شد، انتخاب پارامتر شکل در تابع پایه شعاعی GMQبسیار مهم است. از این‌رو، در شکل ۲ نمودار خطای مطلق جواب‌های تقریبی به‌دست آمده به‌ازای انتخاب‌های مختلف مقدار c و به‌ازای $\tau=\frac{1}{100}$، $N=256$، $\alpha=0.5$ و $\beta=0.9$ رسم شده است. لازم به ذکر است که انتخاب پارامتر شکل c، به‌ازای مقادیر بیش‌تر از 0.29، در این حالت باعث ناپایداری روش و در نتیجه واگرایی جواب‌ها می‌شود.

جدول۱. خطای مطلق جواب‌ها در بازه زمانی [۰،۱] به‌ازای $\alpha=0.8$، $\beta=0.9$، $N=676$ و $\tau=0.005$ برای مثال۱

t	GMQ	TPS
۰.۱	۱.۱۴۸۱×۱۰^{-۵}	۱.۱۴۰۷×۱۰^{-۵}
۰.۲	۱.۱۶۹۰×۱۰^{-۵}	۱.۱۳۹۳×۱۰^{-۵}
۰.۳	۱.۱۸۹۶×۱۰^{-۵}	۱.۱۲۲۸×۱۰^{-۵}
۰.۴	۱.۲۱۰۷×۱۰^{-۵}	۱.۶۳۷۱×۱۰^{-۵}
۰.۵	۱.۲۸۲۶×۱۰^{-۵}	۲.۵۱۷۳×۱۰^{-۵}
۰.۶	۱.۸۴۶۹×۱۰^{-۵}	۳.۵۹۳۲×۱۰^{-۵}
۰.۷	۲.۵۱۳۷×۱۰^{-۵}	۴.۸۶۵۰×۱۰^{-۵}
۰.۸	۳.۲۸۳۱×۱۰^{-۵}	۶.۳۳۲۸×۱۰^{-۵}
۰.۹	۴.۱۵۵۱×۱۰^{-۵}	۷.۹۹۷۰×۱۰^{-۵}
۱	۵.۱۲۹۵×۱۰^{-۵}	۹.۸۵۸۰×۱۰^{-۵}

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

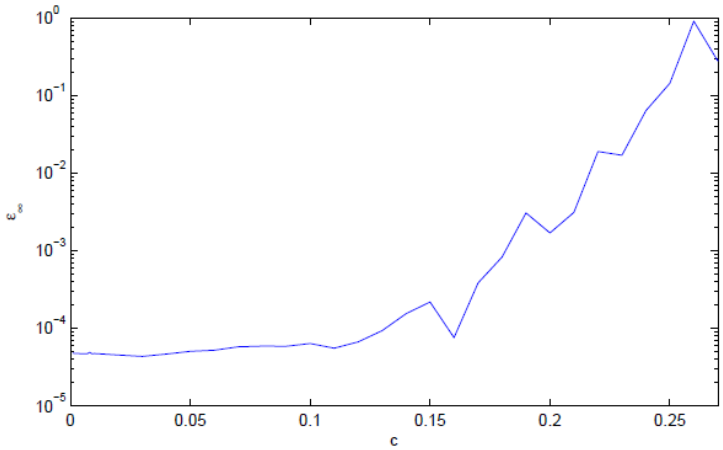


شکل۱. شکل خطای مطلق (a) و جواب تقریبی (b) به‌ازای $\tau = \frac{1}{80}$، $N = 1681$، $\alpha = 0.8$ و $\beta = 0.9$ برای مثال ۱

جدول۲. نسبت همگرایی زمانی به‌ازای $N = 961$ و بعضی از مقادیر مختلف α و β برای مثال ۱

GMQ		TPS				
Rate	ε_∞	Rate	ε_∞	τ	β	α
—	۴.۳۷۳۴×۱۰$^{-۳}$	—	۴.۳۶۵۹×۱۰$^{-۳}$	۱/۱۰	۰.۷	۰.۱
۱.۹۴۷۰	۱.۱۱۳۲×۱۰$^{-۳}$	۱.۹۸۱۱	۱.۱۰۵۸×۱۰$^{-۳}$	۱/۲۰	۰.۷	۰.۱
۲.۰۴۳۴	۴.۸۶۱۳×۱۰$^{-۴}$	۲.۰۶۴۸	۴.۷۸۷۵×۱۰$^{-۴}$	۱/۳۰	۰.۷	۰.۱
۲.۱۲۸۴	۲.۶۲۸۲×۱۰$^{-۴}$	۲.۱۸۳۶	۲.۵۵۴۴×۱۰$^{-۴}$	۱/۴۰	۰.۷	۰.۱
۲.۲۶۹۲	۱.۵۸۴۰×۱۰$^{-۴}$	۲.۳۳۸۶	۱.۵۱۶۲×۱۰$^{-۴}$	۱/۵۰	۰.۷	۰.۱
—	۴.۸۴۷۰×۱۰$^{-۳}$	—	۴.۸۳۹۶×۱۰$^{-۳}$	۱/۱۰	۰.۸	۰.۲
۱.۹۷۲۱	۱.۲۳۵۴×۱۰$^{-۳}$	۱.۹۷۸۶	۱.۲۲۸۰×۱۰$^{-۳}$	۱/۲۰	۰.۸	۰.۲
۲.۰۲۳۰	۵.۴۳۹۷×۱۰$^{-۴}$	۲.۰۴۱۹	۵.۳۶۵۸×۱۰$^{-۴}$	۱/۳۰	۰.۸	۰.۲
۲.۰۹۰۵	۲.۹۸۱۲×۱۰$^{-۴}$	۲.۱۳۰۲	۲.۹۰۷۳×۱۰$^{-۴}$	۱/۴۰	۰.۸	۰.۲
۲.۱۸۱۶	۱.۸۳۲۲×۱۰$^{-۴}$	۲.۲۵۳۷	۱.۷۵۸۳×۱۰$^{-۴}$	۱/۵۰	۰.۸	۰.۲
—	۵.۲۰۶۲×۱۰$^{-۳}$	—	۵.۱۹۸۷×۱۰$^{-۳}$	۱/۱۰	۰.۹	۰.۳
۱.۹۷۵۵	۱.۳۲۳۸×۱۰$^{-۳}$	۱.۹۸۱۶	۱.۳۱۶۴×۱۰$^{-۳}$	۱/۲۰	۰.۹	۰.۳
۲.۰۱۳۲	۵.۸۵۲۳×۱۰$^{-۴}$	۲.۰۳۰۷	۵.۷۷۸۲×۱۰$^{-۴}$	۱/۳۰	۰.۹	۰.۳
۲.۰۶۳۰	۳.۲۳۲۸×۱۰$^{-۴}$	۲.۰۹۹۳	۳.۱۵۸۷×۱۰$^{-۴}$	۱/۴۰	۰.۹	۰.۳
۲.۱۲۹۲	۲.۰۱۰۲×۱۰$^{-۴}$	۲.۱۹۳۶	۱.۹۳۶۱×۱۰$^{-۴}$	۱/۵۰	۰.۹	۰.۳
—	۴.۸۸۲۲×۱۰$^{-۳}$	—	۴.۸۷۴۸×۱۰$^{-۳}$	۱/۱۰	۰.۸	۰.۷
۱.۹۷۱۷	۱.۲۴۴۷×۱۰$^{-۳}$	۱.۹۷۸۱	۱.۲۳۷۳×۱۰$^{-۳}$	۱/۲۰	۰.۸	۰.۷
۲.۰۲۲۱	۵.۴۸۲۷×۱۰$^{-۴}$	۲.۰۴۰۹	۵.۴۰۸۸×۱۰$^{-۴}$	۱/۳۰	۰.۸	۰.۷
۲.۰۸۸۷	۳.۰۰۶۳×۱۰$^{-۴}$	۲.۱۲۸۱	۲.۹۳۲۴×۱۰$^{-۴}$	۱/۴۰	۰.۸	۰.۷
۲.۱۷۸۵	۱.۸۴۸۹×۱۰$^{-۴}$	۲.۲۴۹۷	۱.۷۷۵۰×۱۰$^{-۴}$	۱/۵۰	۰.۸	۰.۷

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]



شکل۲. تأثیر پارامتر شکل برخطای مطلق جواب‌های عددی با $N = 256$، $\tau = 0.01$، $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.9$ برای مثال۱

مثال ۲. در این مثال نیز معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی کابل زیر:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -{}_0^R D_t^{\alpha} u + {}_0^R D_t^{\beta} \Delta u - u^2 + g(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} = (x,y), \quad 0 \le x, y \le 1, \quad 0 \le t \le 1$$

با شرایط مرزی دیریکله و آغازین:

$$u(0,y,t) = 0, \qquad u(1,y,t) = t^2 e^y \sin(1),$$
$$u(x,0,t) = t^2 \sin x, \qquad u(x,1,t) = t^2 e \sin x$$
$$u(x,y,0) = 0, \qquad 0 \le x, y \le 1$$

در نظر گرفته می‌شود،که درآن

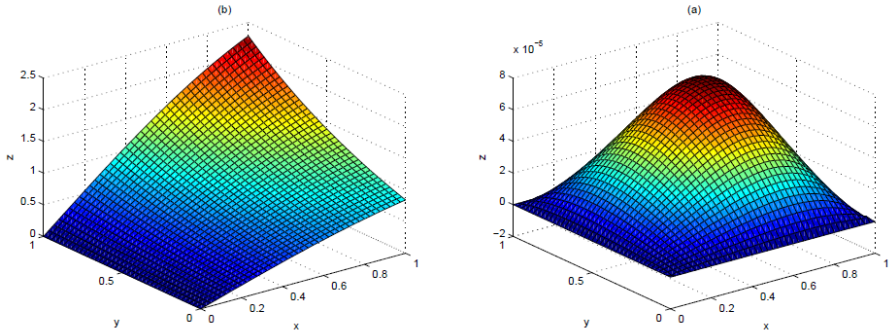
$$g(x,y,t) = (2t + \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)})e^y + t^4 e^{2y} \sin^2 x$$

جواب واقعی این مسئله $u(x,y,t) = t^2 e^y \sin x$ است. پس از اجرای روش عددی معرفی شده روی این مسئله، خطای مطلق جواب‌های عددی به‌ازای $\tau = 0.002$، $N = 961$ ، $\alpha = 0.9$ و $\beta = 0.7$ در بعضی از گام‌های زمانی در جدول ۳ ارائه شده است. در این جدول بر خلاف مثال قبل،جواب‌های به‌دست آمده با استفاده از تابع پایه شعاعی TPS دقیق‌تر است. هم‌چنین جواب تقریبی مسئله و خطای جواب به‌دست آمده نیز با فرض $\tau = 0.01$ ، $N = 1681$، $\alpha = 0.1$ و $\beta = 0.2$ در شکل ۳ قابل مشاهده است.

جدول۳.خطای مطلق جواب‌ها دربازهٔ زمانی $[0,1]$به‌ازای $\alpha = 0.9$ و $\beta = 0.7$ و $N = 961$ و $\tau = 0.002$ برای مثال۲

t	GMQ	TPS
۰.۱	۵.۲۵۹۰×۱۰^{-۷}	۵.۳۲۸۷×۱۰^{-۷}
۰.۲	۱.۱۳۶۳×۱۰^{-۶}	۴.۶۴۸۸×۱۰^{-۷}
۰.۳	۲.۵۵۴۴×۱۰^{-۶}	۴.۸۲۱۳×۱۰^{-۷}
۰.۴	۴.۵۴۰۴×۱۰^{-۶}	۶.۴۹۸۰×۱۰^{-۷}
۰.۵	۷.۰۹۴۸×۱۰^{-۶}	۱.۰۱۲۵×۱۰^{-۶}
۰.۶	۱.۰۲۱۹×۱۰^{-۵}	۱.۶۶۴۸×۱۰^{-۶}
۰.۷	۱.۳۹۱۳×۱۰^{-۵}	۲.۹۲۳۷×۱۰^{-۶}
۰.۸	۱.۸۱۷۸×۱۰^{-۵}	۵.۰۰۱۸×۱۰^{-۶}
۰.۹	۲.۳۰۱۸×۱۰^{-۵}	۸.۲۳۰۹×۱۰^{-۶}
۱	۲.۸۴۳۴×۱۰^{-۵}	۱.۳۰۱۵×۱۰^{-۵}

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]



شکل۳. شکل خطای مطلق (a) و جواب تقریبی (b) به‌ازای $\tau = \frac{1}{80}$ ، $N = 1681$ ، $\alpha = 0.8$ و $\beta = 0.9$ برای مثال۲

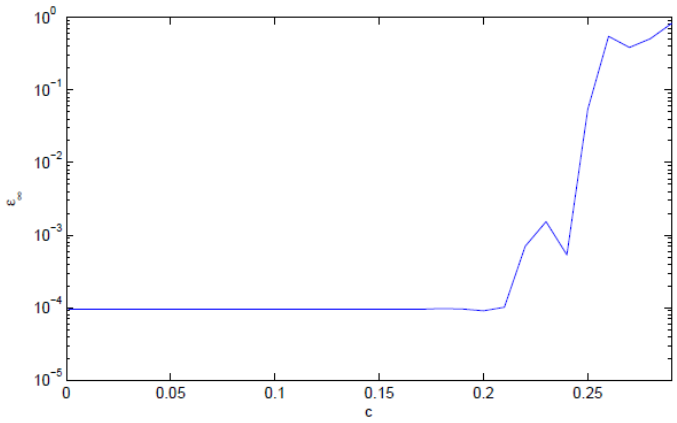
جدول۴. نسبت همگرایی زمانی به‌ازای $N = 961$ و بعضی از مقادیر مختلف α و β برای مثال۲

GMQ		TPS				
Rate	ε_∞	Rate	ε_∞	τ	β	α
—	۲.۷۳۶۲×۱۰$^{-۳}$	—	۲.۷۴۲۵×۱۰$^{-۳}$	$\frac{۱}{۱۰}$	۰.۹	۰.۲
۱.۸۳۴۳	۷.۶۷۲۹×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۳۱۳	۷.۷۰۶۷×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۲۰}$	۰.۹	۰.۲
۱.۸۸۳۵	۳.۵۷۵۱×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۷۵۴	۳.۶۰۲۸×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۳۰}$	۰.۹	۰.۲
۱.۸۸۸۷	۲.۰۷۶۴×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۷۳۸	۲.۱۰۱۵×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۴۰}$	۰.۹	۰.۲
۱.۸۷۴۲	۱.۳۶۶۷×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۵۲۵	۱.۳۸۹۹×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۵۰}$	۰.۹	۰.۲
—	۳.۰۲۱۸×۱۰$^{-۳}$	—	۳.۰۲۹۱×۱۰$^{-۳}$	$\frac{۱}{۱۰}$	۰.۸	۰.۴
۱.۸۳۴۵	۸.۴۷۲۴×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۳۱۶	۸.۵۱۰۴×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۲۰}$	۰.۸	۰.۴
۱.۸۸۲۴	۳.۹۴۹۴×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۷۵۹	۳.۹۷۷۶×۱۰$^{-٤}$	$\frac{۱}{۳۰}$	۰.۸	۰.۴
۱.۸۸۵۹	۲.۲۹۵۷×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۷۲۰	۲.۳۲۱۳×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۴۰}$	۰.۸	۰.۴
۱.۸۷۰۵	۱.۵۱۲۳×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۴۸۸	۱.۵۳۶۶×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۵۰}$	۰.۸	۰.۴
—	۳.۲۹۵۲×۱۰$^{-۳}$	—	۳.۳۰۳۹×۱۰$^{-۳}$	$\frac{۱}{۱۰}$	۰.۷	۰.۵
۱.۸۳۴۰	۹.۲۴۲۷×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۳۱۰	۹.۲۸۶۴×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۲۰}$	۰.۷	۰.۵
۱.۸۸۱۲	۴.۳۱۰۵×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۷۴۹	۴.۳۴۲۱×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۳۰}$	۰.۷	۰.۵
۱.۸۸۱۴	۲.۵۰۸۸×۱۰$^{-٤}$	۱.۸۷۱۲	۲.۵۳٤٦×۱۰$^{-٤}$	$\frac{۱}{۴۰}$	۰.۷	۰.۵
۱.۸۶۳۵	۱.۶۵۵۳×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۴۳۶	۱.۶۷۹۸×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۵۰}$	۰.۷	۰.۵
—	۳.۵۷۹۷×۱۰$^{-۳}$	—	۳.۵۸۹۰×۱۰$^{-۳}$	$\frac{۱}{۱۰}$	۰.۶	۰.۹
۱.۸۳۵۷	۱.۰۰۲۸×۱۰$^{-۳}$	۱.۸۳۳۰	۱.۰۰۷۴×۱۰$^{-۳}$	$\frac{۱}{۲۰}$	۰.۶	۰.۹
۱.۸۸۲۶	۴.۶۷۴۲×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۷۵۱	۴.۷۰۹۷×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۳۰}$	۰.۶	۰.۹
۱.۸۸۰۱	۲.۷۲۱۶×۱۰$^{-۴}$	۱.۸۷۰۳	۲.۷۴۹۹×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۴۰}$	۰.۶	۰.۹
۱.۸۵۸۹	۱.۸۴۸۹×۱۰$^{-۴}$	۱.۷۹۷۵	۱.۸۲۲۲×۱۰$^{-۴}$	$\frac{۱}{۵۰}$	۰.۶	۰.۹

جدول ۴ نیز نسبت همگرایی زمانی مرتبه دو جواب‌های تقریبی که در بخش دو پیش‌بینی شده بود را به‌ازای برخی

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

مقادیر α و β به‌خوبی نشان می‌دهد. به‌علاوه، در شکل ۴، نمودار خطای مطلق به‌ازای مقادیر مختلف c و با فرض $\tau = 0.01$، $N = 256$، $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.6$ به تصویر کشیده شده است. به‌ازای مقادیر c بیش‌تر از 0.29، جواب‌های عددی واگرایی دارند.



شکل۴.تأثیر پارامتر شکل بر خطای مطلق جواب‌های عددی با $N = 256$، $\tau = 0.01$، $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.6$ برای مثال۲

مثال ۳. به‌عنوان مثال سوم و برای بیان کارآیی زیاد روش عددی پیشنهادی در مقایسه با روش عددی ارائه شده در مرجع [۹] مسئله خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -{}_0D_t^{\alpha}u + {}_0D_t^{\beta}(\Delta u) + g(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} = (x,y) \in [0,1]^2, \quad 0 \le t \le 1$$

که در آن

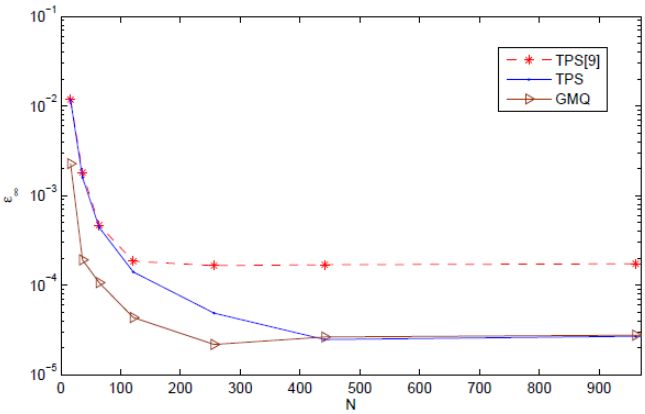
$$g(x,y,t) = (2t + \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{4\pi^2 t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)})\sin(\pi x).\sin(\pi y),$$

و شرایط مرزی دیریکله و آغازین زیر در مورد آن صدق می‌کند:

$$u(\mathbf{x},t) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \partial[0,1]^2, 0 \le t \le 1$$
$$u(\mathbf{x},0) = 0, \qquad \mathbf{x} \in [0,1]^2.$$

این مدل دارای جواب واقعی $u(x,y,t) = t^2 \sin(\pi x).\sin(\pi y)$ است[۹]. مشابه مثال‌های قبل، با به‌کارگیری روش عددی معرفی شده روی این مسئله، جواب‌های تقریبی را محاسبه می‌کنیم. در جدول ۵ نتایج عددی حاصل و هم‌چنین مرتبهٔ همگرایی روش نسبت به تغییرات زمان گزارش و با نتایج ارائه شده در [۹] مقایسه شده‌اند. با توجه به نتایج مذکور مشاهده می‌شود که نسبت همگرایی زمانی در روش عددی ارائه شده در این تحقیق از مرتبهٔ $O(\tau^2)$ و در [۹] از مرتبهٔ $O(\tau^{min\{1+\alpha,1+\beta\}})$ است. هم‌چنین نمودار میزان خطای مطلق متناظر به تغییرات تعداد نقاط پراکنده در دامنهٔ مکانی در شکل ۵ به تصویر کشیده شده است و با نتایج مرجع [۹] مقایسه شده است. نتایج جدول ۵ و شکل ۵ دقیق‌تر بودن جواب‌های عددی به‌دست آمده در این تحقیق را نسبت به مرجع [۹] به‌خوبی تأیید می‌کنند.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]



شکل ۵. میزان تغییرات خطای مطلق با افزایش تعداد نقاط دامنهٔ مکانی به‌ازای $\alpha = \beta = 0.5$ و $\tau = 0.01$ و مقایسه با [۹] برای مثال ۳.

جدول۵. نسبت همگرایی زمانی به‌ازای $N = 441$ و بعضی از مقادیر مختلف α و β برای مثال ۳ و مقایسه جواب‌های عددی با [۹].

GMQ		TPS		TPS				
Rate	ε_∞	Rate	ε_∞	Rate[۹]	ε_∞[۹]	τ	β	α
—	۴.۶۳۰۲×۱۰^{-۳}	—	۴.۶۲۴۵×۱۰^{-۳}	—	۴.۶۵۱۸×۱۰^{-۲}	$\frac{۱}{۱۰}$	۰.۶	۰.۸
۱.۹۸۳۶	۱.۱۷۰۸×۱۰^{-۳}	۱.۹۸۷۰	۱.۱۶۷۱×۱۰^{-۳}	۱.۱۸۵۸	۲.۰۴۴۹×۱۰^{-۲}	$\frac{۱}{۲۰}$	۰.۶	۰.۸
۱.۹۹۳۷	۲.۹۳۹۷×۱۰^{-۴}	۲.۰۰۷۳	۲.۹۰۳۰×۱۰^{-۴}	۱.۱۹۳۲	۸.۹۴۳۰×۱۰^{-۳}	$\frac{۱}{۴۰}$	۰.۶	۰.۸
۲.۰۲۸۳	۷.۲۰۶۵×۱۰^{-۵}	۲.۰۸۵۶	۶.۸۳۹۲×۱۰^{-۵}	۱.۱۹۸۰	۳.۸۹۸۰×۱۰^{-۳}	$\frac{۱}{۸۰}$	۰.۶	۰.۸
—	۱.۶۱۳۳×۱۰^{-۳}	—	۱.۶۰۹۸×۱۰^{-۳}	—	۵.۳۵۷۲×۱۰^{-۳}	$\frac{۱}{۱۰}$	۰.۲	۰.۳
۲.۰۰۵۶	۴.۰۱۷۶×۱۰^{-۴}	۲.۰۱۵۱	۳.۹۸۲۶×۱۰^{-۴}	۱.۶۶۷۴	۱.۷۲۷۲×۱۰^{-۳}	$\frac{۱}{۲۰}$	۰.۲	۰.۳
۲.۰۲۴۷	۹.۸۷۳۴×۱۰^{-۵}	۲.۰۶۴۲	۹.۵۲۳۴×۱۰^{-۵}	۱.۶۳۴۲	۵.۴۷۶۴×۱۰^{-۴}	$\frac{۱}{۴۰}$	۰.۲	۰.۳
۲.۱۲۰۲	۲.۲۷۱۰×۱۰^{-۵}	۲.۰۷۱۲	۲.۲۶۶۱×۱۰^{-۵}	۱.۶۹۴۵	۱.۶۹۲۰×۱۰^{-۴}	$\frac{۱}{۸۰}$	۰.۲	۰.۳
—	۲.۸۰۰۱×۱۰^{-۳}	—	۲.۷۹۶۵×۱۰^{-۳}	—	۱.۴۰۸۴×۱۰^{-۲}	$\frac{۱}{۱۰}$	۰.۲	۰.۵
۱.۹۹۷۷	۷.۰۱۱۸×۱۰^{-۴}	۲.۰۰۳۲	۶.۹۷۵۷×۱۰^{-۴}	۱.۴۶۰۰	۵.۱۱۹۴×۱۰^{-۳}	$\frac{۱}{۲۰}$	۰.۲	۰.۵
۲.۰۱۰۵	۱.۷۴۰۲×۱۰^{-۴}	۲.۰۳۳۳	۱.۷۰۴۱×۱۰^{-۴}	۱.۴۷۶۳	۱.۸۳۹۹×۱۰^{-۳}	$\frac{۱}{۴۰}$	۰.۲	۰.۵
۲.۰۶۶۱	۴.۱۵۵۶×۱۰^{-۵}	۲.۱۶۶۹	۳.۷۹۴۹×۱۰^{-۵}	۱.۴۹۱۳	۶.۵۴۴۱×۱۰^{-۴}	$\frac{۱}{۸۰}$	۰.۲	۰.۵

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری غیرخطی کابل در فضای دوبعدی به‌صورت عددی بررسی می‌شود. این معادله، از اساسی‌ترین مدل‌های ریاضی در شاخه علوم زیست-ریاضی است که توصیف‌کنندهٔ انتشار نامتعارف الکترونی یون‌ها در شبکه اعصاب موجودات زنده است. ابتدا برای هر دو مشتق صحیح و کسری زمانی موجود در معادله، طرح گسسته‌سازی زمانی با دقت از مرتبهٔ دو ارائه شد و معادلات مستقل از زمان حاصل شد. پس از آن، به منظور گسسته‌سازی کلی(مکانی)، یکی از روش‌های بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی به‌کار گرفته شد و پس از ساخت توابع پایه‌ای به‌وسیلهٔ روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی به‌کمک دو تابع پایه شعاعی متفاوت، جواب مسئله

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

به‌صورت ترکیب خطی توابع پایه در نظر گرفته شد. پس از جای‌گذاری ترکیب خطی در معادله مستقل از زمان، دستگاه غیرخطی حاصل به‌کمک الگوریتم پیشگو بهبودگر خطی‌سازی و سپس حل شد. با اجرای این فرایند روی سه مثال و ارائه جدول‌ها و شکل‌های مورد نظر، دقت و کارآیی روش پیشنهادی آزموده شد. این مثال‌ها بیان‌گر کارآیی و دقت زیاد روش‌های عددی بدون شبکه در حل مسائل چندبعدی پیچیده، به ویژه معادلات دیفرانسیل بامشتقات کسری غیرخطی است.

منابع

1. Oldham K. B., "The fractional calculus, Academic Press", New York, Spanier J (1974).
2. Magin R. L., "Fractional calculus in bioengineering", Begell House, Redding (2006).
3. Liu Y., Du Y. W., Li H., Wang J. F., "A two-grid finite element approximation for a nonlinear time-fractional Cable equation", Nonlinear, Dyn 85.4 (2016) 2535-2548.
4. Lin Y. M., Li X. J., Xu C. J., "Finite difference/spectral approximations for the fractional cable equation", Math Comput, 80 (2011) 1369-1396.
5. Hu X. L., Zhang L. M., "Implicit compact difference schemes for the fractional cable equation", Appl Math., Model, 36 (2012) 4027-4043.
6. Zhang H. X., Yang X. H., Han X. L., "Discrete-time orthogonal spline collocation method with application to two-dimensional fractional cable equation", Comput Math., Appl, 68 (2014) 1710-1722.
7. Yu B., Jiang X. Y., "Numerical identification of the fractional derivatives in the two-dimensional fractional cable equation", J Sci., Computm 68 (1) (2015) 252-272.
8. Wang Y., Liu Y., Li H., Wang J., "Finite element method combined with second-order time discrete scheme for nonlinear fractional Cable equation", Eur. Phys. J. Plus., 131.3 (61) (2016).
9. Ghehsareh H. R., Zaghian A., Zabetzadeh S. M., "The use of local radial point interpolation method for solving two-dimensional linear fractional cable equation", Neural Computing and Applications, 29 (10) (2018) 745-754.
10. Chen C. M., Liu F., Burrage K., "Numerical analysis for a variable-order nonlinear cable equation", J. Comput. Appl Math., 236 (2011) 209-224.
11. Bhrawy A. H., Zaky M. A., "Numerical simulation for two dimensional variable-order fractional nonlinear cable equation", Nonlinear, Dyn 80 (2015) 101-116.
12. Saxena R. K., Tomovski Z., Sandev T., "Analytical Solution of Generalized Space-Time Fractional Cable Equation", Mathematics, 3 (2015) 153-170.
13. Liu G. R., Gu Y. T., "An introduction to meshfree methods and their programming", Springer, Berlin, (2005).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

14. Fasshauer G. E., "Meshfree approximation methods with MATLAB", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.Uchaikin, (2007).

15. Kansa E. J., "Multiquadrics scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics I, surface approximations and partial derivative estimates", Comput, Math., Appl., 19 (1990) 127-145.

16. Wang J. G., G. R., Liu., "Radial point interpolation method for elastoplastic Problems", ICSSD 2000, 1 st Structural Conference on Structural Stability and Dynamics (2000).

17. Dehghan M., Mohammadi V., "Two numerical meshless techniques based on radial basis functions (RBFs) and the method of generalized moving least squares (GMLS) for simulation of coupled Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) equations", Computers and Mathematics with Applications, 71 (4) (2016) 892-921.

18. Dehghan M., Abbaszadeh M., Mohebbi A., "Error estimate for the numerical solution of fractional reaction-subdiffusion process based on a meshless method", Journal of Computational and Applied Mathematics, 280 (15) (2015) 14-36.

19. Dehghan M., Abbaszadeh M., Mohebbi A., "Analysis of a meshless method for the time fractional diffusion-wave equation", Numerical Algorithms, 73 (2) (2016) 445-476.

20. Dehghan M., Abbaszadeh M., Mohebbi A., "Analysis of two methods based on Galerkin weak form for fractional diffusion-wave:Meshless interpolating element free Galerkin(IEFG)", and finite element methods, Engineering Analysis with Boundary Elements, 64 (2016) 205-221.

21. Ilati M., Dehghan M., "local weak form method based on a combined basis function for numerical investigation of Brusselator model and spike dynamics in the Gierer-Meinhardt system", Comput Model Eng., Sci., (CMES) 109 (2015) 325-360.

22. Ilati M., Dehghan M., "Remediation of contaminated groundwater by meshless local weak forms", Computers & Mathematics with Applications, 72 (2016) 2408-2416.

23. Ilati M., Dehghan M., "Error analysis of a meshless weak form method based on radial point interpolation technique for Sivashinsky equation arising in the alloy solidification problem", Journal of Computational and Applied Mathematics, 327 (2018) 314-324.

24. Shivanian E., "Spectral meshless radial point interpolation (SMRPI) method to two-dimensional fractional telegraph equation", Mathematical Methods in the Applied Sciences , 39 (7) (2016) 1820-1835.

25. Hosseini V. R., Shivanian E., W. Chen, "Local radial point interpolation (MLRPI) method for solving time fractional diffusion-wave equation with damping",Journal of Computational

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

Physics, 312,, (2016) 307-332.

26. Shivanian E., Jafarabadi A., "The numerical solution for the time-fractional inverse problem of diffusion equation", Engineering Analysis with Boundary Elements, 91 (2018) 50-59.
27. Shivanian E., Jafarabadi A., "Time fractional modified anomalous sub-diffusion equation with a nonlinear source term through locally applied meshless radial point interpolation", Modern Physics Letters, B 32.22 (2018) 1850251.
28. Roohani Ghehsareh H., Heydari Bateni S., Zaghian A., "A meshfree method based on the radial basis functions for solution of two-dimensional fractional evolution equation", Engineering Analysis with Boundary Elements, 61 (2015) 52-60.
29. Roohani Ghehsareh H., Karimi K., Zaghian A., "Numerical solutions of a mathematical model of blood flow in the deforming porous channel using radial basis function collocation method", Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 38.3 (2016) 709-720.
30. Roohani Ghehsareh H., Etesami S. K., "Hajisadeghi Esfahani M., Numerical investigation of electromagnetic scattering problems based on the compactly supported radial basis functions", Zeitschrift für Naturforschung, A 71.8 (2016) 677-690.
31. Hajisadeghi Esfahani M., Roohani Ghehsareh H., Etesami S. K., "The extended method of approximate particular solutions to simulate two-dimensional electromagnetic scattering from arbitrary shaped anisotropic objects", Engineering Analysis with Boundary Elements, 82 (2017) 91-97.
32. Hajisadeghi Esfahani M., Roohani Ghehsareh H., Etesami S. K., "A meshless method for the investigation of electromagnetic scattering from arbitrary shaped anisotropic cylindrical objects", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 31.5 (2017) 477-494.
33. Abbasbandy S., Roohani Ghehsareh H., Alhuthali M. S., Alsulami H. H., "Comparison of meshless local weak and strong forms based on particular solutions for a non-classical 2-D diffusion model", Engineering Analysis with Boundary Elements, 39 (2014) 121-128.
34. Tian W. Y., Zhou H., Deng W.H., "A class of second order difference approximations for solving space fractional diffusion equations", Math., Comput, 84 (2015) 1703-1727.
35. Wang Z. B., Vong S.W., "Compact difference schemes for the modified anomalous fractional sub-diffusion equation and the fractional diffusion-wave equation", J. Comput, Phys., 277 (2014) 1-15.
36. Gao G. H., Sun H. W., Sun Z. Z., "Stability and convergence of finite difference schemes foraclass of time-fractional sub-diffusion equations based on certain super convergence",

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]

Journal of Computational Physics, 280 (2015) 510-528.

37. Atluri S. N., Zhu T., "A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach to nonlinear problems in computer modeling and simulation", Comput Model Simul Eng., 3 (1998) 187-196.

38. Ilati M., Dehghan M., "Application of direct meshless local Petrov-Galerkin (DMLPG) method for some Turing-type models", Engineering with Computers, 33(1) (2017) 107-124.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-05-20]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.2.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.325]