

Some properties of Diameter norm on $B_0(\mathbb{R})$ and its isometries

Morteza Taheri¹ , Ali Bayati Eshkaftaki² ✉

1. Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

E-mail: m.th.1353@gmail.com

2. Department of Mathematics, Sharekord University, Sharekord, Iran.

✉E-mail: bayati.ali@sku.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:

11 March 2020

Revised form:

2 November 2020

Accepted:

14 November 2020

Published online:

29 March 2022

Keywords:

Banach space;
Diameter norm;
isometry.

Introduction

Hagler used a diameter norm to construct a separable Banach space X with non-separable dual such that l_1 does not embed in X . Also, Bayati Eshkaftaki considered the diameter norm on $c_0(I)$ and characterized all isometries on this space.

In this article, we are going to first introduce the space $B_0(\mathbb{R})$ and show that this space is Banach space with supremum norm, and then we express the diameter norm on the space $B_0(\mathbb{R})$ and examine some of the characteristics of this space. We also examine the relationship between this space and Banach space $c_0(\mathbb{R})$ and some of the reference theorems [3] shown on space $c_0(\mathbb{R})$ on space $B_0(\mathbb{R})$.

Material and methods

We express some properties of the space $B_0(\mathbb{R})$ and define the diameter norm on this space, and then we examine the equivalence of the diameter norm with the supremum norm on this space.

We define the longitudinal operator relative to the diameter norm on $B_0(\mathbb{R})$ and state the conditions under which a linear operator on $B_0(\mathbb{R})$ is longitudinal. In the following, we will examine the results of the length of the linear operator on the space $B_0(\mathbb{R})$.

We will use the notation $l^\infty(\mathbb{R})$ for the set of all bounded functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Also we denote $c_0(\mathbb{R})$ for the set of all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. The space $l^\infty(\mathbb{R})$ is a Banach space with the norm

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : f \in B_0(\mathbb{R})\}.$$

We denote $B_0(\mathbb{R})$ for the set of all bounded functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. This space is a Banach space with norm $\|\cdot\|_\infty$. For every $j \in \mathbb{R}$, we consider the function

$$e_j(i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

on real numbers. Then each e_j belongs to $B_0(\mathbb{R})$.

We define for $f \in B_0(\mathbb{R})$ define $\|f\|_d = \text{diam}(f)$ and it is called the diameter norm.

We define $\|f\| = \|f\|_d + \|f\|_\infty$ for each $f \in B_0(\mathbb{R})$ that the $B_0(\mathbb{R})$ with this norm is a Banach algebra.

Main Results

We have identified some properties of the space $B_0(\mathbb{R})$ is introduced and some of its properties are examined. Then with the help of a diameter norm on the space $B_0(\mathbb{R})$, define a norm $\|\cdot\|$ on the $B_0(\mathbb{R})$, and show that the space $B_0(\mathbb{R})$ is a Banach algebra with this norm $\|\cdot\|$. Also, we got the relationship between the space $B_0(\mathbb{R})$ and the space $c_0(\mathbb{R})$ and we have obtained a few theorems in connection with isometry under $\|\cdot\|_d$.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- If $f \in B_0(\mathbb{R})$ and $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function that $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$, then $f \circ \varphi \in B_0(\mathbb{R})$.
- The space $c_0(\mathbb{R})$ is an ideal in algebra $B_0(\mathbb{R})$.
- $(B_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_d)$ is a Banach space.
- The space $B_{00}(\mathbb{R})$ is dense in $B_0(\mathbb{R})$ with $\|\cdot\|_d$.
- If $i, j \in \mathbb{R}$ and $i \neq j$, then e_i be orthogonal to e_j . Suppose $f \in B_0(\mathbb{R})$ and this function is continuous at point i . In this case, f is orthogonal to e_i , and if f is continuous on $\mathbb{R}$ then f is orthogonal to each of the vectors produced by $\{e_i\}$.
- If $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function that $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$, then the operator

$$T: B_0(\mathbb{R}) \rightarrow B_0(\mathbb{R}), T(f) = f \circ \varphi,$$

is an isometry under $\|\cdot\|_d$, if and only if φ is a surjective function.

- For any polynomial $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, where n an odd number. the operator $T_n f(x) = f(P_n(x))$ is an isometry under $\|\cdot\|_d$.
- Suppose $T: B_0(\mathbb{R}) \rightarrow B_0(\mathbb{R})$, is an isometry under $\|\cdot\|_d$ and $i_0 \in \mathbb{R}$. Then

$$-1 \leq \sum_{j \in I^-} T e_j(i_0) \leq 0 \leq \sum_{j \in I^+} T e_j(i_0) \leq 1.$$

where $I^+ = \{j \in \mathbb{R}: T e_j(i_0) > 0\}$ and $I^- = \{j \in \mathbb{R}: T e_j(i_0) < 0\}$.

- Let $T: B_0(\mathbb{R}) \rightarrow B_0(\mathbb{R})$ be an isometry under $\|\cdot\|_d$, $j_0 \in \mathbb{R}$ and $\lambda = \sup(T e_{j_0})$.

Then

$$\lambda = \lim \lambda_j \quad \text{and} \quad \lambda - 1 = \lim \eta_j,$$

where $\lambda_j = \sup(T(e_{j_0} + e_j))$ and $\eta_j = \inf(T(e_{j_0} + e_j))$.

How to cite: Taheri, M., Bayati Eshkaftaki, A., (2022) Some properties of Diameter norm on $B_0(\mathbb{R})$ and its isometries. *Mathematical Researches*, 8 (1), 57-71



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University



بررسی نرم قطری، خواص مختلفی از فضای $B_0(\mathbb{R})$ و عملگرهای طولپا بر آن

مرتضی طاهری^۱، علی بیاتی اشکفتکی^{۲✉}

۱. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. پست الکترونیکی: m.th.1353@gmail.com

۲. نویسنده مسئول، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران. پست الکترونیکی: bayati.ali@sku.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۲۱ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۸/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۲۴ تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۱/۰۹ واژه‌های کلیدی: فضای باناخ، نرم قطری، عملگر طولپا.	در این مقاله ابتدا، فضای $B_0(\mathbb{R})$ و نرم قطری بر آن را معرفی می‌کنیم و سپس برخی از خصوصیات آن را مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم که این فضا با این نرم، یک فضای باناخ است. همچنین نشان می‌دهیم که نرم قطری با نرم سوپرهم، معادل است و نرمی به کمک نرم سوپرهم و نرم قطری بر این فضا تعریف می‌کنیم که این فضا با عمل ضرب نقطه وار و این نرم یک جبر باناخ است. به‌علاوه شرایطی را معرفی می‌کنیم که تحت آن یک عملگر خطی روی فضای مطرح‌شده طولپا باشد.
استناد: طاهری، مرتضی؛ بیاتی اشکفتکی، علی؛ (۱۴۰۱). بررسی نرم قطری، خواص مختلفی از فضای $B_0(\mathbb{R})$ و عملگرهای طولپا بر آن. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۱)، ۷۱-۵۷.	© نویسندگان.



۱. مقدمه

هاگلر^۱ برای ساختن یک فضای باناخ تفکیک‌پذیر X که دارای دوگان تفکیک ناپذیر باشد و فضای l_1 را نتوان در X قرارداد، نرم قطری را مورد استفاده قرارداد [۳]. همچنین بیاتی در [۱]، نرم قطری روی فضای $c_0(I)$ را مطرح و شرایط معادلی برای طولپایی یک عملگر، روی این فضا به دست آورده است.

ما در این مقاله قصد داریم ابتدا فضای $B_0(\mathbb{R})$ را معرفی کرده و نشان دهیم این فضا با نرم سوپریم فضای باناخ است و سپس نرم قطری را روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ بیان و برخی از خصوصیات این فضا را بررسی می‌کنیم. همچنین ارتباط بین این فضا و فضای باناخ $c_0(\mathbb{R})$ و بعضی از قضایای مرجع [۱] را که بر فضای $c_0(\mathbb{R})$ نشان داده شده است روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱-۱. ([۱]) فرض کنیم I یک مجموعه نامتناهی (همراه با توپولوژی گسسته) باشد. اگر f تابعی از I به اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، می‌گوییم حد تابع f برابر با l است و از نماد

$$\lim_{i \in I} f = l.$$

(یا به اختصار $\lim f = l$) استفاده می‌کنیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک زیرمجموعه متناهی $F \subseteq I$ وجود داشته باشد؛ به‌طوری‌که برای هر $i \in I \setminus F$ ، داشته باشیم:

$$|f(i) - l| < \varepsilon.$$

فضای تمام توابع کراندار $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با $l^\infty(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. همچنین فضای تمام توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که حد آنها با مفهوم فوق موجود و برابر صفر باشد را با $c_0(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. در این صورت، $l^\infty(\mathbb{R})$ همراه با نرم سوپریم

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

یک فضای باناخ است و همچنین $c_0(\mathbb{R})$ ، زیرمجموعه $l^\infty(\mathbb{R})$ است.

تعریف ۲-۱. ([۴]) اگر I یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ را جمع‌پذیر گوییم، هرگاه $\sigma \in \mathbb{R}$ موجود باشد؛ به‌طوری‌که برای هر $\varepsilon > 0$ یک زیرمجموعه متناهی مانند J_0 از I پیدا شود؛ به‌طوری‌که $|\sigma - \sum_{j \in J} f(j)| < \varepsilon$ ، که J یک زیرمجموعه متناهی دلخواه از I ، شامل J_0 است، و در این صورت از نماد $\sigma = \sum_{j \in I} f(j)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳-۱. ([۲]) اگر X یک فضای باناخ روی اعداد حقیقی باشد و $x, y \in X$ ، گوییم x به تعبیر بیرکوف^۲ عمود بر y است، هرگاه برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|.$$

مجموعه تمام توابع کراندار از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (حد معمولی در بی‌نهایت) را با $B_0(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. در قسمت بعد نشان می‌دهیم که این فضا با نرم سوپریم، یک فضای باناخ است. برای هر $j \in \mathbb{R}$ ، تابع

^۱ - Hagler

^۲ -Birkhoff

$$e_j(i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

بر اعداد حقیقی را تابع مشخصه (کرونکر) در نظر می‌گیریم. به وضوح چنین توابع مشخصه عضو فضای $B_0(\mathbb{R})$ هستند. اگر (X, d) یک فضای متریک و $C \subseteq X$ ، ناتهی باشد. قطر مجموعه C را با $\text{diam}(C)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{diam}(C) = \sup\{d(x, y) : x, y \in C\}.$$

مجموعه تمام عناصری از فضای $B_0(\mathbb{R})$ به طوری که از جایی به بعد برابر صفر باشند را با $B_{00}(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم؛ به عبارت دیگر:

$$B_{00}(\mathbb{R}) = \{f \in B_0(\mathbb{R}) : \exists M \forall x > M, f(x) = 0\}.$$

اگر f تابعی از اعداد حقیقی به اعداد حقیقی باشد. برای راحتی کار به جای $\text{diam}(\text{Im} f)$ ، $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ و $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ به ترتیب از $\text{diam}(f)$ ، $\inf(f)$ و $\sup(f)$ استفاده می‌کنیم.

۲. نرم قطری روی فضای $B_0(\mathbb{R})$

در این قسمت، ابتدا برخی از خصوصیات فضای $B_0(\mathbb{R})$ را بیان و نرم قطری را روی این فضا تعریف می‌کنیم و سپس معادل بودن نرم قطری با نرم سوپریم را روی این فضا مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۲-۱. اگر $f \in B_0(\mathbb{R})$ و φ تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد که $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ آن‌گاه $f \circ \varphi \in B_0(\mathbb{R})$.

اثبات: چون $f \in B_0(\mathbb{R})$ بنابراین $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و در نتیجه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $M > 0$ وجود دارد؛ به طوری که برای هر $x > M$ داریم:

$$|f(x)| < \varepsilon. \quad (۱)$$

از طرفی هم داریم $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ و در نتیجه برای $M > 0$ عدد $N_0 > 0$ وجود دارد؛ به طوری که برای هر $x > N_0$ داریم:

$$\varphi(x) > M,$$

بنابراین برای هر $x > N_0$ طبق نامساوی (۱) داریم:

$$|f \circ \varphi(x)| = |f(\varphi(x))| < \varepsilon.$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow \infty} f \circ \varphi(x) = 0$ از طرفی f کراندار پس $f \circ \varphi$ نیز کراندار است. بنابراین $f \circ \varphi \in B_0(\mathbb{R})$. $\square$

مجموعه $B_0(\mathbb{R})$ همراه با جمع توابع و ضرب اسکالر تشکیل یک فضای برداری روی اعداد حقیقی می‌دهد.

اگر $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ طبق لم قبل برای هر $f \in B_0(\mathbb{R})$ و عدد طبیعی k داریم $f \circ \varphi^k \in B_0(\mathbb{R})$.

اگر $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد و برای هر $f \in B_0(\mathbb{R})$ ، $f \circ \varphi \in B_0(\mathbb{R})$ در این صورت $\lim_{x \rightarrow \infty} |\varphi(x)| = \infty$ زیرا $f(x) = \frac{1}{1+|x|} \in B_0(\mathbb{R})$

فضای $B_0(\mathbb{R})$ همراه با عمل ضرب نقطه وار و نرم سوپریمم جبر باناخ است.

در قضیه بعد رابطه بین فضای $B_0(\mathbb{R})$ و $c_0(\mathbb{R})$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۲-۲. فضای $c_0(\mathbb{R})$ یک ایده‌آل در جبر $B_0(\mathbb{R})$ است.

اثبات: فرض کنید $f \in c_0(\mathbb{R})$. در این صورت این تابع کراندار است و $\lim_{x \in \mathbb{R}} f = 0$ از این رو برای هر $\varepsilon > 0$ یک زیرمجموعه متناهی $F \subseteq \mathbb{R}$ وجود دارد؛ به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R} \setminus F$ داریم:

$$|f(x)| < \varepsilon. \quad (۲)$$

قرار می‌دهیم $M = \max F$. در این صورت برای هر $x > M$ داریم $x \in \mathbb{R} \setminus F$. بنابراین نامساوی (۲) برقرار است و این بدان معنی است که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. نشان می‌دهیم برای هر $f \in c_0(\mathbb{R})$ و $g \in B_0(\mathbb{R})$ ، $fg \in c_0(\mathbb{R})$.

چون $g \in B_0(\mathbb{R})$ پس g کراندار است و عدد حقیقی مثبت مانند K وجود دارد؛ به طوری که

$$|g(x)| \leq K. \quad (۳)$$

در این صورت چنانچه F زیرمجموعه متناهی $\mathbb{R}$ باشد که (۲) برقرار است، برای هر $x \in \mathbb{R} \setminus F$ طبق نامساوی‌های (۲) و (۳) داریم:

$$|fg(x)| = K|f(x)| < K\varepsilon.$$

در نتیجه $\lim fg = 0$ و از این رو $fg \in c_0(\mathbb{R})$. بنابراین $c_0(\mathbb{R})$ ایده‌آل در $B_0(\mathbb{R})$ است. $\square$

تعریف ۲-۳. برای $f \in B_0(\mathbb{R})$ ، قرار می‌دهیم $\|f\|_d = \sup(f) - \inf(f) = \text{diam}(f)$ و به آن نرم قطری گوئیم.

لم ۲-۴. $\|\cdot\|_d$ یک نرم روی $B_0(\mathbb{R})$ است.

اثبات: اگر $f \in B_0(\mathbb{R})$ و $\|f\|_d = 0$ آن‌گاه داریم:

$$\|f\|_d = \sup(f) - \inf(f) = 0.$$

در نتیجه داریم $\sup(f) = \inf(f)$ پس f تابعی ثابت است و چون $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ بنابراین $f = 0$.

از طرفی برای هر عدد حقیقی مانند k و $f \in B_0(\mathbb{R})$ داریم:

$$\|kf\|_d = |k|\|f\|_d.$$

همچنین برای هر $g, f \in B_0(\mathbb{R})$ داریم:

$$\begin{aligned}\|f + g\|_d &= \sup(f + g) - \inf(f + g) \\ &\leq \sup(f) + \sup(g) - \inf(f) - \inf(g) \\ &= \sup(f) - \inf(f) + \sup(g) - \inf(g) = \|f\|_d + \|g\|_d.\end{aligned}$$

بنا بر روابط بالا، $\|\cdot\|_d$ یک نرم روی $B_0(\mathbb{R})$ است.

□

در ادامه نشان می‌دهیم که نرم سوپریم و نرم قطری روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ معادل هستند و از طریق معادل بودن دو نرم نشان داده می‌شود که این فضا با نرم قطری، یک فضای باناخ است.

لم ۲-۵. در فضای $B_0(\mathbb{R})$ ، $\|\cdot\|_d$ معادل $\|\cdot\|_\infty$ است.

اثبات: با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ نشان می‌دهیم $\inf(f) \leq 0 \leq \sup(f)$. برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد حقیقی مانند M وجود دارد؛ به طوری که برای هر $x > M$ داریم $|f(x)| < \varepsilon$ ، پس $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$ و بنابراین

$$\inf(f) < \varepsilon, \quad -\varepsilon < \sup(f).$$

در نتیجه $\inf(f) \leq 0 \leq \sup(f)$. به کمک این نامساوی داریم

$$\inf(f) - \sup(f) \leq f(x) \leq \sup(f) - \inf(f),$$

و این بدان معنی است که

$$|f(x)| \leq \sup(f) - \inf(f).$$

در نتیجه داریم:

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_d \leq 2\|f\|_\infty.$$

□

و این نامساوی نشان می‌دهد که نرم $\|\cdot\|_d$ معادل با نرم $\|\cdot\|_\infty$ است.

قضیه ۲-۶. $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ است.

اثبات: کافی است نشان دهیم که $B_0(\mathbb{R})$ زیرمجموعه بسته $l^\infty(\mathbb{R})$ است. فرض کنید دنباله‌ای از اعضای $B_0(\mathbb{R})$ باشد که به تابع f در $l^\infty(\mathbb{R})$ همگراست. نشان می‌دهیم f عضو $B_0(\mathbb{R})$ است.

از آن جا که برای هر n , $f_n \in B_0(\mathbb{R})$. در این صورت $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. پس برای هر $\varepsilon > 0$ عدد حقیقی مانند M_n وجود دارد؛ به طوری که برای هر $x > M_n$ داریم:

$$|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۴)$$

از طرفی $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی مانند N وجود دارد؛ به طوری که برای هر $n \geq N$ و هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۵)$$

در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ قرار می‌دهیم $M = M_N$. آنگاه برای هر $x > M$ نامساوی‌های (۴) و (۵) برقرار است، پس داریم:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f_N(x) - f_N(x) + f(x)| \\ &\leq |f_N(x) - f(x)| + |f_N(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ لذا $B_0(\mathbb{R})$ بسته است. پس این فضا با نرم سوپریم یک فضای باناخ است. $\square$

نتیجه ۲-۷. $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|_d$ یک فضای باناخ است.

اثبات: بنا به لم ۲-۵، نرم قطری با نرم سوپریم معادل است و طبق قضیه قبل، این فضا با نرم سوپریم فضای باناخ است. در نتیجه با نرم قطری هم یک فضای باناخ است. $\square$

در قضیه بعد، نشان می‌دهیم که زیرفضای $B_{00}(\mathbb{R})$ از $B_0(\mathbb{R})$ با نرم قطری در آن چگال است.

قضیه ۲-۸. فضای $B_{00}(\mathbb{R})$ با نرم قطری در $B_0(\mathbb{R})$ چگال است.

اثبات: کافی است نشان دهیم مجموعه $B_{00}(\mathbb{R})$ با نرم سوپریم در $B_0(\mathbb{R})$ چگال است. عضوی از $B_0(\mathbb{R})$ مانند f را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم دنباله‌ای از اعضای $B_{00}(\mathbb{R})$ مانند (f_n) وجود دارد که به تابع f همگراست. با توجه به اینکه f عضو $B_0(\mathbb{R})$ است، پس $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. بنابراین داریم:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists M_n (x > M_n \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{n}).$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq M_n \\ 0 & x > M_n \end{cases}.$$

به‌وضوح f_n متعلق به $B_{00}(\mathbb{R})$ است. نشان می‌دهیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ (نسبت به نرم سوپریم). با توجه به این که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \left(\frac{1}{n} < \varepsilon\right).$$

اگر $x > M_n$ در این صورت $|f_n(x) - f(x)| = |f(x)|$ و همچنین برای $x \leq M_n$ داریم:

$$|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

بنابراین:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

لذا؛ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. پس $B_{00}(\mathbb{R})$ با نرم سوپریم در $B_0(\mathbb{R})$ چگال است. بنا به لم ۲-۵، می توان نتیجه گرفت که $B_{00}(\mathbb{R})$ با نرم قطری نیز در $B_0(\mathbb{R})$ چگال است. $\square$

با توجه به این که $B_0(\mathbb{R})$ یک فضای باناخ با نرم قطری روی اعداد حقیقی است می توان برخی از اعضای عمود برهم در این فضا را مشخص کرد. به عنوان مثال، اگر $j \neq i$ آن گاه e_i بر e_j عمود است؛ زیرا $\|e_i\|_d = 1$ و برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(e_i + \lambda e_j)(x) = \begin{cases} 1 & x = i \\ \lambda & x = j \\ 0 & x \neq i, j \end{cases}$$

اگر $\lambda \geq 1$ آن گاه $\|e_i\|_d \leq \|e_i + \lambda e_j\|_d = \lambda$ در صورتی که $0 \leq \lambda < 1$ داریم $\|e_i\|_d \leq \|e_i + \lambda e_j\|_d = 1$. حال اگر $\lambda < 0$ آن گاه $\sup(e_i + \lambda e_j) = 1$ و $\inf(e_i + \lambda e_j) = \lambda$ که در این صورت

$$1 = \|e_i\|_d \leq \|e_i + \lambda e_j\|_d = 1 - \lambda.$$

فرض کنید $f \in B_0(\mathbb{R})$ و این تابع در نقطه i پیوسته باشد. در این صورت f بر e_i عمود است؛ زیرا برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(f + \lambda e_i)(x) = \begin{cases} f(i) + \lambda & x = i \\ f(x) & x \neq i \end{cases}$$

اگر $x \neq i$ در این صورت $\inf(f + \lambda e_i) \leq f(x) \leq \sup(f + \lambda e_i)$ و با توجه به پیوستگی تابع f در i داریم:

$$\inf(f + \lambda e_i) \leq f(i) = \lim_{x \rightarrow i} f(x) \leq \sup(f + \lambda e_i).$$

بنابراین

$$\inf(f + \lambda e_i) \leq \inf(f) \leq \sup(f) \leq \sup(f + \lambda e_i).$$

در نتیجه $\|f\|_d \leq \|f + \lambda e_i\|_d$

اگر $f \in B_0(\mathbb{R})$ و این تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد آن گاه f عمود بر هر کدام از بردارهای تولید شده توسط $\{e_i\}$ است؛ زیرا با فرض این که $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ و $u = \alpha_1 e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} + \dots + \alpha_k e_{i_k}$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم

$$(f + \lambda u)(x) = \begin{cases} f(x) + \lambda \alpha_r & x = i_r \\ f(x) & x \neq i_r \end{cases} \quad (r = 1, 2, \dots, k),$$

پس برای هر $x \neq i_r$

$$\inf(f + \lambda u) \leq f(x) \leq \sup(f + \lambda u),$$

و بنا به پیوستگی f در هر عدد حقیقی

$$\inf(f + \lambda u) \leq f(i_r) = \lim_{x \rightarrow i_r} f(x) \leq \sup(f + \lambda u).$$

در نتیجه $\|f\|_d \leq \|f + \lambda u\|_d$.

در ادامه نرمی وابسته به نرم قطری و نرم سوپریم روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این فضا با نرم تعریف شده یک جبر باناخ است.

تعریف ۹-۲. برای $f \in B_0(\mathbb{R})$ ، قرار می‌دهیم $\|f\| = \|f\|_d + \|f\|_\infty$.

با توجه به نرم بودن $\|\cdot\|_\infty$ و $\|\cdot\|_d$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $\|\cdot\|$ یک نرم روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ است. همچنین داریم:

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\| \leq 3\|\cdot\|_\infty,$$

در این صورت $\|\cdot\|$ معادل نرم سوپریم و نرم قطری روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ است.

نتیجه ۱۰-۲. $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|$ یک فضای باناخ است.

اثبات: با توجه به اینکه $\|\cdot\|_\infty$ با نرم $\|\cdot\|$ معادل است؛ لذا $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|$ یک فضای باناخ است. $\square$

لم ۱۱-۲. $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|$ یک جبر باناخ است.

اثبات: کافی است نشان دهیم برای هر $f, g \in B_0(\mathbb{R})$ ، $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$.

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $f, g \in B_0(\mathbb{R})$ داریم:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq \|f\|_\infty \|g\|_d + \|g\|_\infty \|f\|_d. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|fg\|_d \leq \|f\|_\infty \|g\|_d + \|g\|_\infty \|f\|_d.$$

از طرفی داریم:

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty,$$

پس

$$\|fg\|_d + \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g\|_d + \|g\|_\infty \|f\|_d.$$

□ لذا $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$ که از این می‌توان نتیجه گرفت که $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|$ یک جبر باناخ است.

اگر فرض کنیم $f \in B_0(\mathbb{R})$ و برای هر $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$ (یا برای هر $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 0$). در این صورت،
 $\inf(f) = 0$ و $\sup(f) = 0$ ، و بنابراین داریم:

$$\|f\|_d = \sup(f) - \inf(f) = \sup(f) = \|f\|_\infty,$$

یا

$$\|f\|_d = \sup(f) - \inf(f) = -\inf(f) = \|f\|_\infty.$$

تساوی‌های بالا، نشان می‌دهد که در حالت خاص نرم قطری با نرم سوپریم برابر است و همچنین $\|f\| = 2\|f\|_\infty$.

۳. عملگرهای طولی روی فضای $B_0(\mathbb{R})$

در این قسمت، ابتدا تعریف عملگر طولی نسبت به نرم قطری بر $B_0(\mathbb{R})$ را بیان کرده و شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن شرایط، یک عملگر خطی بر $B_0(\mathbb{R})$ ، طولی باشد. در ادامه بررسی می‌کنیم که طولی بودن عملگر خطی روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ چه نتایجی را دربردارد.

تعریف ۳-۱. عملگر خطی $T: B_0(\mathbb{R}) \rightarrow B_0(\mathbb{R})$ را یک عملگر طولی تحت نرم قطری نامیم، هرگاه:

$$\|Tf\|_d = \|f\|_d.$$

قضیه ۳-۲. اگر $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ ، آنگاه عملگر

$$T: B_0(\mathbb{R}) \rightarrow B_0(\mathbb{R}), \quad T(f) = f \circ \varphi,$$

طولی تحت نرم قطری است اگر و فقط اگر φ تابعی پوشا باشد.

اثبات: چون $f \in B_0(\mathbb{R})$ ، با توجه به ۲-۱، داریم $T(f) \in B_0(\mathbb{R})$. از طرفی اگر $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پوشا باشد
 آنگاه $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ و در نتیجه $f(\varphi(\mathbb{R})) = f(\mathbb{R})$. بنابراین:

$$\sup(f \circ \varphi) = \sup(f), \quad \inf(f \circ \varphi) = \inf(f).$$

در نتیجه $\|Tf\|_d = \|f\|_d$. بنابراین T یک عملگر طولی است.

حال فرض کنیم عملگر T طولی باشد، نشان می‌دهیم که φ تابعی پوشاست. فرض کنیم چنین نباشد. بنابراین عدد حقیقی
 مانند b وجود دارد؛ به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) \neq b$. پس $Te_b(x) = e_b(\varphi(x)) = 0$ اما $Te_b \in B_0(\mathbb{R})$ و $\|Te_b\|_d = 0$ و $\|e_b\|_d = 1$ ، که متناقض با طولی بودن T است؛ لذا φ پوشاست.
 □

نتیجه ۳-۳. اگر $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پوشا باشد که $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ ، آن‌گاه برای هر $k \geq 1$ عملگر خطی $T_k(f) = f \circ \varphi^k$ یک عملگر طولپا از $B_0(\mathbb{R})$ به خودش با نرم قطری است.

اثبات: چون $f \in B_0(\mathbb{R})$ طبق لم ۱-۲، $f \circ \varphi \in B_0(\mathbb{R})$ ، و به همین ترتیب $f \circ \varphi^{k-1} \in B_0(\mathbb{R})$ برای هر $k \geq 2$ از طرفی هم $\varphi \circ \varphi^{k-1} = \varphi^k$ پس طبق قضیه قبل

$$\|T_k(f)\|_d = \|f \circ \varphi^{k-1}\|_d = \|T_{k-1}(f)\|_d.$$

به همین ترتیب داریم $\|T_k(f)\|_d = \|T(f)\|_d = \|f\|_d$. بنابراین T_k یک عملگر طولپا از $B_0(\mathbb{R})$ به خودش با

□

نرم قطری است.

مثال ۳-۴. برای هر $z \in \mathbb{R}$ عملگر T_z بر $B_0(\mathbb{R})$ را با ضابطه $T_z f(x) = f(x - z)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، T_z عملگر طولپا تحت نرم قطری است؛ زیرا $\varphi(x) = x - z$ تابعی پوشا از $\mathbb{R}$ به خودش است و $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$. بنابراین طبق قضیه ۲-۳، T_z یک عملگر طولپاست.

مثال ۳-۵. برای هر $0 < z \in \mathbb{R}$ عملگر T بر $B_0(\mathbb{R})$ با ضابطه $Tf(x) = f(zx)$ تعریف می‌شود، یک عملگر طولپا تحت نرم قطری است. به دلیل اینکه $\varphi(x) = zx$ تابعی پوشا از $\mathbb{R}$ به خودش است و $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$. بنابراین طبق قضیه ۲-۳ عملگر خطی T طولپاست.

تذکر ۳-۶. برای هر چند جمله‌ای $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ که n عددی طبیعی فرد است. عملگر $T_n f(x) = f(P_n(x))$ بر $B_0(\mathbb{R})$ ، یک عملگر طولپا تحت نرم قطری است؛ زیرا $\lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x) = \infty$ ، و به دلیل فرد بودن n ، معادله $P_n(x) = b$ برای هر $b \in \mathbb{R}$ دارای جواب است. از این‌رو تابع φ که $\varphi(x) = P_n(x)$ پوشاست و بنا بر قضیه ۲-۳ عملگر T_n طولپاست.

اگر $T: B_0(\mathbb{R}) \rightarrow B_0(\mathbb{R})$ یک عملگر خطی طولپا باشد. در این صورت f بر g در فضای $B_0(\mathbb{R})$ با نرم قطری عمود است اگر و تنها اگر Tf بر Tg عمود باشد؛ زیرا برای هر عدد حقیقی λ

$$\|Tf\|_d = \|f\|_d \leq \|f + \lambda g\|_d = \|T(f + \lambda g)\|_d = \|Tf + \lambda Tg\|_d.$$

قضیه ۳-۷. اگر T یک عملگر خطی طولپا از $B_0(\mathbb{R})$ به خودش و i_0 یک عدد حقیقی باشد. آن‌گاه داریم:

$$-1 \leq \sum_{j \in I^-} T e_j(i_0) \leq 0 \leq \sum_{j \in I^+} T e_j(i_0) \leq 1.$$

که در این‌جا $I^+ = \{j \in \mathbb{R}: T e_j(i_0) > 0\}$ و $I^- = \{j \in \mathbb{R}: T e_j(i_0) < 0\}$

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم $0 \leq \sum_{j \in I^+} T e_j(i_0) \leq 1$. کافی است برای هر مجموعه متناهی مانند $F \subseteq I^+$ نشان دهیم که $0 \leq \sum_{j \in F} T e_j(i_0) \leq 1$. چون F یک مجموعه متناهی است، تابع f را به صورت $f = \sum_{j \in F} e_j$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $\|f\|_d = 1$ و چون T یک عملگر طولپاست، پس $\|Tf\|_d = 1$. از طرفی $Tf(i_0) \geq 0$ زیرا

برای هر $j \in I^+$ ، $Te_j(i_0) \geq 0$ ادعا می‌کنیم که $Tf(i_0) \leq 1$ اگر چنین نباشد پس $Tf(i_0) > 1$ در این صورت از اینکه $Tf \in B_0(\mathbb{R})$ نتیجه می‌گیریم $\inf(Tf) \leq 0$ بنابراین

$$1 = \|Tf\|_d = \sup(Tf) - \inf(Tf) \geq Tf(i_0) - 0 > 1,$$

که یک تناقض است؛ لذا $0 \leq Tf(i_0) \leq 1$ و چون این نامساوی برای هر زیرمجموعه متناهی از I^+ درست است پس $\square$ $0 \leq \sum_{j \in I^+} Te_j(i_0) \leq 1$ برای حالتی که $-1 \leq \sum_{j \in I^-} Te_j(i_0) \leq 0$ روند اثبات مشابه حالت اول است.

قضیه ۳-۸. اگر $T: B_0(\mathbb{R}) \rightarrow B_0(\mathbb{R})$ یک عملگر خطی طولیا، j_0 یک عدد حقیقی باشد و $\lambda = \sup(Te_{j_0})$ آنگاه: $\lambda_j = \lim_{j \in \mathbb{R}} \lambda_j$ و $\lambda - 1 = \lim_{j \in \mathbb{R}} \eta_j$ که در اینجا $\lambda_j = \sup(T(e_{j_0} + e_j))$ و $\eta_j = \inf(T(e_{j_0} + e_j))$

اثبات: چون $\lim_{i \rightarrow \infty} Te_{j_0}(i) = 0$ داریم $\inf(Te_{j_0}) \leq 0 \leq \sup(Te_{j_0})$ و در نتیجه

$$1 = \|e_{j_0}\|_d = \|Te_{j_0}\|_d = \sup(Te_{j_0}) - \inf(Te_{j_0}) \geq \sup(Te_{j_0}) = \lambda. \quad (۶)$$

بنابراین داریم $0 \leq \lambda \leq 1$. بدون کاستن از کلیت مطلب می‌توان فرض کرد $0 < \lambda \leq 1$ (اگر $\lambda = 0$ به جای T می‌توان $-T$ را در نظر گرفت)، پس $\lambda = \sup(Te_{j_0}) > 0$ فرض کنید $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ در این صورت $i_1 \in \mathbb{R}$ وجود دارد؛ به طوری که

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < Te_{j_0}(i_1) \leq \lambda. \quad (۷)$$

از طرفی بنا به رابطه (۶) داریم $\inf(Te_{j_0}) = \lambda - 1$ بنابراین $i_2 \in \mathbb{R}$ وجود دارد؛ به طوری که

$$\lambda - 1 \leq Te_{j_0}(i_2) < \lambda - 1 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۸)$$

با توجه به اینکه $\lim_{i \rightarrow \infty} Te_{j_0}(i) = 0$ ، یک عدد حقیقی مانند M وجود دارد؛ به طوری که برای هر $i > M$ داریم:

$$|Te_{j_0}(i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

چون

$$Te_{j_0}(i_1) > \lambda - \frac{\varepsilon}{2} > 2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{2}\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۹)$$

بنابراین $i_1 \leq M$. بدون کاستن از کلیت مطلب، می‌توان فرض کرد $i_2 \leq M$. قرار می‌دهیم $F = \{i_1, i_2\}$. ادعا می‌کنیم یک مجموعه متناهی مانند G وجود دارد؛ به طوری که برای هر $j \in \mathbb{R} \setminus G$ و $i \in F$ داریم:

$$|Te_j(i)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۱۰)$$

زیرا در غیر این صورت برای هر عدد حقیقی مانند r ، برای مجموعه متناهی $G_0 = \{r\}$ یک عدد حقیقی مانند $r_1 \neq r$ وجود دارد؛ به طوری که $|Te_{r_1}(i_2)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ یا $|Te_{r_1}(i_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. به همین ترتیب با در نظر گرفتن مجموعه متناهی $G_1 = \{r, r_1\}$ عدد حقیقی $r_2 \neq r, r_1$ وجود دارد که $|Te_{r_2}(i_2)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ یا $|Te_{r_2}(i_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

با ادامه همین روند می‌توان مجموعه متناهی مانند H و عدد طبیعی مانند n به گونه‌ی پیدا کرد که $n \frac{\varepsilon}{2} > 1$ و $n \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{j \in H} Te_j(i)$ یا $-n \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{j \in H} Te_j(i)$ که $i = i_1$ یا $i = i_2$.

بنابراین $1 < \sum_{j \in H} Te_j(i) \leq \sum_{j \in I^+} Te_j(i)$ یا $-1 > \sum_{j \in H} Te_j(i) \geq \sum_{j \in I^-} Te_j(i)$ که این با توجه به قضیه ۷-۳ یک تناقض است؛ زیرا در فرض قضیه به جای i_0 می‌توان i را در نظر گرفت. برای هر $j \in \mathbb{R} \setminus G$ طبق نامساوی‌های (۸) و (۱۰) داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq Te_{j_0}(i_2) + Te_j(i_2) \leq \lambda - 1 + \varepsilon. \quad (11)$$

همچنین طبق نامساوی‌های (۷) و (۱۰) داریم:

$$\lambda - \varepsilon \leq Te_{j_0}(i_1) + Te_j(i_1) \leq \lambda + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

از طرفی $\frac{1}{2} \varepsilon \leq \lambda - \varepsilon \leq \lambda - 1 + \varepsilon$ در نتیجه به کمک نامساوی‌های (۱۱) و (۱۲) برای هر $j \in \mathbb{R} \setminus G$ داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq Te_{j_0}(i_2) + Te_j(i_2) \leq Te_{j_0}(i_1) + Te_j(i_1) \leq \lambda + \varepsilon,$$

پس برای هر $j \in \mathbb{R} \setminus G$ و $i \in F$ داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq Te_{j_0}(i) + Te_j(i) \leq \lambda + \varepsilon. \quad (13)$$

حال ادعا می‌کنیم برای هر $j \in \mathbb{R} \setminus G$ این نامساوی برای هر عدد حقیقی درست است. فرض کنید عدد حقیقی مانند i موجود باشد که این نامساوی برای آن برقرار نباشد. بنابراین

$$Te_{j_0}(i) + Te_j(i) > \lambda + \varepsilon, \quad (14)$$

یا

$$Te_{j_0}(i) + Te_j(i) < \lambda - 1 - \varepsilon. \quad (15)$$

اگر نامساوی (۱۴) برقرار باشد بنا به نامساوی (۱۱) داریم:

$$Te_{j_0}(i_2) + Te_j(i_2) \leq \lambda - 1 + \varepsilon.$$

از طرفی با توجه به نامساوی (۹)، $j_0 \notin \mathbb{R} \setminus G$ پس $j_0 \neq j$. در نتیجه

$$1 = \|e_{j_0} + e_j\|_d = \|Te_{j_0} + Te_j\|_d = \sup(Te_{j_0} + Te_j) - \inf(Te_{j_0} + Te_j) \\ > \lambda + \varepsilon - (\lambda - 1 + \varepsilon) = 1,$$

که این یک تناقض است.

اگر نامساوی (۱۵) برقرار باشد، بنا به نامساوی (۱۲) داریم:

$$\lambda - \varepsilon \leq Te_{j_0}(i_1) + Te_j(i_1),$$

پس طبق این نامساوی و نامساوی (۱۵) داریم:

$$1 = \|Te_{j_0} + Te_j\|_d = \sup(Te_{j_0} + Te_j) - \inf(Te_{j_0} + Te_j) \\ > \lambda - \varepsilon - (\lambda - 1 - \varepsilon) = 1,$$

که یک تناقض است. در نتیجه نامساوی (۱۳) برای هر عدد حقیقی درست است. از این رو، داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq Te_{j_0}(i) + Te_j(i) \leq \lambda + \varepsilon,$$

آن گاه:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq T(e_{j_0} + e_j)(i) \leq \lambda + \varepsilon.$$

در این صورت داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq \inf(T(e_{j_0} + e_j)) \leq \sup(T(e_{j_0} + e_j)) \leq \lambda + \varepsilon.$$

اما طبق (۱۲) داریم $\sup(T(e_{j_0} + e_j)) \geq \lambda - \varepsilon$ در نتیجه

$$\lambda - \varepsilon \leq \lambda_j = \sup(T(e_{j_0} + e_j)) \leq \lambda + \varepsilon.$$

و طبق (۱۱) داریم $\inf(T(e_{j_0} + e_j)) \leq \lambda - 1 + \varepsilon$ در نتیجه

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq \eta_j = \inf(T(e_{j_0} + e_j)) \leq \lambda - 1 + \varepsilon.$$

بنابراین برای هر $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ یک مجموعه متناهی مانند G وجود دارد؛ به طوری که برای هر $j \in \mathbb{R} \setminus G$

$$\square \quad \lambda - 1 = \lim_{j \in \mathbb{R}} \eta_j \text{ و } \lambda = \lim_{j \in \mathbb{R}} \lambda_j \text{ در نتیجه } |\eta_j - (\lambda - 1)| \leq \varepsilon \text{ و } |\lambda_j - \lambda| \leq \varepsilon$$

در پایان، این موضوع را مطرح می کنیم که اگر عملگر خطی $T: B_0(\mathbb{R}) \rightarrow B_0(\mathbb{R})$ طولی تحت نرم قطری باشد، آیا نظیر این عملگر، تابعی مانند $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد؟ به طوری که $Tf = \alpha f \circ \varphi$ که $|\alpha| = 1$.

References

1. Bayati Eshkaftaki A., "D-Norm and isometries on c_0 spaces", Oper. Mat, 41 (2017) 2340-2358.
2. Birkhoff G., "Orthogonality in linear metric spaces", Duke Math. J, 1 (1935) 169-172.
3. Hagler J., "A counterexample to several questions about Banach spaces", Studia Mathematica, 3 (1977) 289-308.
4. Ljubenovic M., Djordjevic D.S., "Linear preservers of weak majorization on $\ell^1(I)^+$ when I is an infinite set", Linear Algebra Appl, 517 (2017) 177-198.