ساختارهای توپولوژیکی حاصل از اتوماتای فازی عمومی براساس تکوارۀ مشبکه مرتب

خدیجه ابول پور
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شیراز، گروه ریاضی

دریافت ۹۹/۱۰/۱۳ پذیرش ۹۹/۱۲/۰۶

چکیده

نقش اساسی خواص جبری در توسعۀ مبانی علم کامپیوتر موجب شده تا پژوهش‌گران مفاهیم تفکیک‌پذیری، هم‌بندی و معکوس‌پذیری اتوماتای فازی را در سطح وسیعی بررسی کنند. در این مقاله، اتوماتای فازی عمومی را از دیدگاه جبری و توپولوژیکی بررسی کرده و خواص جبری اتوماتای مذکور را براساس تکوارۀ مشبکۀ مرتب بررسی می‌کنیم. از طرف دیگر، اتوماتای فازی عمومی را با استفاده از مفاهیم عملگرها بررسی می‌کنیم. این عملگرها به ما در بررسی جبری اتوماتای فازی عمومی کمک کرده و بستر لازم را برای استفاده از مفاهیم توپولوژیکی فراهم می‌آورند. بدین منظور، با درنظر گرفتن تعریف اتوماتای فازی عمومی، اتوماتای فازی عمومی L^B- ارزشی را که در آن B یک تکوارۀ مشبکۀ مرتب متشکل از گزاره‌های مربوط به اتوماتای فازی عمومی است، تعریف می‌کنیم. سپس، عملگرهای درونی و بستار کوراتوفسکی L^B-ارزشی را روی مجموعه حالت‌های اتوماتای مذکور تعریف کرده و ساختارهای توپولوژیکی حاصل از این عملگرها را معرفی می‌کنیم. نکتۀ قابل توجه در این پژوهش، پیدا کردن مفاهیم جبری و توپولوژیکی برای اتوماتای فازی عمومی بر اساس تکوارۀ مشبکه مرتب است که به ساختارهای تکواره‌ای وابسته، بستگی دارد. در پایان، برخی خواص هم‌بندی و تفکیک‌پذیری اتوماتای فازی عمومی L^B–ارزشی را بررسی می‌کنیم و با ارائۀ مثال این مفاهیم را روشن می‌سازیم.

واژه‌های کلیدی: اتوماتای فازی عمومی، تکواره، عملگر، هم‌بند، تفکیک‌پذیر

مقدمه

نظریۀ مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵، به‌وسیلۀ لطفی زاده ارائه شد [۲۸]؛ که علاوه بر توسعۀ منطق دو ارزشی یک نظریۀ جدید به‌وجود آمد. هم‌چنین، وی [۲۴] و سانتوس [۲۰] ایدۀ اتوماتای فازی را ارائه کردند. قبل از آن، مفهوم ساده‌تری از ماشین حالت متناهی فازی (که تقریباً مشابه با اتوماتای فازی است) به‌وسیلۀ مالک، موردسون و سن [۱۵]، [۱۶] معرفی شده بود. متعاقباً مفاهیم متفاوتی به‌وسیلۀ کیم، کیم و چو [۱۱]، کامبوجکار و چوداری [۱۲] و کیو [۱۷] ارائه شده بود. اخیراً، ژوئن [۸]-[۱۰] مفهوم ماشین حالت متناهی فازی متناظر با مجموعه‌های فازی شهودی را تعمیم داد و ماشین حالت متناهی فازی شهودی نامیده شد. در میان طیف متعارف اتوماتا (یعنی، اتوماتای حالت متناهی قطعی (DFA)، اتوماتای حالت متناهی غیرقطعی (NFA)، اتوماتای احتمالی (PA) و اتوماتای حالت متناهی فازی (FFA))، DFA بیش‌تر از اتوماتاهای دیگر در سطوح مختلف به‌کار برده شده است. همۀ انتقال‌ها در اتوماتای حالت متناهی قطعی و اتوماتای حالت متناهی غیرقطعی ارزش ضمنی یک دارند، جایی‌که ارزش انتقال‌ها در اتوماتای احتمالی و اتوماتای حالت متناهی فازی متعلق به بازۀ $[0,1]$ است. بنابراین، در انواع متعارف اتوماتاها، یک انتقال با ارزش صفر به این معنی است که انتقالی وجود ندارد. در صورتی که، در تعریف جدید برای اتوماتای حالت متناهی فازی ممکن است یک انتقال با ارزش صفر موجود باشد. این دلیلی است که از بازۀ $[0,1]$ به‌عنوان بازۀ فازی استفاده شده است.

*نویسنده مسئول abolpor_kh@yahoo.com

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

هم‌چنین، چند عضویتی از ویژگی‌های ذاتی و طبیعی اتوماتای فازی است، که برای هدف‌های کاربردی مناسب است مسئلهٔ چند عضویتی را به‌صورتی حل کنیم که تنها یک مقدار عضویت به هر حالت فعال منتسب شود. یک نکته بسیار مهم آن است که روش رفع چند عضویتی ساختار FFA را تغییر نمی‌دهد، یعنی بدون اضافه کردن حالت یا انتقال انجام می‌شود. در سال ۲۰۰۵، دوست فاطمه و کرمر مفهوم اتوماتای فازی را توسعه دادند و هم‌چنین مفهوم اتوماتای فازی عمومی را ارائه کردند [۵]. طی سال‌های اخیر، محققان زیادی روی اتوماتای فازی با مقادیر عضویت در مشبکه‌های مانده کامل، تکواره‌های مشبکهٔ مرتب و برخی دیگر از انواع ساختارهای جبری کار کردند [۱]، [۲]، [۳]، [۷]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۶]. با توجه به این که خواص جبری در توسعهٔ مبانی علم کامپیوتر نقش اساسی دارند، مفاهیم تفکیک‌پذیری، هم‌بندی و معکوس‌پذیری اتوماتای فازی به‌وسیلهٔ موردسون و مالک معرفی و بررسی شد [۱۶]. مفاهیم توپولوژیکی قطعی و توپولوژیکی فازی را می‌توان در نظریهٔ اتوماتای فازی برای به‌دست آوردن نتایج قطعی، شامل خواص هم‌بندی و تفکیک‌پذیری آنها استفاده کرد [۴]، [۲۱]، [۲۲]،[۲۳]. چندن مشخص‌سازی توپولوژیکی در بررسی اتوماتای فازی با مقادیر عضویت در مشبکه‌های مانده کامل ارائه شده است [۱۸]، [۱۹]. علاوه بر این، اساس برخی از جبرهای مرتب شده (به‌عنوان مثال، BL-جبر، MV-جبر و BCK-جبر) از مشبکه مانده گرفته شده است. بنابراین، هنگامی که ما مشبکه مانده را به‌عنوان یک جبر مرتب در نظر می‌گیریم شباهت زیادی به $[0,1]$ دارد. از این رو، کار با آن هم به‌عنوان تعمیم مفهوم مجموعه فازی است و هم ارتباط بین منطق جبری و اتوماتای فازی است. مفهوم نظریه اتوماتای L-ارزشی بر اساس منطق کوانتوم در یینگ [۲۷] معرفی شده است. منطق کوانتوم را می‌توان منطقی دانست که مجموعه ارزش درستی آن یک مشبکه ارتمودولار است و یک عنصر از مشبکه ارتمودولار به هر انتقال از یک اتوماتا تخصیص داده می شود. در [۱۸]، [۱۹] نشان داده شده است، که مفاهیم عملگرهای منبع L-ارزشی و جانشین L-ارزشی وابسته به یک اتوماتای L-ارزشی توپولوژی‌های L-ارزشی روی مجموعه حالت‌های اتوماتا تعریف می‌کنند. در پژوهشی دیگر تیواری و همکارانش [۲۱]، [۲۲] نظریه اتوماتای $\mathrm{L}^{\mathrm{M}}-$ ارزشی را از دیدگاه جبری و توپولوژیکی معرفی کردند، جایی‌که L یک مشبکه مانده کامل و M یک مشبکه توزیع‌پذیر کامل است. در این مقاله، ابتدا خواص جبری اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L}^{\mathrm{B}}-$ارزشی را که در آن B یک تکواره‌ی مشبکهٔ مرتب متشکل از گزاره‌های مربوط به اتوماتای فازی عمومی است بررسی می‌کنیم. سپس، عملگرهای $\mathrm{L}^{\mathrm{B}}-$ارزشی مختلفی را روی مجموعه حالت‌های اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L}^{\mathrm{B}}-$ارزشی تعریف کرده و ساختارهای توپولوژیکی حاصل از آنها را بررسی می‌کنیم.

تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱. [۵]، اتوماتای فازی عمومی (GFA)، یک ماشین هشت‌تایی به‌صورت

$$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$$

است که در آن:

$Q=\{q_1,q_2,...,q_n\}$: مجموعهٔ متناهی غیرفازی از حالت‌ها است.

$\Sigma=\{a_1,a_2,...,a_m\}$: مجموعهٔ متناهی غیرفازی از الفبای ورودی است.

$\tilde{R}$: مجموعه حالت‌های فازی آغازین است و $\tilde{R}\subseteq\tilde{P}(Q)$.

$Z=\{b_1,b_2,...,b_l\}$: مجموعهٔ متناهی غیرفازی از عناوین خروجی است.

$F_1:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$: یک نگاشت تابعی است که به‌وسیلهٔ $\tilde{\delta}$ برای تعیین مقادیر عضویت حالت‌های فعال به‌کار برده می‌شود. بنابراین تابع تعیین عضویت نامیده شده است.

تابع $F_1=(\mu,\delta)$ به‌وسیلهٔ دو پارامتر به‌دست می‌آید:

۱. μ: مقدار عضویت ما قبل بلافصل،

۲. δ: ارزش انتقال.

در این تعریف، روندی که به‌وسیلهٔ انتقال از حالت q_i به حالت q_j روی نماد ورودی a_k رخ می دهد بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mu^{t+1}(\mathrm{q_j}) &= \tilde{\delta}((q_i,\mu^t(q_i)),a_k,q_j)\\ &= F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_j))\end{aligned}$$

عبارت بالا بدان معنی است که مقدار عضویت حالت q_j در زمان $t+1$، به‌وسیلهٔ تابع F_1 با استفاده از مقدار عضویت q_i در زمان t و ارزش انتقال محاسبه می‌شود. در این جا انتخاب‌های متفاوتی برای تابع $F_1(\mu,\delta)$ وجود دارد، که مهم‌ترین انتخاب به‌کاربرد موردنظر بستگی دارد. برای مثال، می‌تواند t-نرم، بیشینه، کمینه، میانگین یا هر تابع ریاضی مربوط دیگری باشد. تابع $F_1(\mu,\delta)$ باید در اصول زیر صدق کند:

(i) $0\le F_1(\mu,\delta)\le 1$،

(ii) $F_1(1,1)=1\ ,\ F_1(0,0)=0$.

$\tilde{\delta}:(Q\times[0,1])\times\Sigma\times Q\to[0,1]$: تابع انتقال تقویت شده است که با استفاده از تابع $F_1(\mu,\delta)$ حالت فعال به‌دست آمده از ماقبل بلافصل‌اش را به بازهٔ فازی $[0,1]$ می‌نگارد.

$F_2:[0,1]^*\to[0,1]$: روش رفع چند عضویتی است که چند عضویتی حالت‌های فعال را برطرف می‌کند و یک مقدار عضویت برای آنها تعیین می‌کند. بنابراین تابع رفع چند عضویتی نامیده شده است.

تعریف ۲. [۵]، مجموعه تالی حالت q_m، روی نماد ورودی a_k که با نماد $Q_{Succ}(q_m,a_k)$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ حالت‌های q_j است که به‌وسیلهٔ انتقال‌های $\delta(q_m,a_k,q_j)$ ظاهر می‌شوند.

$$Q_{Succ}(q_m,a_k)=\left\{q_j\,\middle|\,\delta(q_m,a_k,q_j)\in\Delta\right\}$$

به طریق مشابه، مجموعه ماقبل بلافصل حالت q_m، روی نماد ورودی a_k بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$Q_{\mathrm{Pred}}(q_m,a_k)=\left\{q_j\,\middle|\,\delta(q_j,a_k,q_m)\in\Delta\right\}.$$

تعریف ۳. [۶]، جبر $L=(\ell,\le,\wedge,\vee,\otimes,0,1)$ را تکوارهٔ مشبکه مرتب گوییم هرگاه

(۱) $L=(\ell,\le,\wedge,\vee,\otimes,0,1)$ یک مشبکه باشد که کوچک‌ترین عضو آن صفر و بزرگ‌ترین عضو آن یک است.

(۲) $(\ell,\otimes,e)$ یک تکواره با عضو همانی $e\in\ell$ باشد به‌طوری‌که برای هر $a,b,c\in\ell$،

(i) $a\otimes 0=0\otimes a=0$،

(ii) برای هر $x\in\ell$،

$$a\le b\Rightarrow \mathrm{a}\otimes\mathrm{x}\le\mathrm{b}\otimes\mathrm{x},\ \ \mathrm{x}\otimes\mathrm{a}\le\mathrm{x}\otimes\mathrm{b}$$

(iii) $a\otimes(b\vee c)=(a\otimes b)\vee(a\otimes c)$

و $(b\vee c)\otimes a=(b\otimes a)\vee(c\otimes a)$.

تعریف ۴. [۶]، تکوارهٔ $(\ell,\otimes,e)$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر نامیده می شود هرگاه برای هر $a,b\in\ell$،

$$a\ne 0\ ,\ b\ne 0\Rightarrow a\otimes b\ne 0.$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

تعریف ۵. [۲۵]، فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. یک مجموعهٔ L-ارزشی در X با ارزش ثابت a با نماد **a** نمایش داده می‌شود. از نماد L^X برای نمایش خانواده‌ای از مجموعه‌های L-ارزشی در X استفاده می‌شود.

تعریف ۶. [۲۵]، یک عملگر بستار کوراتوفسکی L-ارزشی روی مجموعهٔ X نگاشتی است مانند $c: L^X \to L^X$ که برای هر $a \in L$ و $\mathbf{a}, \lambda, \mu \in L^X$ در این اصول صدق می‌کند:

(i) $c(\mathbf{a})=\mathbf{a}$،

(ii) $\lambda \le c(\lambda)$،

(iii) $c(\lambda \cup \mu) = c(\lambda) \cup c(\mu)$،

(iv) $c(c(\lambda)) = c(\lambda)$.

تعریف ۷. [۲۵]، یک عملگر درونی کوراتوفسکی L-ارزشی روی مجموعهٔ X نگاشتی است مانند $i: L^X \to L^X$ که برای هر $a \in L$ و $\mathbf{a}, \lambda, \mu \in L^X$ در اصول زیر صدق می‌کند:

(i) $i(\mathbf{a})=\mathbf{a}$،

(ii) $i(\lambda) \le \lambda$،

(iii) $i(\lambda \cap \mu) = i(\lambda) \cap i(\mu)$،

(iv) $i(i(\lambda)) = i(\lambda)$.

دست‌آوردهای پژوهش

۱. اتوماتای فازی عمومی L^B- ارزشی

فرض کنید

$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی باشد. ورودی $a_k \in \Sigma$ را در زمان t_i ثابت درنظر می‌گیریم. از این‌رو، گزارهٔ $\alpha\big|_{a_k}$ با استفاده از $\mu^{t_i}(q_i)$ محاسبه می‌شود هرگاه اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}$ در زمان t_i در حالت q_i باشد. در غیر این‌صورت، گزارهٔ $\alpha\big|_{a_k}$ صفر درنظر گرفته می شود. با استفاده از مطالب مذکور، برای هر حالت $q_i \in Q$ ارزش درستی $\alpha\big|_{a_k}$ با استفاده از نماد $\alpha\big|_{a_k}(q_i)$ نشان داده می شود. از این‌رو، $\alpha\big|_{a_k}(q_i) \in [0,1]$.

در این زیر بخش، منطق B را که مجموعه‌ای متشکل از گزاره‌های مربوط به اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}$ است درنظر می‌گیریم. ترتیب $\le$ را روی B بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

برای $\alpha, \beta \in B$، $\alpha \le \beta$ اگر و تنها اگر برای هر $q \in Q$، $\alpha(q) \le \beta(q)$.

هم‌چنین برای $\alpha, \beta \in B$ و $q_i \in Q$، $i \ge 0$ تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \otimes \beta = \min(\alpha(q_i), \beta(q_i)).$$

یک گزاره با ارزش درستی ثابت 0 را به‌عنوان کوچک‌ترین عضو B و یک گزاره با ارزش درستی ثابت 1 را به‌عنوان بزرگ‌ترین عضو B در نظر می‌گیریم. در این صورت، ساختار جبری B= $(B, \le, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1)$ یک تکوارهٔ مشبکهٔ مرتب است.

در این مقاله $L = [0,1]$ درنظر گرفته می‌شود.

زیر مجموعهٔ L^B-ارزشی، $\delta: Q \times \Sigma \times Q \to L^B$ را بدین‌صورت تعریف می کنیم:

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

$$\delta(q,a_k,p)(\alpha)=\begin{cases}1, \quad q=p & \text{اگر}\\ \alpha(\mathrm{q})\vee\alpha(\mathrm{p}), & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

به‌عبارت دیگر، نگاشت انتقال δ را می‌توان به‌صورت خانوادهٔ $\{\delta^{\alpha}:\alpha\in B\}$ از مجموعه‌های L-ارزشی $\delta^{\alpha}\in L^{Q\times\Sigma\times Q}$ با استفاده از عناصر B درنظر گرفت.

تعریف ۸. یک اتوماتای فازی عمومی L^{B}-ارزشی هشت‌تایی $\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$ است، جایی‌که $\tilde{\delta}$ یک زیرمجموعهٔ L^{B}-ارزشی از $(Q\times L)\times\Sigma\times Q$ است.

یعنی، $\tilde{\delta}:(Q\times L)\times\Sigma\times Q\to \mathrm{L}^{\mathrm{B}}$ به‌طوری‌که

$$\tilde{\delta}((q_i,\mu^t(q_i)),a_k,q_j)(\alpha)=$$
$$F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_j)(\alpha)).$$

فرض کنید Σ^* تکوارهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ مجموعهٔ ناتهی Σ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),\Lambda,p)(\alpha)=$$
$$\tilde{\delta}((q,\mu^t(q)),\Lambda,p)(\alpha)=\begin{cases}1, \quad q=p & \text{اگر}\\ 0, & \text{در غیر این صورت،}\end{cases}$$

و برای هر $q,p\in Q$، $\mathrm{u}\in\Sigma^*$، $\mathrm{x}\in\Sigma$ و $\alpha\in B$

$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),ux,p)(\alpha)=$$
$$\vee\left\{\tilde{\delta}^*((q,\ \mu^{t_i}(q)),u,q')(\alpha)\otimes\tilde{\delta}((q',\mu^{t_j}(q')),\ \ x,p)(\alpha)\,\middle|\,q'\in Q_{\mathrm{Pred}}(p,x)\right\}.$$

مثال ۹. اتوماتای فازی عمومی

$$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$$

را درنظر بگیرید که در آن:

$Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$: مجموعه حالت‌ها،

$\Sigma=\{a,b\}$: مجموعه الفبای ورودی،

$\tilde{R}=\{(q_0,1)\}$: مجموعه حالت آغازین و

$Z=\phi$ است.

عمل اتوماتای فازی عمومی مثال ۹ را تحت رشتهٔ ورودی $"ab^2ab"$ بررسی می‌کنیم.

هرگاه $F_1(\mu,\delta)=\delta$ و

$$F_2(\ )=\mu^{t+1}(q_m)=\mathop{\wedge}_{i=1}^{n}(F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_m))$$

داریم:

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

$$
\begin{aligned}
&\mu^{t_0}(q_0)=1,\\
&\mu^{t_1}(q_1)=F_1(\mu^{t_0}(q_0),\delta(\mathrm{q}_0,\mathrm{a},\mathrm{q}_1))=\delta(\mathrm{q}_0,\mathrm{a},\mathrm{q}_1)=0.3,\\
&\mu^{t_2}(q_0)=F_1(\mu^{t_1}(q_1),\delta(\mathrm{q}_1,\mathrm{b},\mathrm{q}_0))=\delta(\mathrm{q}_1,\mathrm{b},\mathrm{q}_0)=0.8,\\
&\mu^{t_2}(q_2)=F_1(\mu^{t_1}(q_1),\delta(\mathrm{q}_1,\mathrm{b},\mathrm{q}_2))=\delta(\mathrm{q}_1,\mathrm{b},\mathrm{q}_2)=0.2,\\
&\mu^{t_3}(q_3)=F_1(\mu^{t_2}(q_0),\delta(\mathrm{q}_0,\mathrm{b},\mathrm{q}_3))\wedge F_1(\mu^{t_2}(q_2),\delta(\mathrm{q}_2,\mathrm{b},\mathrm{q}_3))\\
&\qquad=\delta(\mathrm{q}_0,\mathrm{b},\mathrm{q}_3)\wedge\delta(\mathrm{q}_2,\mathrm{b},\mathrm{q}_3)=0.5\wedge 0.1=0.1,\\
&\mu^{t_4}(q_0)=F_1(\mu^{t_3}(q_3),\delta(\mathrm{q}_3,\mathrm{a},\mathrm{q}_0))=\delta(\mathrm{q}_3,\mathrm{a},\mathrm{q}_0)=0.3,\\
&\mu^{t_4}(q_2)=F_1(\mu^{t_3}(q_3),\delta(\mathrm{q}_3,\mathrm{a},\mathrm{q}_2))=\delta(\mathrm{q}_3,\mathrm{a},\mathrm{q}_2)=0.2,\\
&\mu^{t_5}(q_3)=F_1(\mu^{t_4}(q_0),\delta(\mathrm{q}_0,\mathrm{b},\mathrm{q}_3))\wedge F_1(\mu^{t_4}(q_2),\delta(\mathrm{q}_2,\mathrm{b},\mathrm{q}_3))\\
&\qquad=\delta(\mathrm{q}_0,\mathrm{b},\mathrm{q}_3)\wedge\delta(\mathrm{q}_2,\mathrm{b},\mathrm{q}_3)=0.5\wedge .0.1.
\end{aligned}
$$

اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}$ و جدول انتقال آن به‌ترتیب در نمودار ۱ و جدول ۱ نشان داده شده است.

مجموعهٔ $B=\{0,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,1\}$ از گزاره‌های ممکن دربارهٔ اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

0: نشان می‌دهد $\tilde{F}$ در هیچ یک از حالت‌های فعال مجموعهٔ Q قرار ندارد.

α_0: نشان می‌دهد $\tilde{F}$ در حالت‌های فعال در زمان t_0 قرار دارد.

α_1: نشان می‌دهد $\tilde{F}$ در حالت‌های فعال در زمان t_1 قرار دارد.

α_2: نشان می‌دهد $\tilde{F}$ در حالت‌های فعال در زمان t_2 قرار دارد.

α_3: نشان می‌دهد $\tilde{F}$ در حالت‌های فعال در زمان t_3 قرار دارد.

α_4: نشان می‌دهد $\tilde{F}$ در حالت‌های فعال در زمان t_4 قرار دارد.

α_5: نشان می‌دهد $\tilde{F}$ در حالت‌های فعال در زمان t_5 قرار دارد.

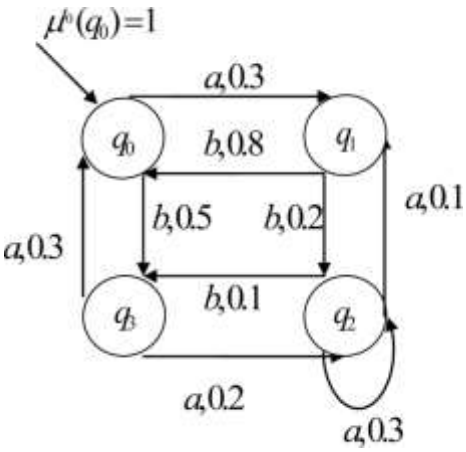
1: نشان می‌دهد که برای هر $i\geq 0$، $\tilde{F}$ حداقل در یکی از حالت‌های فعال در زمان t_i قرار دارد.

با توجه به مطالب بالا عناصر B بدین‌صورت درنظر گرفته می شوند:

$$
\begin{aligned}
&0=(0,0,0,0),\ \alpha_0=(1,0,0,0),\\
&\alpha_1=(0,0.3,0,0),\ \alpha_2=(0.8,0,0.2,0),\\
&\alpha_3=(0,0,0,0.1),\ \alpha_4=(0.3,0,0.2,0),\\
&\alpha_5=(0,0,0,0.1),\ 1=(1,0.3,0.2,0.1).
\end{aligned}
$$

در تعریف مذکور برای هر $i\geq 0$، $\alpha(q_i)$ بیشینهٔ مقادیر عضویت حالت‌های فعال در زمان t_i است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]



نمودار ۱. اتوماتای فازی عمومی مثال ۹

جدول ۱. حالت‌های فعال و مقادیر عضویت آنها در زمان‌های مختلف مثال ۹

زمان	t_0	t_1	t_2		t_3	t_4		t_5
ورودی	∧	a	b		b	a		b
$Q_{act}(t_i)$	q_0	q_1	q_0	q_2	q_3	q_0	q_2	q_3
مقدار عضویت	1	0.3	0.8	0.2	0.1	0.3	0.2	0.1

با استفاده از تعریف اتوماتای فازی عمومی L^B-ارزشی داریم:

$$\delta(q_0,a,q_1)(\alpha_1)=\alpha_1(q_0)\vee\alpha_1(q_1)=0\vee 0.3=0.3,$$
$$\delta(q_2,a,q_2)(\alpha_1)=1,$$
$$\delta(q_2,b,q_3)(\alpha_3)=\alpha_3(q_2)\vee\alpha_3(q_3)=0\vee 0.1=0.1,$$
$$\tilde{\delta}^*((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),ab,q_2)(\alpha_1)=\tilde{\delta}((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),a,q_1)(\alpha_1)\otimes\tilde{\delta}((q_1,\mu^{t_1}(q_1)),b,q_2)(\alpha_1)$$
$$=F_1((\mu^{t_0}(q_0),\delta(q_0,a,q_1)(\alpha_1))\otimes F_1((\mu^{t_1}(q_1),\delta(q_1,b,q_2)(\alpha_1))$$
$$=\delta(q_0,a,q_1)(\alpha_1)\otimes\delta(q_1,b,q_2)(\alpha_1)$$
$$=\left[\alpha_1(q_0)\vee\alpha_1(q_1)\right]\otimes\left[\alpha_1(q_1)\vee\alpha_1(q_2)\right]=\alpha_1(q_1)\otimes\alpha_1(q_1)=0.3.$$

تعریف ۱۰. فرض کنید

$$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی L^B-ارزشی و $Q'\subseteq Q$. هم‌چنین فرض کنید $q\in Q'$، $a\in\Sigma$ و $\alpha\in B$. تالی و ماقبل بلافصل L^B-ارزشی مجموعهٔ Q' به‌ترتیب با استفاده از مجموعه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$S^{\alpha}(Q')=\left\{p\in Q\,\middle|\,\delta(\mathrm{q,a,p})\in\Delta,\ \tilde{\delta}((q,\mu^t(q)),a,p)(\alpha)>0\right\},$$
$$.P^{\alpha}(Q')=\left\{p\in Q\,\middle|\,\delta(\mathrm{p,a,q})\in\Delta,\ \tilde{\delta}((p,\mu^t(p)),a,q)(\alpha)>0\right\}$$

قضیهٔ ۱۱. فرض کنید $(B,\otimes,\mathrm{e})$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه‌های صفر و $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی L^B-ارزشی باشد. در این صورت، برای هر $p,q,r\in Q$ و $\alpha\in B$،

$$.\mathrm{p}\in\mathrm{S}^{\alpha}(\mathrm{q}),\ \mathrm{q}\in\mathrm{S}^{\alpha}(\mathrm{r})\Rightarrow\mathrm{p}\in\mathrm{S}^{\alpha}(\mathrm{r})$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

اثبات: فرض کنید $p \in S^{\alpha}(q)$ و $q \in S^{\alpha}(r)$. طبق تعریف ۱۰، $a,b \in \Sigma$ موجود هستند به‌طوری‌که $\tilde{\delta}((q,\mu^{t_i}(q)),a,p)(\alpha) > 0$ و

$$\tilde{\delta}((r,\mu^{t_j}(r)),b,q)(\alpha) > 0$$

چون $(B,\otimes,\mathrm{e})$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه‌های صفر است داریم:

$$\tilde{\delta}((r,\mu^{t_j}(r)),b,q)(\alpha) \otimes$$
$$\tilde{\delta}((q,\mu^{t_i}(q)),a,p)(\alpha) > 0$$

یا به‌عبارت دیگر،

$$\tilde{\delta}^{*}((r,\mu^{t_j}(r)),ba,p)(\alpha) > 0$$

در نتیجه $p \in S^{\alpha}(r)$.

قضیهٔ ۱۲. فرض کنید $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی L^{B}-ارزشی، $Q', Q'' \subseteq Q$ و $\alpha \in B$ باشد. آن‌گاه

الف) $Q' \subseteq S^{\alpha}(Q')$ و $Q' \subseteq P^{\alpha}(Q')$.

ب) $S^{\alpha}(Q' \bigcup Q'') = S^{\alpha}(Q') \bigcup S^{\alpha}(Q'')$

و $P^{\alpha}(Q' \bigcup Q'') = P^{\alpha}(Q') \bigcup P^{\alpha}(Q'')$.

ج) اگر $Q' \subseteq Q''$، آن‌گاه $S^{\alpha}(Q') \subseteq S^{\alpha}(Q'')$ و $P^{\alpha}(Q') \subseteq P^{\alpha}(Q'')$.

اثبات: بدیهی است.

قضیهٔ ۱۳. فرض کنید $(B,\otimes,\mathrm{e})$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه‌های صفر و $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی L^{B}-ارزشی باشد. آن‌گاه برای هر $Q' \subseteq Q$ و $\alpha \in B$، $S^{\alpha}(S^{\alpha}(Q')) = S^{\alpha}(Q')$.

اثبات: با توجه به قسمت (ج) قضیهٔ ۱۲ داریم: $S^{\alpha}(Q') \subseteq S^{\alpha}(S^{\alpha}(Q'))$. بر عکس، فرض کنید $q \in S^{\alpha}(S^{\alpha}(Q'))$. آن‌گاه برای $p \in S^{\alpha}(Q')$ و $a \in \Sigma$، $\tilde{\delta}((p,\mu^{t_i}(p)),a,q)(\alpha) > 0$.

چون $p \in S^{\alpha}(Q')$، طبق تعریف برای $r \in Q'$ و $b \in \Sigma$،

$$\tilde{\delta}((r,\mu^{t_j}(r)),b,p)(\alpha) > 0$$

و چون $(B,\otimes,\mathrm{e})$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه‌های صفر است داریم:

$$\tilde{\delta}((r,\mu^{t_j}(r)),b,p)(\alpha) \otimes$$
$$\tilde{\delta}((p,\mu^{t_i}(p)),a,q)(\alpha) > 0$$

در نتیجه $\tilde{\delta}^{*}((r,\mu^{t_j}(r)),ba,q)(\alpha) > 0$. بنابراین $q \in S^{\alpha}(Q')$. ثابت کردیم، $S^{\alpha}(S^{\alpha}(Q')) \subseteq S^{\alpha}(Q')$ و از این‌رو، $S^{\alpha}(S^{\alpha}(Q')) = S^{\alpha}(Q')$.

تعریف ۱۴. فرض کنید $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی L^{B}-ارزشی باشد.

هم‌چنین فرض کنید $Q' \subseteq Q$، $q_0 \in Q'$، $\omega' = \omega\big|_{Q'}$، $B' = B\big|_{Q'}$، $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}\big|_{(Q' \times \mathrm{L}) \times \Sigma \times Q'}$ و $S^{\alpha}(Q') = (Q')$.

در این صورت، $\tilde{F}' = (Q',\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta}',\omega',F_1,F_2)$ زیر اتوماتای تالی $\mathrm{L}^{\mathrm{B}'}$-ارزشی اتوماتای فازی عمومی L^{B}-ارزشی $\tilde{F}$ نامیده می‌شود.

علاوه براین زیر اتوماتای مذکور را زیر اتوماتای تالی $\mathrm{L}^{\mathrm{B}'}$-ارزشی مجزا گوییم هرگاه $S^{\alpha}(Q-Q') \bigcap Q' = \phi$.

به‌طریق مشابه، می‌توان زیر اتوماتای ماقبل بلافصل $\mathrm{L}^{\mathrm{B}'}$-ارزشی اتوماتای فازی عمومی L^{B}-ارزشی $\tilde{F}$ را تعریف کرد.

تعریف ۱۵. اتوماتای فازی عمومی L^{B}-ارزشی

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

$$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$$

را

الف) هم‌بند قوی گوییم هرگاه برای هر $p,\ q\in Q$ و $\alpha\in B$، $q\in S^{\alpha}(\mathrm{p})$.

ب) هم‌بند گوییم هرگاه هیچ زیر اتوماتای تالی یا ماقبل بلافصل مجزا نداشته باشد.

ج) معکوس‌پذیر گوییم هر گاه برای هر $p,\ q\in Q$ ، $a,b\in\Sigma$ و $\alpha\in B$،

$$\tilde{\delta}((q,\mu^{t_i}(q)),a,p)(\alpha)>0\Rightarrow$$
$$\tilde{\delta}((p,\mu^{t_j}(p)),b,q)(\alpha)>0$$

قضیهٔ ۱۶. اگر اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L^B}$-ارزشی $\tilde{F}$ هم‌بند قوی باشد، آن‌گاه $\tilde{F}$ زیر اتوماتای محض ندارد.

اثبات: فرض کنید $\tilde{F}$ هم‌بند قوی باشد. در این صورت، طبق تعریف برای هر $p,q\in Q$ و $\alpha\in B$ داریم: $\mathrm{q}\in \mathrm{S}^{\alpha}(p)$. بنابراین $\tilde{F}$ زیر اتوماتای محض ندارد.

قضیهٔ ۱۷. فرض کنید $(B,\otimes,\mathrm{e})$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر باشد. هم‌چنین فرض کنید اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L^B}$-ارزشی $\tilde{F}$ زیر اتوماتای محض نداشته باشد. آن‌گاه $\tilde{F}$ هم‌بند قوی است.

اثبات: فرض کنید $q\in Q$، $\alpha\in B$ و

$$\tilde{F}^{'}=(S^{\alpha}(q),\Sigma,\tilde{R},\omega',\tilde{\delta}^{'},F_1,F_2)$$

جایی‌که $\tilde{\delta}'=\tilde{\delta}\big|_{S^{\alpha}(q)\times\Sigma\times S^{\alpha}(\mathrm{q})}$ و $\omega'=\omega\big|_{S^{\alpha}(q)}$. در این صورت، $\tilde{F}^{'}$ زیر اتوماتای، اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L^B}$- ارزشی $\tilde{F}$ است. حال چون $(B,\otimes,\mathrm{e})$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر است داریم: $S^{\alpha}(q)\neq\phi$. بنابراین $S^{\alpha}(q)=Q$.

در نتیجه $\tilde{F}$ هم‌بند قوی است.

قضیهٔ ۱۸. اگر اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L^B}$- ارزشی $\tilde{F}$ هم‌بند قوی باشد، آن‌گاه $\tilde{F}$ هم‌بند و معکوس‌پذیر است.

اثبات: بدیهی است.

قضیهٔ ۱۹. فرض کنید $(B,\otimes,\mathrm{e})$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه‌های صفر و $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L^B}$-ارزشی باشد. اگر $\tilde{F}$ هم‌بند و معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه $\tilde{F}$ هم‌بند قوی است.

اثبات: فرض کنید $\mathrm{p,q}\in Q$، $\alpha\in B$ و $p\notin S^{\alpha}(q)$. آن‌گاه $S^{\alpha}(q)\neq Q$.

در این صورت، $(S^{\alpha}(q),\Sigma,\tilde{R},\omega',\tilde{\delta}^{'},F_1,F_2)$ جایی‌که $\tilde{\delta}'=\tilde{\delta}\big|_{S^{\alpha}(q)\times\Sigma\times S^{\alpha}(\mathrm{q})}$ و $\omega'=\omega\big|_{S^{\alpha}(\mathrm{q})}$ زیرا اتوماتای محض $\tilde{F}$ است. چون $\tilde{F}$ هم‌بند است، بنابراین $S^{\alpha}(Q-S^{\alpha}(q))\bigcap S^{\alpha}(q)\neq\phi$.

فرض کنید $r\in S^{\alpha}(Q-S^{\alpha}(q))\bigcap S^{\alpha}(q)$. آن‌گاه برای $q'\in Q-S^{\alpha}(q)$، $r\in S^{\alpha}(q')$ و $r\in S^{\alpha}(q)$ یا به‌عبارت دیگر، $a\in\Sigma$ موجود است به‌طوری‌که

$$\tilde{\delta}((q',\mu^{t_i}(q')),a,r)(\alpha)>0.$$

چون $\tilde{F}$ معکوس‌پذیر است $b\in\Sigma$ موجود است به‌طوری‌که

$$\tilde{\delta}((r,\mu^{t_j}(r)),b,q')(\alpha)>0.$$

بنابراین $q'\in S^{\alpha}(r)$ و در نتیجه

$$q'\in S^{\alpha}(r)\subseteq S^{\alpha}(S^{\alpha}(q))=S^{\alpha}(q)$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

و این تناقض است. از این‌رو، برای هر $p,q\in Q$ و $\alpha\in B$ داریم: $p\in S^{\alpha}(q)$. از این‌رو $\tilde{F}$ هم‌بند قوی است.

۲. توپولوژی‌های حاصل از اتوماتای فازی عمومی L^{B}- ارزشی

در این زیر بخش، با استفاده از مفاهیم مجموعه‌های تالی و ماقبل بلافصل L^{B}- ارزشی، دو توپولوژی روی مجموعه حالت‌های اتوماتای فازی عمومی L^{B}-ارزشی $\tilde{F}$ تعریف می‌کنیم، جایی‌که $(B,\otimes,\mathrm{e})$ به‌عنوان یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر ارائه شده است. علاوه‌براین، خواص هم‌بندی و تفکیک‌پذیری اتوماتای فازی عمومی L^{B}-ارزشی با توجه به این توپولوژی‌ها شرح داده می‌شود.

قضیهٔ ۲۰. فرض کنید

$$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی L^{B} - ارزشی باشد.

الف) مجموعه‌های تالی و ماقبل بلافصل L^{B}- ارزشی که به‌صورت توابع $S:B\to \mathrm{L}^{Q}$ و $P:B\to \mathrm{L}^{Q}$ معرفی شدند، به‌عنوان عملگرهای بستار کوراتوفسکی روی Q درنظر گرفته می‌شوند و توپولوژی‌های $\tau^{\alpha}(Q)$ و $\tau'^{\alpha}(Q)$ را روی مجموعه حالت‌های Q تولید می‌کنند.

ب) توپولوژی‌های $\tau^{\alpha}(Q)$ و $\tau'^{\alpha}(Q)$ اشباع شده هستند (یعنی تحت اشتراک دلخواه بسته هستند).

ج) توپولوژی‌های $\tau^{\alpha}(Q)$ و $\tau'^{\alpha}(Q)$ دوگان هم هستند. یعنی $Q'\subseteq Q$، $\tau^{\alpha}(Q)$-باز است اگر و تنها اگر Q'، $\tau'^{\alpha}(Q)$-بسته باشد.

اثبات: (الف) با استفاده از قضایای ۱۲ و ۱۳ ثابت می‌شود.

(ب) فرض کنید $\{Q_j \mid j\in \mathrm{J}\}$ یک خانواده از زیر مجموعه‌های $\tau'^{\alpha}(Q)$-بسته از Q باشند.

هم‌چنین فرض کنید $A=\bigcup\{Q_j \mid j\in \mathrm{J}\}$، $\alpha\in B$ و $r\in P^{\alpha}(A)$.

در این صورت، طبق تعریف $a\in\Sigma$ و $p\in A$ موجود است به‌طوری‌که $\tilde{\delta}((r,\mu^{t_i}(r)),a,p)(\alpha)>0$. چون $p\in A$ از این‌رو، برای تعدادی $j\in J$ داریم: $p\in Q_j$. اما $p\in P^{\alpha}(Q_j)=Q_j$ و در نتیجه

$P^{\alpha}(p)\subseteq P^{\alpha}(P^{\alpha}(Q_j))=P^{\alpha}(Q_j)$.

بنابراین $r\in P^{\alpha}(Q_j)=Q_j\subseteq A$.

در نتیجه $P^{\alpha}(A)\subseteq A$ و با توجه به این که $A\subseteq P^{\alpha}(A)$ نشان دادیم A، $\tau'^{\alpha}(Q)$-بسته است.

برای $\tau^{\alpha}(Q)$ به طریق مشابه اثبات می شود.

(ج) بدیهی است.

قضیهٔ ۲۱. فرض کنید

$$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$$

و $\tilde{F}'=(Q',\Sigma,\tilde{R}',Z,\omega',\tilde{\delta}',F_1,F_2)$ اتوماتاهای فازی عمومی L^{B} -ارزشی و $\mathrm{L}^{\mathrm{B}'}$-ارزشی باشند. آن‌گاه

الف) $\tilde{F}'$ زیر اتوماتای تالی $\tilde{F}$ است اگر و تنها اگر Q'، $\tau^{\alpha}(Q)$-باز باشد.

ب) $\tilde{F}'$ زیر اتوماتای تالی مجزا از $\tilde{F}$ است اگر و تنها اگر Q'، $\tau^{\alpha}(Q)$-باز و بسته باشد.

اثبات: الف) با استفاده از تعریف ۱۴و قضیهٔ ۲۰ اثبات می شود.

ب) فرض کنید $\tilde{F}'$ یک زیر اتوماتای تالی مجزا از $\tilde{F}$ باشد. آن‌گاه برای $\alpha\in B$ داریم: $S^{\alpha}(Q')=Q'$ و $S^{\alpha}(Q-Q')=Q-Q'$. از این‌رو، Q' و $Q-Q'$، $\tau^{\alpha}(Q)$-باز هستند در نتیجه Q'، $\tau^{\alpha}(Q)$-باز و بسته است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

برعکس، فرض کنید Q'، $\tau^{\alpha}(Q)$-باز و بسته باشد.
آن‌گاه برای $\alpha \in B$ داریم، $S^{\alpha}(Q')=Q'$ و $S^{\alpha}(Q-Q')=Q-Q'$. در نتیجه $\tilde{F}'$ یک زیر اتوماتای تالی مجزا از $\tilde{F}$ است.

قضیهٔ ۲۲. فرض کنید

$$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L^B}$-ارزشی باشد.

الف) $\tilde{F}$ هم‌بند قوی است اگر و تنها اگر $\tau^{\alpha}(Q)$ توپولوژی بدیهی باشد.

ب) $\tilde{F}$ هم‌بند است اگر و تنها اگر $\tau^{\alpha}(Q)$ توپولوژی هم‌بند باشد.

ج) $\tilde{F}$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\tau^{\alpha}(Q)$ R_0 - توپولوژی باشد.

اثبات: الف) طبق فرض به‌ازای هر $q \in Q$ و $\alpha \in B$، $S^{\alpha}(q)=Q$. بنابراین $\tau^{\alpha}(Q)$ یک توپولوژی بدیهی است و برعکس.

ب) فرض کنید $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L^B}$- ارزشی هم‌بند باشد. از این‌رو، طبق تعریف $\tilde{F}$ زیر اتوماتای تالی محض مجزا ندارد. بنابراین Q,ϕ تنها زیر مجموعه‌های $\tau^{\alpha}(Q)$-باز و بسته از Q هستند. در نتیجه $\tau^{\alpha}(Q)$ یک توپولوژی هم‌بند است. بر عکس، فرض کنید $\tau^{\alpha}(Q)$ یک توپولوژی هم‌بند باشد. در این صورت، Q,ϕ تنها زیر مجموعه‌های $\tau^{\alpha}(Q)$-باز و بسته از Q هستند. از این‌رو $\tilde{F}$ زیر اتوماتای تالی محض مجزا ندارد و در نتیجه هم‌بند است.

ج) با توجه به این که به‌ازای هر $p \in Q$ و $\alpha \in B$، $S^{\alpha}(p)$ تنها بستار $\{p\}$ تحت توپولوژی $\tau^{\alpha}(Q)$است، مطلب فوق ثابت می‌شود.

۳. عملگر هسته

در این زیر بخش، عملگر دیگری را روی مجموعه حالت‌های Q از اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L^B}$-ارزشی $\tilde{F}$ معرفی می‌کنیم. با توجه به این که $(B,\otimes,\mathrm{e})$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر است، عملگر فوق یک عملگر درونی برای توپولوژی $\tau'^{\alpha}(Q)$ می‌باشد و عملگر هسته نامیده می‌شود.

تعریف ۲۳. فرض کنید

$$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی$\mathrm{L^B}$-ارزشی، $(B,\otimes,\mathrm{e})$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر، $\alpha \in B$ و $Q' \subseteq Q$ باشد. هستهٔ Q' با استفاده از رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$R^{\alpha}(Q')=\left\{q \in Q' \middle| \mathrm{P}^{\alpha}(q) \subseteq Q'\right\}.$$

برای خلاصه‌نویسی از نماد $R^{\alpha}(q)$ به‌جای $R^{\alpha}(\{q\})$ استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۲۴. فرض کنید $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی $\mathrm{L^B}$-ارزشی و $\alpha \in B$ باشد. آن‌گاه برای هر $Q',Q'' \subseteq Q$

الف) $R^{\alpha}(Q') \subseteq Q'$.

ب) $R^{\alpha}(Q' \cap Q'')=R^{\alpha}(Q') \cap R^{\alpha}(Q'')$.

ج) اگر $Q' \subseteq Q''$، آن‌گاه $R^{\alpha}(Q') \subseteq R^{\alpha}(Q'')$.

اثبات: بدیهی است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

قضیهٔ ۲۴. فرض کنید $(B,\otimes,e)$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر و $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی L^B-ارزشی باشد. آن‌گاه برای هر $Q' \subseteq Q$ و $\alpha \in B$، $R^\alpha(R^\alpha(Q')) = R^\alpha(Q')$.

اثبات: فرض کنید $q \in R^\alpha(Q')$.

آن‌گاه $P^\alpha(q) \subseteq Q'$.

برای اثبات این که $q \in R^\alpha(R^\alpha(Q'))$، کافی است نشان دهیم $P^\alpha(q) \subseteq R^\alpha(Q')$.

بدین‌منظور، فرض کنید $p \in P^\alpha(q)$. آن‌گاه برای $a \in \Sigma$، $\tilde{\delta}((p,\mu^{t_i}(p)),a,q)(\alpha) > 0$.

هم‌چنین هرگاه $r \in P^\alpha(p)$، برای $b \in \Sigma$ داریم:

$\tilde{\delta}((r,\mu^{t_j}(r)),b,p)(\alpha) > 0$. چون $(B,\otimes,e)$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر است، داریم:

$$\tilde{\delta}((r,\mu^{t_j}(r)),b,p)(\alpha) \otimes$$
$$\tilde{\delta}((p,\mu^{t_i}(p)),a,q)(\alpha) > 0$$

از این‌رو، $\tilde{\delta}^*((r,\mu^{t_j}(r)),ba,q)(\alpha) > 0$ و این نشان می‌دهد $r \in P^\alpha(q)$.

حال با توجه به این‌که $P^\alpha(q) \subseteq Q'$ و $r \in P^\alpha(q)$، $P^\alpha(p) \subseteq Q'$ و این ایجاب می‌کند $P^\alpha(q) \subseteq R^\alpha(Q')$.

در نتیجه با استفاده از این مطلب که $R^\alpha(R^\alpha(Q')) \subseteq R^\alpha(Q')$ داریم:

$$R^\alpha(R^\alpha(Q')) = R^\alpha(Q').$$

قضیهٔ ۲۵. فرض کنید $(B,\otimes,e)$ یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر و $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی L^B- ارزشی باشد. آن‌گاه نگاشت $R: B \to L^Q$ یک عملگر درونی روی Q است.

اثبات: با استفاده از قضایای ۲۳ و ۲۴ ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۲۶. توپولوژی تعریف شده روی مجموعهٔ Q به‌وسیلهٔ عملگر R، همان $\tau'^\alpha(Q)$ است.

اثبات: کافی است نشان دهیم برای $Q' \subseteq Q$ و $\alpha \in B$، $R^\alpha(Q') = Q'$ اگر و تنها اگر $P^\alpha(Q') = Q'$. ابتدا فرض کنید $P^\alpha(Q') = Q'$. آن‌گاه

$$q \in Q' \Rightarrow P^\alpha(q) \subseteq P^\alpha(Q')$$
$$\Rightarrow q \in R^\alpha(Q') \Rightarrow R^\alpha(Q') = Q'$$

برعکس، فرض کنید $R^\alpha(Q') = Q'$. آن‌گاه برای $q \in R^\alpha(Q')$، $p \in Q'$ وجود دارد به‌طوری‌که $q \in P^\alpha(p)$. چون $p \in Q' = R^\alpha(Q')$، $P^\alpha(p) \subseteq Q'$ و در نتیجه $q \in Q'$. بنابراین $P^\alpha(Q') \subseteq Q'$ و از این‌رو $P^\alpha(Q') = Q'$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله اتوماتای فازی عمومی را بر اساس تکوارهٔ مشبکهٔ مرتب بررسی کردیم. خواص هم‌بندی و تفکیک‌پذیری را بررسی کردیم و توپولوژی‌های به‌دست آمده روی مجموعه حالت‌های اتوماتای مذکور را معرفی کردیم. در آینده مفاهیم جبری و توپولوژیکی دیگری را بر اساس تکوارهٔ مشبکهٔ مرتب برای اتوماتای فازی عمومی ارائه می‌دهیم.

منابع

1. Abolpour Kh., Zahedi M. M., "Isomorphism between two BL-general fuzzy automata", Soft Computing, 16 (2012) 729-736.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

2. Abolpour Kh., Zahedi M. M., "BL-general fuzzy automata and accept behavior", Journal of Applied Mathematics and Computing 38 (2012) 103-118.

3. Abolpour Kh., Zahedi M. M., "General fuzzy Automata Based on Complete Residuated Lattice-Valued", Iranian Journal of Fuzzy Systems 14 (2017) 103-121.

4. Das P., "A fuzzy topology associated with a fuzzy finite state machine", Fuzzy Sets and Systems 105 (1999) 469-479.

5. Doostfatemeh M., Kremer S. C., "New directions in fuzzy automata", International Journal of Approximate Reasoning 38 (2005)175-214.

6. Guo X., "Grammar theory based on lattice-order monoid", Fuzzy Sets and Systems 160 (2009)1152-1161.

7. Ignjatovi´c J., ´Ciric M., Bogdanovi´c S., "Determinization of fuzzy automata with membership values in complete residuated lattices", Information Sciences 178 (2008) 164-180.

8. Jun Y. B., "Intuitionistic fuzzy finite state machines", Journal of Applied Mathematics and Computing 17 (2005) 109-120.

9. Jun Y. B., "Intuitionistic fuzzy finite switchboard state machines", Journal of Applied Mathematics and Computing 20 (2006) 315-325.

10. Jun Y. B., "Quotient structures of intuitionistic fuzzy finite state machines", Information Sciences 177 (2007) 4977-4986.

11. Kim Y. H., Kim J. G., Cho S. J., "Products of T-generalized state machines and T-generalized transformation semigroups", Fuzzy Sets and Systems 93 (1998) 87-97.

12. Kumbhojkar H. V., Chaudhri S. R., "On proper fuzzification of fuzzy finite state machines", International Journal of Fuzzy Mathematics 4 (2008) 1019-1027.

13. Li Y., Pedrycz W., "Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice-orderd monoids", Fuzzy Sets and Systems 156 (2005) 68-92.

14. Lihua W., Qiu D., "Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: Reduction and minimization", Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 1635-1656.

15. Malik D. S., Mordeson J. N., Sen M. K., "Submachines of fuzzy finite state machine", Journal of Fuzzy Mathematics 2 (1994) 781-792.

16. Mordeson J. N., Malik D. S., "Fuzzy automata and languages: theory and applications", London/Boca Raton: Chapman and Hall/CRC (2002).

17. Qiu D., "Characterizations of fuzzy finite automata", Fuzzy Sets and Systems 141(2004) 391-414.

18. Qiu D., "Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic (I)", Science in China 44 (2001) 419-429.

19. Qiu D., "Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic (II)", Science in China 45 (2002) 442-452.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]

20. Santos E. S., "Maximin automata", Information and Control 12 (1968) 367-377.

21. Srivastava A. K., Tiwari S. P., "A topology for fuzzy automata", Proceedings of the International Conference on Fuzzy Systems. Lecture Notes in Artificial Intelligance, Springer-verlag, 2275 (2002) 485- 490.

22. Srivastava A. K., Tiwari S. P., "On relationships among fuzzy approximation operators, fuzzy topology, and fuzzy automata", Fuzzy Sets and Systems 138 (2003) 197-204.

23. Tiwari S. P., Srivastava A. K., "On a decomposition of fuzzy automata", Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 503-511.

24. Wee W. G., "On generalizations of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification", Ph. D. Thesis, Purdue University (1967).

25. Willard S., "General topology", Reading, MA: Addison-Wesley (1972).

26. Xing H., Qiu D., Liu F., Fan Z., "Equivalence in automata theory based on complete residuated lattice-valued logic", Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1407-1422.

27. Ying M. S., "Automata theory based on quantum logic (I)", International Journal of The oretical Physics 39 (2000) 981-991.

28. Zadeh L. A., "Fuzzy sets", Information and Control 8 (1965) 338-353.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.177]