**مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول به‌روی حلقه‌های پولبک**

فرخنده فرضعلی پور[[1]](#footnote-1) و پیمان غیاثوند

دانشگاه پیام نور، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، تهران، ایران

**چکیده**

 هدف اصلی اين مقاله دسته‌بندی همه مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول به‌روی حلقه‌های پولبک از دو دامنه ددکيند و بيان ارتباط بين مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول و مدول‌های انژکتيو محض روی چنين حلقه‌هايی است. ابتدا، مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول را معرفی و آنها را روی دامنه‌های ددکيند موضعی دسته‌بندی می‌کنيم. سپس، همه مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذير جداپذير را به‌دست‌می‌آوريم و با استفاده از آنها مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذير جداناپذير را مورد بررسی قرار می‌دهيم.

**واژه‌های کلیدی:** دامنه ددکيند، حلقه پولبک، مدول جداپذير، مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول

**رده‌بندی موضوعی (2010**): 13C13، 05C13، 70D16

1. **مقدمه و پیش‌نیازها**

 يکی از اهداف نظريه نمايش مدرن حل مسائل دسته‌بندی زير رسته $C$ از مدول‌ها روی حلقه‌های يکدار است که در دو مرحله انجام‌پذير است: مرحله اول، دسته‌بندی همه مدول‌های تجزيه‌ناپذير در $C$ و مرحله دوم، کاهش دسته‌بندی مدول‌ها $C$ به مرحله اول است. متاسفانه، در اکثريت قريب به اتفاق حلقه‌ها، دسته‌بندی مدول‌های دلخواه غيرممکن است. به‌عنوان مثال، دسته‌بندی مدول‌های انژکتيو محض تجزيه‌ناپذير با تاپ متناهی‌البعد روی $R/rad(R)$ (برای هر مدول $M$ روی يک حلقه $R$، تاپ آن را $M/rad(R)M$ تعريف می‌کنيم) روی حلقه پولبک تشکيل شده از دو دامنه ددکيند $R\_{1}$ و $R\_{2}$ روی يک ميدان $\overbar{R}$ به‌سختی انجام می‌شود. مدول‌های انژکتيو محض از نظر تئوری، مدل هستند. به‌عنوان مثال، دسته‌بندی نظريه‌های کامل $R$-مدول‌ها به مدول‌های انژکتيو محض کاهش می‌يابد. همچنين، برای برخی حلقه‌ها، مدول‌های کوچک (با بعد متناهی، بامولد متناهی، ...) دسته‌بندی می‌شوند و در بسياری موارد، اين دسته‌بندی می‌تواند به دسته‌بندی مدول‌های انژکتيو محض توسيع داده شود. در واقع، يک ارتباط قوی بين مدول‌های انژکتيو محض با مولد متناهی و خانواده‌های مدول‌های بامولد متناهی است. بنابراين مطالعه مدول های انژکتیو محض اهمیت زیادی دارد ([13]، [18] و [19]). يک بخش از اين مقاله، معرفی يک زيردسته از مدول‌های انژکتيو محض است.

 فرض کنيد $v\_{1}:R\_{1}⟶\overbar{R}$ و $v\_{2}:R\_{2}⟶\overbar{R}$ يک همريختی از دو دامنه ددکيند موضعی $R\_{i}$ به ازای $i=1,2 $ به‌روی يک ميدان مشترک $\overbar{R}$ باشد. حلقه پولبک $R=\{(r\_{1},r\_{2})\in R\_{1}⊕R\_{2}:v\_{1}(r\_{1})=v\_{2}(r\_{2})\}$ را با $(R\_{1}\overset{v\_{1}}{⟶}\overbar{R}\overset{v\_{2}}{⟵}R\_{2})$ نشان می‌دهيم. برای $i=1,2$ هسته $ v\_{i}$ را با $P\_{i}$ نمايش می دهيم. لذا

$$Ker(R⟶\overbar{R})=P=P\_{1}×P\_{2},R/P≅\overbar{R}≅R\_{1}/P\_{1}≅R\_{2}/P\_{2}$$

و $P\_{1}P\_{2}=P\_{2}P\_{1}=0$ (بنابراين $R$ يک دامنه نيست). بعلاوه، برای $i\ne j$، $0⟶P\_{i}⟶R⟶R\_{j}⟶0$ يک دنباله دقيق از $R$-مدول‌ها است ([14]). در اين مقاله، کلاس جديدی از مدول‌ها که مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول خوانده می‌شود را معرفی می‌کنيم (تعريف 5.2)، و آن را از نکته نظر دسته‌بندی مورد مطالعه قرار می‌دهيم. فرض کنيد $R$ يک حلقه پولبک از دو دامنه ددکيند روی يک ميدان مشترک باشد. هدف اصلی اين مقاله، شرح کاملی از $R$-مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذير است.

دسته‌بندی به دو مرحله تقسيم می‌شود: همه $R$-مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداپذير تجزيه‌ناپذير را بيان می‌کنيم و سپس با استفاده از اين مدول‌ها، نشان می‌دهيم که مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذيرجداناپذير با تاپ متناهی‌البعد جمع مستقيم تعداد متناهی از مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذيرجداپذير هستند.

 حال تعاريف و نمادهای مورد استفاده در سراسر اين مقاله را بيان می‌کنيم. در اين مقاله همه حلقه‌ها‌ جابجايی و يکدار و همه مدول‌ها يکانی هستند. فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در ابتدای مقدمه باشد. يک $R$-مدول $S$ جداپذير گفته می‌شود هرگاه $R\_{i}$-مدول‌های $S\_{i}$ به ازای $i=1,2$ موجود باشند به‌طوری‌که $S$ يک زيرمدول $S\_{1}⊕S\_{2}$ باشد. به‌عبارتی، $S$ جداپذير است اگر آن يک پولبک از $R\_{1}$-مدول و يک $R\_{2}$-مدول باشد به‌عبارتی، با استفاده از نماد يکسان برای حلقه‌های پولبک خواهیم داشت $S=(S/P\_{2}S⟶S/PS⟵S/P\_{1}S)$ [14] و $S⊆(S/P\_{2}S)⊕(S/P\_{1}S)$. همچنين، $S$ جداپذير است اگر‌ و ‌‌تنها‌ اگر $P\_{1}S∩P\_{2}S=0$ [14]. اگر $R$ يک حلقه پولبک باشد، آنگاه هر $R$-مدول يک تصوير همريخت يک $R$-مدول جداپذير است، در حقيقت هر $R$-مدول يک نمايش مينيمال دارد: يک نمايش جداپذير از يک $R$-مدول $M$ يک همريختی $φ=(S\overset{f}{⟶}S'⟶M)$ از $R$-مدول‌ها است که $S$ جداپذير است و اگر $φ$ يک تجزيه $φ:S\overset{f}{⟶}S'⟶M$ با $S'$ جداپذير داشته باشد، آنگاه $f$ يک به يک است. مدول $K=Ker(φ)$ يک $\overbar{R}$-مدول است، چون $\overbar{R}=R/P$ و $PK=0$ [13]. يک دنباله دقيق $0⟶K⟶S⟶M⟶0$ از $R$-مدول‌ها با $S$ جداپذير و $K$ يک $\overbar{R}$-مدول، يک نمايش جداپذير از $M$ است اگر ‌و ‌‌‌تنها ‍‍‌اگر برای هر $i$، $P\_{i}S∩K=0$ و $K⊆PS$ (گزاره 3.2 از [14])، هر مدول $M$ يک نمايش جداپذير دارد، که در حد يکريختی يکتا است (قضيه 8.2 از [14]). بعلاوه، $R$-همريختی‌ها با نمايش جداپذير، حافظ برويختی‌ها و تکريختی‌ها هستند. (قضيه 6.2 از [16]).

**تعريف 1.1**  (الف) فرض کنيد $R$ يک حلقه و $N$ يک زيرمدول $R$-مدول $M$ باشد. ايده‌آل $\{r\in R:rM⊆N\}$ را با $(N:M)$ نمايش می‌دهيم و $(0:M)$ را پوچساز $M$ گوييم.

(ب) يک زيرمدول سره $N$ از يک $R$-مدول $M$ را اوليه ( به‌ترتیب، اول) گوييم، هرگاه برای هر $ r\in R$ $m\in M و $ که $rm\in N$، آنگاه $m\in N$ يا $r^{n}\in (N:M)$ ($m\in N$ يا $r\in (N:M)$). بنابراين $ Rad(N:M)=P$ ($(N:M)=P'$) يک ايده‌آل اول $R$ است و $N$ یک زيرمدول $P$-اوليه (به‌ترتیب،$P'$-اول) گفته می‌شود. مجموعه همه زيرمدول‌های اوليه (به‌ترتیب، اول) $M$ با $ pSpec(M)$ (به‌ترتیب، $Spec\left(M\right)$) نمايش داده می‌شود [17].

(پ) ايده‌آل سره $I$ از يک حلقه جابجايی $R$ را نيم‌اول گوييم، هرگاه برای هر $a\in R$ و هر عدد صحيح مثبت $k$ که $a^{k}\in I$، آنگاه داشته باشیم $a\in I$ [8].

(ت) زيرمدول سره $N$ از يک $R$-مدول $M$ را نيم‌اول گوييم، هرگاه برای هر $، a\in R$ $m\in M$و $k\in N$ که $a^{k}m\in N$، آنگاه $am\in N$. مجموعه تمام زيرمدول‌های نيم‌اول $M$ را با نماد $seSpec(M)$ نمايش می‌دهيم [8].

(ث) يک $R$-مدول $M$ را هم‌ضربی گوييم، هرگاه به ازای هر زيرمدول $N$ از $M$، يک ايده‌آل $I$ از $R$ موجود باشد به‌قسمی‌که $N=(0:\_{M}I)$. در اين حالت، داريم $N=(0:\_{M}ann(N))$ [1].

(ج) يک $R$-مدول $M$ را هم‌ضربی ضعيف گوييم، هرگاه $Spec(M)=∅$ يا به ازای هر زيرمدول اول $N$ از $M$، يک ايده‌آل $I$ از $R$ موجود باشد به‌قسمی‌که $N=(0:\_{M}I)$ [9].

(چ) $R$-مدول $M$ را هم‌ضربی اوليه گوييم، هرگاه $pSpec(M)=∅$ يا به ازای هر زيرمدول اوليه $N$ از $M$، يک ايده‌آل $I$ از $R$ موجود باشد به‌قسمی‌که $N=(0:\_{M}I)$ [10].

(ح) $R$-مدول $M$ را هم‌ضربی نيم‌اول گوييم، هرگاه $seSpec(M)=∅$ يا به ازای هر زيرمدول نيم‌اول $N$ از $M$، يک ايده‌آل $I$ از $R$ موجود باشد به‌قسمی‌که $N=(0:\_{M}I)$ [8].

(خ) زيرمدول $N$ از يک $R$-مدول $M$ را يک زيرمدول محض گوييم، هرگاه هر سيستم متناهی از معادله‌ها روی $N$ که حل‌پذير روی $M$ باشد، روی $N$ نيز حل‌پذير است. زيرمدول $N$ از يک $R$-مدول $M$ را يک زيرمدول نسبتاً تقسيم‌پذير (يا $RD$-زيرمدول) گوييم، هرگاه برای هر $r\in R$، $rN=N∩rM$ [18, 19].

(د) $R$-مدول $M$ را انژکتيو محض گوييم، هرگاه خاصيت انژکتيو را روی همه دنباله‌های دقيق محض داشته باشد [18, 19].

**نتیجه 1.2**  (الف) فرض کنيد $R$ يک دامنه ددکيند، $M$ يک $R$-مدول و $N$ يک زيرمدول $M$ باشد. دراين‌صورت $N$ در $M$ محض است اگر ‌و ‌‌تنها ‌اگر برای هر ايده‌آل $I$ از $R$، $IN=N∩IM$ [19].

(ب) فرض کنيد $N$ يک $R$-زيرمدول $M$ باشد. واضح است که $N$ يک $RD$-زيرمدول $M$ است اگر ‌و‌‌ تنها‌ اگر برای هر $m\in M$ و $r\in R$؛ $rm\in N$ نتيجه می‌گيريم $rm=rn$ که در آن $n\in N$. بعلاوه، اگر $M$ يک مدول بدون تاب باشد، آنگاه $N$ يک $RD$-زيرمدول است اگر و تنها اگر برای هر $m\in M$ و هر $r\in R$ $rm\in N ،$آنگاه $m\in N$. در اين حالت، $N$ يک $RD$-زيرمدول است اگر ‌و تنها ‌اگر $N$ يک زيرمدول اول باشد [19].

**2. مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول به‌روی يک دامنه ددکيند موضعی**

 هدف اصلی اين بخش دسته‌بندی مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول به‌روی يک دامنه ددکيند موضعی است. ابتدا، خاصيت‌های اساسی مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول را مورد بررسی قرار می‌دهيم.

**تعريف 2.1**  فرض کنيد $R$ يک حلقه جابجايی و $M$ يک $R$-مدول باشد. يک زيرمدول سره $N$ از $M$، شبه‌نيم‌اول گفته می‌شود، هرگاه $(N:M)$ يک ايده‌آل نيم‌اول $R$ باشد. مجموعه همه زيرمدول‌های شبه‌نيم‌اول $R$-مدول $M$ را با نماد $qsSpec(M)$ نشان می‌دهيم.

يک $R$-مدول $M$ را شبه‌نيم‌اول گوييم، هرگاه زيرمدول صفر آن يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول باشد. واضح است که هر زيرمدول اول يک زيرمدول نيم‌اول است و هر زيرمدول نيم‌اول يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول است. ولی عکس آن‌ها برقرار نيست. مثال‌های زير این نتایج را تایید می‌کنند:

**مثال 2.2**  $Z$-مدول $M=Z×Z$ و زيرمدول $N=<(4,0)>$ از $M$ را در نظر بگيريد. در اين‌صورت $(N:M)=0$ يک ايده‌آل نيم‌اول $Z$ است و بنابراين $N$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول است. اما $N$ يک زيرمدول نيم‌اول نيست، زيرا $2^{2}(1,0)\in N$ ولی $2(1,0)N$.

**مثال 3.2**  $Z$-مدول $M=Z\_{30}$ را در نظر بگيريد. فرض کنيد $N=<6>$ يک زيرمدول $M$ باشد. در اين‌صورت $N$ يک زيرمدول ‌نيم‌اول $M$ است، اما $N$ يک زيرمدول اول $M$ نيست.

**گزاره 4.2**  فرض کنيد $M$ يک $R$-مدول باشد. در اين‌صورت عبارت‌های زير برقرارند:

(1) فرض کنيد $K⊂N$ زيرمدول‌های $M$ باشند. در اين‌صورت $N$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ است اگر و تنها اگر $N/K$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M/K$ باشد.

(2) اگر $N$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ باشد، آنگاه $M/N$ يک $R$-مدول شبه‌نيم‌اول است.

اثبات: واضح است.

**تعريف 5.2**  فرض کنيد $R$ يک حلقه جابجايی باشد. $R$-مدول $M$ را يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول گوييم، هرگاه $qsSpec(M)=∅$ يا برای هر زيرمدول شبه‌نيم‌اول $N$ از $M$، يک ايده‌آل $I$ از $R$ موجود باشد به‌طوری‌که $N=(0:\_{M}I)$.

به آسانی ديده می‌شود که اگر $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول باشد، آنگاه برای هر زيرمدول شبه‌نيم‌اول $N$ خواهيم داشت $N=(0:\_{M}ann(N))$.

**لم 6.2**  فرض کنيد $M$ يک $R$-مدول، $N$ يک زيرمدول سره $M$ و $I$ يک ايده‌آل $R$ به قسمی ‌باشد که $I⊂(0:M)$. در اين‌صورت:

(1) فرض کنيد $I⊆J$. در اين‌صورت $J$ يک ايده‌‌آل نيم‌اول $R$ است اگر و تنها اگر $J/I$ يک ايده‌آل نيم‌اول $R/I$ باشد.

(2) $N$ يک $R$-زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ است اگر و تنها اگر $N$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $R/I$-مدول $M$ باشد.

(3) $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است اگر و تنها اگر $M$ يک $R/I$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول باشد.

اثبات: (1) بديهی است.

(2) واضح است که $(N:\_{R}M)/I=(N:\_{R/I}M)$. لذا حکم از قسمت (1) برقرار است.

(3) چون $(0:N)/I=(0:\_{R/I}N)$، لذا حکم برقرار است.

**لم 7.2**  فرض کنيد $M$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول روی يک حلقه جابجايی $R$ باشد. در اين‌صورت گزاره‌های زير برقرارند:

(1) اگر $N$ يک زيرمدول محض $M$ باشد، آنگاه $M/N$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است.

(2) هر جمعوند مستقيم $M$، يک $R$-مدول شبه‌نيم‌اول هم‌ضربی است.

اثبات: (1) فرض کنيد $K/N$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M/N$ باشد. لذا با توجه به گزاره 4.2، $K$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ است، بنابراين يک ايده‌آل $I$ از $R$ موجود است به‌طوری‌که $K=(0:\_{M}I)$. نشان می‌دهيم $K/N=(0:\_{M/N}I)$. فرض کنيد $x+N\in K/N$. بنابراين $xI=0$، لذا داریم $I(x+N)=0$، درنتيجه $x+N\in (0:\_{M/N}I)$. حال فرض کنيد $y+N\in (0:\_{M/N}I)$. در اين‌صورت $Iy⊆N∩IM=IN⊆IK=0$. بنابراين $y\in K$، و لذا $K/N=(0:\_{M/N}I)$.

(2) چون هر جمعوند مستقيم $M$ يک زيرمدول محض است، لذا حکم بنا به (1) برقرار است.

**لم 8.2**  فرض کنيد $R$ و $R'$ حلقه‌های جابجايی، $f:R\rightarrow R'$ يک همريختی پوشا و $M$ يک $R'$-مدول باشد. در اين‌صورت گزاره‌های زير برقرارند:

(1) اگر $M$ يک $R$-مدول شبه‌نيم‌اول باشد، آنگاه $M$ يک $R'$-مدول شبه‌نيم‌اول است.

(2) اگر $N$ يک $R$-زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ باشد، آنگاه $N$ يک $R'$-زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ است.

(3) اگر $M$ يک $R'$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول باشد، آنگاه $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است.

اثبات: (1) واضح است.

(2) چون $M/N$ يک $R$-مدول شبه‌نيم‌اول است، پس بنا به (1)، $M/N$ يک $R'$-مدول شبه‌نيم‌اول است. بنابراين $N$ يک $R'$-زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ است.

(3) فرض کنيد $N$ يک $R$-زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ باشد. در اين‌صورت بنا به (2)، $N$ يک $R$-زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ است. لذا ايده‌آل $I'$ از $R'$ موجود است به‌طوری‌که $N=(0:\_{M}I')$. قرار دهيد $I=f^{-1}(I')$. بنابراين $I$ يک ايده‌آل $R$ است و $f(I)=f(f^{-1}(I'))=I'$؛ پس $(0:\_{M}I)=(0:\_{M}f(I))=(0:\_{M}I')=N$. درنتيجه $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است.

**مثال 9.2**  (۱) فرض کنید $R$یک دامنه ددکیند موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $P=Rp$ باشد. $M=R$ را به‌عنوان $R$-مدول در نظر بگيريد. برای يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $P$ از $R$ داريم $(0:\_{R}(0:\_{R}P))=R$. بنابراين $M=R$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول نيست.

(2) فرض کنيد $R$ يک دامنه ددکيند موضعی با ايده‌آل ماکسيمال $P=Rp$ باشد. با توجه به لم 6.2 از [3]، هر زيرمدول غير صفر $L$ از $E=E(R/P)$, انژکتيو هال $R/P$، به فرم $L=A\_{n}=(0:\_{E}P^{n})$ ($n\geq 1$) است و $L=A\_{n}=Ra\_{n}$ و $PA\_{n+1}=A\_{n}$. بنابراين $E(R/P)$ يک $R$-مدول هم‌ضربی است و لذا يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول می‌باشد.

(3) فرض کنيد $R$ يک دامنه ددکيند با ايده‌آل ماکسيمال $P=Rp$ باشد. $R$-مدول $Q(R)$ (ميدان خارج قسمتی $R$) را در نظر بگيريد. بنا به لم 6.2 از [3]، برای هر زيرمدول ناصفر $L$ از $Q(R)$، $(L:Q(R))=0$ يک ايده‌آل نيم‌اول (اول) $R$ است. لذا هر زيرمدول ناصفر $Q(R)$، شبه‌نيم‌اول است. اگر $Q(R)$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول باشد، آنگاه برای هر زيرمدول ناصفر شبه‌نيم‌اول $N$ داريم $N=(0:\_{Q(R)}ann(N))$. به آسانی ديده می‌شود که $ann(N)=0$. بنابراين $N=Q(R)$ که اين يک تناقض است. پس $Q(R)$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول نيست. چون $seSpec(Q(R))=\{0\}$، پس $Q(R)$ يک مدول هم‌ضربی نيم‌اول است. لذا يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول لزوماً يک مدول هم‌ضربی نيم‌اول نيست.

 بنابراين کلاس مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول شامل کلاس مدول‌های هم‌ضربی نيم‌اول و کلاس مدول‌های هم‌ضربی نيم‌اول شامل کلاس مدول‌های هم‌ضربی ضعيف است.

**تذکر 10.2**  اگر $R$ يک دامنه ددکيند با ايده‌آل ماکسيمال $P$ باشد و $p\in P\P^{2}$، آنگاه ايده‌آل توليد شده توسط $p$ برابر $P$ است. لذا برای هر $n$، $P^{n}=p^{n}R$. به‌علاوه، هر عنصر ناصفر $R$ به شکل $up^{m}$ است که در آن $u$ يک عنصر يکه است. همچنين، اگر $u$ يک عنصر يکه در $R$ باشد، آنگاه برای هر عدد صحيح مثبت $n$، $P^{n}=uP^{n}$. درنتيجه $\{0,P,P^{2},…\}$ مجموعه‌ی همه ايده‌آل‌های سره $R$ است.

**لم 11.2**  فرض کنيد $R$ يک دامنه ددکيند با ايده‌آل ماکسيمال $P=Rp$ باشد. در اين‌صورت اگر $I$ يک ايده‌آل نيم‌اول $R$ باشد، آنگاه $I=0$ يا $I=P$.

**اثبات**: ايده‌آل‌های $0$ و $P$ نيم‌اول (اول) هستند. اگر $I=P^{n}$ با $n\geq 2$, آنگاه $p^{n}\in I$ اما $pI$. لذا برای هر $n\geq 2$، $P^{n}$ يک ايده‌آل نيم‌اول نيست.

**قضيه 12.2**  فرض کنيد $R$ يک دامنه ددکيند با ايده‌آل ماکسيمال $P=Rp$ باشد. در اين‌صورت مدول‌های زير، **تنها** مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذير هستند.

(1) $ R/P^{n}$ ($n\geq 1$)؛

(2) $E(R/P)$، انژکتيو هال $R/P$.

**اثبات**: ابتدا توجه کنيد که هر يک از اين مدول‌ها باتوجه به گزاره 3.1 از [2]، تجزيه‌ناپذير هستند. چون برای $1\leq i\leq n$، $P^{i}/P^{n}=(0:\_{R/P^{n}}P^{n-i})$ پس $ R/P^{n}$ ($n\geq 1$) يک مدول هم‌ضربی است ([7])، بنابراين يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است. بنا به مثال 9.2، $E(R/P)$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است. حال نشان می‌دهيم که این‌ها تنها $R$-مدل‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول هستند. فرض کنيد $M$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذير باشد و $a\in M$ يک عنصر ناصفر دلخواه باشد. ارتفاع $a$ را به‌صورت $h(a)=sup\{n|a\in P^{n}M\}$ تعريف می‌کنيم. لذا $h(a)$ يک عدد صحيح ناصفر است يا برابر با بی‌نهایت است. به‌علاوه، $(0:a)=\{r\in R|ra=0\}$ يک ايده‌آل به فرم $P^{n}$ يا $0$ است. اگر $(0:a)=P^{n+1}=p^{n+1}R$ با $n+1\geq 2$، آنگاه $(0:p^{n}a)=P$و $p^{n}a\ne 0$، لذا می‌توان $a$ را طوری انتخاب کرد که $(0:a)=P$ يا $(0:a)=0$. اکنون حالت‌های مختلفی برای $h(a)$ و $(0:a)$ در نظر می‌گيريم.

حالت اول: اگر $qsSpec(M)=∅$ آنگاه $Spec(M)⊆qsSpec(M)$. بنابراین $M$ يک $R$-مدول تاب‌دار تقسيم‌پذير با $PM=M$ است و بنا به لم 3.1 و گزاره 4.1 از [17]، $M$ با مولد متناهی نيست. پس می‌توان فرض کرد $(0:a)=P$. با توجه به حالت دوم گزاره 7.2 از [3]، $M≅E(R/P)$. حال می‌توان فرض کرد $qsSpec(M)\ne ∅$.

حالت دوم: اگر $h(a)=n$، آنگاه $(0:a)=P$. (فرض خلف) فرض کنيد $(0:a)=0$. فرض کنيد $a=p^{n}b$. در اين‌صورت $rb=0$ نتيجه می‌دهد $ra=0$ و پس $r=0$. لذا $Rb≅R$. بنا به حالت اول قضيه 12.2 از [5]، $Rb$ يک زيرمدول محض $M$ است. بنا به قضيه 10 از [12]، $M$ يک $R$-مدول بدون‌تاب است، پس با توجه به نتیجه 1.2، $Rb$ يک زيرمدول اول (شبه‌نيم‌اول) است. لذا $Rb≅R/P^{n+1}$. چون $Rb$ يک زيرمدول محض $M$ است، پس بنا به قضيه 5 از [12]، $Rb$ يک جمعوند $M$ می‌باشد، در نتيجه $M≅Rb≅R/P^{n+1}$.

حالت سوم: $و h(a)=\infty $ $(0:a)=P$. مشابه حالت چهارم قضيه 12.2 از [3]، به ‌دست می‌آوريم $M≅E(R/P)$. لذا بنا به مثال 9.2، $qsSpec(M)=∅$ که اين يک تناقض است.

حالت چهارم: $و h(a)=\infty $ $(0:a)=0$. در اين‌صورت مشابه حالت سوم قضيه 12.2 از [3]، خواهيم داشت $M≅Q(R)$ و اين با مثال 9.2 تناقض دارد.

**3. مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداپذير**

 در اين بخش، همه $R$-مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول را تعيين می‌کنيم به‌طوری که

$$R=(R\_{1}\overset{v\_{1}}{⟶}\overbar{R}\overset{v\_{2}}{⟵}R\_{2}) (\*)$$

يک حلقه پولبک با دو دامنه ددکيند موضعی $R\_{2},R\_{1}$ به‌ترتيب با ايده‌آل‌های ماکسيمال $P\_{2},P\_{1}$ که با $p\_{2},p\_{1}$ توليد می‌شوند است و $P\_{1}⊕P\_{2}$ را با $P$ نمايش می‌دهيم و همچنين $R\_{1}/P\_{1}≅R\_{2}/P\_{2}≅R/P≅\overbar{R}$ يک ميدان است. در اين‌صورت $R$ يک حلقه جابجايی نوتری موضعی با ايده‌آل ماکسيمال $P$ است. به آسانی ديده می‌شود که $P\_{1}⊕0$ و $0⊕P\_{2}$ ايده‌آل‌های اول ديگر $R$ هستند.

 فرض کنيد $r=(a,b)\in R$ با این شرط که $a\ne 0$ و $b\ne 0$. لذا اعداد صحيح مثبت $m ,n$ وجود دارند به‌طوری‌که $a=(p\_{1}^{n},p\_{2}^{m})$، پس $ann(a)=0$، لذا $Ra≅R$. اگر $a=(0,p\_{2}^{m})$ که در آن $m$ يک عدد صحيح مثبت است، آنگاه $ann(a)=P\_{1}⊕0$ و بنابراين $R(0,p\_{2}^{m})≅R/(P\_{1}⊕0)≅R\_{2}$. به‌علاوه ، $R(p\_{1}^{n},0)≅R/(0⊕P\_{2})≅R\_{1}$. ايده‌آل های ديگر $R$ به فرم $I=P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m}=(<p\_{1}^{n}>,<p\_{2}^{m}>)$ هستند (صفحه 4045 از [3]).

**یادآوری 1.3**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بیان شده در (\*) باشد. همچنین فرض کنيد $T$ يک $R$-زيرمدول، مدول جداپذير $S=(S\_{1}\overset{f\_{1}}{⟶}\overbar{S}\overset{f\_{2}}{⟵}S\_{2})$ با تابع های پوشا $π\_{i}:S\rightarrow S\_{i}$ باشد. قرار دهيد $T\_{1}=\{t\_{1}\in S\_{1}:∃t\_{2}\in S\_{2};(t\_{1},t\_{2})\in T\}$ و همچنين $T\_{2}=\{t\_{2}\in S\_{2}:∃t\_{1}\in S\_{1};(t\_{1},t\_{2})\in T\}$. برای هر $،i$ $T\_{i}$ $،i=1,2$ يک $R\_{i}$-زيرمدول $S\_{i}$ و $T\leq T\_{1}⊕T\_{2}$. به‌علاوه، تابع $π'\_{1}=π\_{1}|T:T\rightarrow T\_{1}$ را با ضابطه $π'\_{1}(t\_{1},t\_{2})=t\_{1}$ تعريف می‌کنيم. بنابراين

$$T\_{1}≅T/(0⊕Ker\left(f\_{2}\right))∩T≅T/(T∩P\_{2}S)≅(T+P\_{2}S)/P\_{2}S⊆S/P\_{2}S.$$

لذا می‌توان $T\_{1}$ را به عنوان زيرمدولی از $S\_{1}$ فرض کرد. به طور مشابه، می‌توان $T\_{2}$ را زيرمدولی از $S\_{2}$ فرض کرد [9]. توجه کنيد که $Ker(f\_{1})=P\_{1}S\_{1}$ و $Ker(f\_{2})=P\_{2}S\_{2}$.

**لم 2.3**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت ايده‌آل‌های $0$, $ ،P\_{1}⊕0$ $0⊕P\_{2}$و $P\_{1}⊕P\_{2}$ نيم‌اول هستند.

**اثبات**: فرض کنيد $(a,b)^{n}\in \{0\}$ که در آن $(a,b)\in R$ و $n\in N$. لذا $a^{n}=0$ و $b^{n}=0$. بنابراين $a=0$ و $b=0$؛ زيرا $0$ ايده‌آل نيم‌اول $،R\_{i}$ $i=1,2 $است. پس $0$ ايده‌آل نيم‌اول $R$ است. از اين که $ P\_{1}⊕0$، $ 0⊕P\_{2}$و $P\_{1}⊕P\_{2}$ ايده‌آل‌های اول هستند، پس نيم‌اول می باشند.

**گزاره 3.3**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت گزاره‌های زير برقرارند:

(1) اگر $T$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول يک $R$-مدول ناصفر جداپذير $S=(S/P\_{2}S=S\_{1}\overset{f\_{1}}{⟶}\overbar{S}\overset{f\_{2}}{⟵}S/P\_{1}S=S\_{2})$ باشد، آنگاه $T\_{1}$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S\_{1}$ و $T\_{2}$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S\_{2}$ است.

(2) اگر $L\_{1}$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S\_{1}$ باشد، آنگاه يک زيرمدول جداپذير $T$ از $S$ وجود دارد که $T+(0⊕P\_{2})S$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S$ است.

(3) اگر $L\_{2}$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S\_{2}$ باشد، آنگاه يک زيرمدول جداپذير $T'$ از $S$ وجود دارد که $T'+(P\_{1}⊕0)S$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S$ است.

**اثبات**: (1) فرض کنيد $a\_{1}^{n}\in (T\_{1}:\_{R\_{1}}S\_{1})⊆P\_{1}$ که در آن $a\_{1}\in R\_{1}$ و $n\in N$. در اين‌صورت $(a\_{1}^{n},0)\in R$ زيرا $v\_{1}(a\_{1}^{n})=0=v\_{2}(0)$. فرض کنيد $(s\_{1},s\_{2})\in S$. چون $a\_{1}^{n}s\_{1}\in P\_{1}S\_{1}∩T\_{1}$ و $0\in P\_{2}S\_{2}∩T\_{2}$ و همچنین $f\_{1}(a\_{1}^{n}s\_{1})=0=f\_{2}(0)$ پس $(a\_{1}^{n},0)(s\_{1},s\_{2})\in T$. بنابراين $(a\_{1},0)^{n}\in (T:\_{R}S)$ و لذا $(a\_{1},0)\in (T:\_{R}S)$ زيرا $(T:\_{R}S)$ يک ايده‌آل نيم‌اول $R$ است. در نتيجه $a\_{1}\in (T\_{1}:\_{R\_{1}}S\_{1})$. بنابراين $T\_{1}$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S\_{1}$ است. به طور مشابه، $T\_{2}$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S\_{2}$ است.

(2) اگر $L\_{1}$ يک زيرمدول ناصفر شبه‌نيم‌اول $S\_{1}$ باشد، آنگاه يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول جداپذير $T=(T\_{1}⟶\overbar{T}⟵T\_{2})$ از $S$ موجود است که $T\_{1}=L\_{1}$. بنا به یادآوری 1.3، $T\_{1}≅(T+(0⊕P\_{2})S)/(0⊕P\_{2})S⊆S/(0⊕P\_{2})S$. بنابراين $(T+(0⊕P\_{2})S)/(0⊕P\_{2})S$ زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S/(0⊕P\_{2})S$ است. لذا بنا به گزاره 4.2، $T+(0⊕P\_{2})S$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S$ است.

(3) مشابه اثبات (۲) است.

**گزاره 4.3**  فرض کنيد $S=(S/P\_{2}S=S\_{1}\overset{f\_{1}}{⟶}\overbar{S}=S/PS\overset{f\_{2}}{⟵}S\_{2}=S/P\_{1}S)$ يک مدول جداپذير روی حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت $qsSpec(S)=∅$ اگر و تنها اگر برای هر $i=1,2$، $qsSpec(S\_{i})=∅$.

**اثبات**: برای اثبات لزوم فرض کنيد $qsSpec(S)=∅$ و $π$ تابع پوشا از $R$ به $R\_{i}$ باشد. فرض کنيد $qsSpec(S\_{1})\ne ∅$ و $T\_{1}$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S\_{1}$ باشد، لذا بنا به گزاره 4.2، $T\_{1}≅T/(0⊕P\_{2})S$ يک $R$-زيرمدول$S/(0⊕P\_{2})S≅S\_{1}$ است، بنابراين $T\in qsSpec(S)$ و $qsSpec(S)\ne ∅$ که اين تناقض است. به ‌طور مشابه، $qsSpec(S\_{2})=∅$. با توجه به گزاره 3.3 (1)، اثبات کفايت برقراراست.

**قضيه 5.3**  فرض کنيد $S=(S/P\_{2}S=S\_{1}\overset{f\_{1}}{⟶}\overbar{S}=S/PS\overset{f\_{2}}{⟵}S\_{2}=S/P\_{1}S)$ يک مدول جداپذير روی حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت $S$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است اگر و تنها اگر برای $i=1,2$، $S\_{i}$ يک $R\_{i}$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است.

**اثبات**: بنابه گزاره 4.3، $qsSpec(S)=∅$ اگر و تنها اگر برای $i=1, 2$، $qsSpec(S\_{i})=∅$. بنابراين می‌توان فرض کرد $qsSpec(S)\ne ∅$. فرض کنيد $S$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول باشد و فرض کنيد $L$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول ناصفر $S\_{1}$ باشد. بنا به گزاره 3.3 (2)، يک زيرمدول $T=(T\_{1}\rightarrow \overbar{T}\leftarrow T\_{2})$ از $S$ موجود است به قسمی که $L=T\_{1}$ و همچنین $T'=T+(0⊕P\_{2})S$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S$ است. واضح است که

$ann(T')=ann(T)∩ann((0⊕P\_{2})S)=0$ يا $ann(T')=P\_{1}^{n}⊕0$

که در آن $n$ يک عدد صحيح مثبت است. چون $S=(0:\_{S}0)$ و $S$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است، به ‌دست ‌می‌آوريم $T'=(0:\_{S}P\_{1}^{n}⊕0)$. حال کافی است نشان دهيم $L=T\_{1}=(0:\_{S\_{1}}P\_{1}^{n})$. فرض کنيد $t\_{1}\in T\_{1}$. بنابراين $t\_{2}\in T\_{2}$ موجود است به‌طوری‌که $(t\_{1},t\_{2})\in T⊆T'$; لذا $(P\_{1}^{n}⊕0)(t\_{1},t\_{2})=0$. در نتيجه $T\_{1}⊆(0:\_{S\_{1}}P\_{1}^{n})$. برای اثبات عکس رابطه شمول، فرض کنيد $s\_{1}\in (0:\_{S\_{1}}P\_{1}^{n})$. در اين‌صورت يک عنصر $s\_{2}\in S\_{2}$ موجود است به‌طوری‌که $(s\_{1},s\_{2})\in S$ و همچنین $(P\_{1}^{n}⊕0)(s\_{1},s\_{2})=0$. لذا $(s\_{1},s\_{2})\in T'$ و $s\_{1}\in T\_{1}$ در نتيجه $L=T\_{1}=(0:\_{S\_{1}}P\_{1}^{n})$. بنابراين $S\_{1}$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است. به طور مشابه، $S\_{2}$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است. برعکس، فرض کنيد $S\_{1},S\_{2}$ هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول باشند و $T$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S$ باشد. بنابه گزاره3.3، $T\_{2 },T\_{1}$ به ترتيب، زيرمدول‌های شبه‌نيم‌اول $S\_{2} ,S\_{1}$ هستند. بنا به فرض، $T\_{1}=(0:\_{S\_{1}}P\_{1}^{n})$ و $T\_{2}=(0:\_{S\_{2}}P\_{2}^{m})$ که در آن $n,m$ اعدادصحيح مثبت هستند. لذا به راحتی می‌توان نشان داد $T=(0:\_{S}P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m})$. در نتيجه $S$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است.

**لم 6.3**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت $R$-مدول‌های جداپذير زير، مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذير هستند.

(1) $ S=(E(R\_{1}/P\_{1})⟶0⟵0)$ و $S=(0⟶0⟵E\left(R\_{2}/P\_{2}\right))$ که در آن $E(R\_{i}/P\_{i})$ يک $R\_{i}$-انژکتيو هال $R\_{i}/P\_{i}$ است.

(2) $S=(R\_{1}/P\_{1}^{n}⟶\overbar{R}⟵R\_{2}/P\_{2}^{m})$ به‌طوری‌که $m,n$ اعداد صحيح مثبت هستند.

**اثبات**: با استفاده از لم 8.2 از [2]، اين مدول ها تجزيه‌ناپذير هستند و با توجه به قضيه 12.2 و قضيه 5.3، هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول بودن اين مدول‌ها نتيجه می‌شود.

**قضيه 7.3**  فرض کنيد $S=(S/P\_{2}S=S\_{1}\overset{f\_{1}}{⟶}\overbar{S}=S/PS\overset{f\_{2}}{⟵}S\_{2}=S/P\_{1}S)$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداپذير تجزيه‌ناپذير روی حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت $S$ با يکی از مدول‌های بيان شده در لم 6.3 يکريخت است.

**اثبات**: فرض کنيد $S$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداپذير تجزيه‌ناپذير باشد. ابتدا فرض کنيد $S=PS$. در اين‌صورت بنابه لم 7.2 از [2]، $S=S\_{1}$ يا $S=S\_{2}$ و پس برای $i$ای $S\_{i}$ يک $R\_{i}$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذير است، چون $S=PS$ لذا از نوع (1) است. لذا می‌توان فرض کرد$S\ne PS $. بنابه قضيه 5.3، برای هر $i=1,2$، $S\_{i}$ يک $R\_{i}$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است. با توجه به ساختار مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول روی يک دامنه ددکيند موضعی (قضيه 12.2)، داریم $S\_{i}=R\_{i}/P\_{i}^{n}(n\geq 1)$ يا $S\_{i}=E(R\_{i}/P\_{i})$. چون $S$ تجزيه‌ناپذير است و $S/PS\ne 0$ برای هر $i=1 ,2$، $S\_{i}$، $R\_{i}$-مدول تاب‌دار تقسيم‌نا‌پذير است. در اين‌صورت اعداد صحيح مثبت $m ,n$ و $k$ وجود دارند به ‌طوری‌که $P\_{1}^{m}S\_{1}=0$ $P\_{2}^{k}S\_{2}=0 ،$و$P^{n}S=0$. فرض کنيد $t\in S$ و $o(t)$ کوچکترين عدد صحيح مثبت $l$ در نظر می‌گيريم به‌طوری‌که $P^{l}t=0$. اکنون $t\in S\_{1}∪S\_{2}$ با $\overbar{t}\ne 0$ را انتخاب می‌کنيم به‌طوری‌که $o(t)$ ماکسيمال است. يک $t=(t\_{1},t\_{2})$ وجود دارد به‌طوری‌که $o(t)=n$، $o\left(t\_{1}\right)=m$ و $o(t\_{2})=k$. در اين‌صورت برای $i=1,2$، $R\_{i}t\_{i}$ در $S\_{i}$ محض است (قضيه 9.2 از [2]). بنابراين $ R\_{1}t\_{1}≅R\_{1}/P\_{1}^{m}$ ($R\_{2}t\_{2}≅R\_{2}/P\_{2}^{k}$) يک جمعوند مستقيم $ S\_{1}$ ($S\_{2}$)است زيرا برای هر $i$، $R\_{i}t\_{i}$ انژکتيو محض است. چون $S\_{1}$ تجزيه‌ناپذير است، لذا $S\_{1}=R\_{1}t\_{1}≅R\_{1}/P\_{1}^{m}$ به‌طور مشابه، $S\_{1}=R\_{2}t\_{2}≅R\_{2}/P\_{2}^{k}$. حال فرض کنيد $\overbar{M}$، $\overbar{R}$-زيرفضای توليد شده توسط $\overbar{t}$ باشد. بنابراين $\overbar{M}≅\overbar{R}$. فرض کنيد $M=(R\_{1}t\_{1}=M\_{1}⟶\overbar{M}⟵M\_{2}=R\_{2}t\_{2})$. در اين‌صورت بنا به قضيه 5.3، $M$ يک $R$-زيرمدول $S$ است که هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است و لذا يک جمعوند مستقيم است؛ اين نتيجه می دهد که $S=M$ و $S$ از نوع مدول‌های بيان شده در (2) است (قضيه 9.2 از [2]).

**نتيجه 8.3**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت هر $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداپذير، انژکتيو محض است.

**اثبات**: بنابه قضيه 7.3 و لم 9.2 از [2] حکم برقرار است.

**4. مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير**

 حلقه پولبک بيان شده در اين بخش همان حلقه پولبک بيان شده در بخش قبل است. در اين بخش به بررسی مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير تجزيه‌ناپذير با تاپ متناهی‌البعد مي‌پردازيم. هر يک از اين مدول‌ها به وسيله آميختن تعداد متناهی مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول تجزيه‌ناپذير جداپذير به‌دست می‌آيد.

**گزاره 1.4**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت $E(R/P)$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير است.

**اثبات**: بنا به گزاره 4.2 از [7]، $E(R/P)$ يک مدول هم‌ضربی است. لذا بنا به صفحه 4053 از [2]، $E(R/P)$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير است.

**گزاره 2.4**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*)، $M$ يک $R$-مدول و $0⟶K⟶S⟶M⟶0$ يک نمايش جداپذير از $M$ باشد. در اين‌صورت $qsSpec(S)=∅$ اگر و تنها اگر $qsSpec(M)=∅$.

**اثبات**: فرض کنيد $qsSpec(S)=∅$ و $qsSpec(M)\ne ∅$. بنابراين با توجه به گزاره 4.2، $M≅S/K$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول مانند $T/K$ دارد به‌طوری‌که $T$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S$ است که اين يک تناقض است. حال فرض کنيد $qsSpec(M)=∅$ و $qsSpec(S)\ne ∅$. فرض کنيد $T$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول از $S$ باشد. لذا بنا به گزاره 4.3 از [7]، $K⊆T$ و در نتيجه $T/K$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ است و اين يک تناقض است.

**لم 3.4**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*)، $M$ يک $R$-مدول و $0⟶K⟶S⟶M⟶0$ يک نمايش جداپذير $M$ باشد. در اين‌صورت اگر $\left(0:\_{R}S\right)\in \{P\_{1}^{m}⊕0, 0⊕P\_{2}^{n}, 0\}$، آنگاه $M$ جداپذير است.

**اثبات**: با توجه به لم 4.2 از [5]، حکم برقرار است.

**گزاره 4.4**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) و $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير باشد. فرض کنيد $0⟶K\overset{i}{⟶}S\overset{φ}{⟶}M⟶0$ یک نمايش جداپذير $M$ باشد. اگر $N$ يک $R$-زيرمدول ناصفر $M$ باشد، آنگاه $M/N$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است.

**اثبات**: فرض کنيد $L/N$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M/N$ باشد. در اين‌صورت بنابه گزاره 4.2، $L$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $M$ است، لذا $L=(0:\_{M}ann(L))$. چون $ann(M)⊆ann(L)\ne 0$ و $M$ يک $R$-مدول جداناپذير است، با توجه به لم 3.4، اعداد صحيح مثبت $m,n$ موجودند به‌طوري‌که $ann(L)=P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m}$ (و همچنين اگر $ann(M)=0$ آنگاه $ann(S)⊆(K:\_{R}S)=ann(M)=0$). نشان می‌دهیم $،L/N=(0:\_{M/N}(P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m}))$ برای این منظور فرض کنيد $x+N\in L/N$. از این که $(P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m})x=0$ بنابراین خواهیم داشت $(P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m})(x+N)=0$ و در نتیجه داریم $x+N\in (0:\_{M/N}(P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m}))$. فرض کنيد $y+N\in (0:\_{M/N}(P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m}))$. لذا $(P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m})y⊆N⊆L$. ادعا می‌کنيم $(P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m})y=0$. فرض کنيد اين طور نباشد، يعنی $0\ne (P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m})y⊆L$. در اين‌صورت داریم $(P\_{1}^{2n}⊕P\_{2}^{2m})y=0$. فرض کنيد $t$ کوچکترين عدد صحيح مثبتی باشد که $P^{t}y=0$ (پس $P^{t-1}y\ne 0$). لذا $x\in S$ موجود است به‌طوری‌که $y=φ(x)$ و $φ(P^{t}x)=0$ پس $φ(P\_{1}^{t}x)=φ(P\_{2}^{t}x)=0$. بنا به گزاره 3.2 از [15]، $φ$ يک تابع يک‌به‌يک روی $P\_{i}S$ است، در نتيجه $P\_{2}^{t}x=P\_{1}^{t}x=0$ و $P^{t}x=0$. قرار دهيد $U=P^{t-1}y$. در اين‌صورت بنا به لم 1.3 از [4]، $0\rightarrow K\rightarrow φ^{-1}(U)=P^{t-1}x\rightarrow U\rightarrow 0$ يک نمايش جداپذير از $U$ است به قسمی که $K⊆P(P^{t-1}x)=0$ که اين يک تناقض است. لذا $(P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m})y=0$ و در نتيجه $L/N=(0:\_{M/N}(P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m}))$.

**قضيه 5.4**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) و $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير باشد. فرض کنيد$0⟶K\overset{i}{⟶}S\overset{φ}{⟶}M⟶0 $ يک نمايش جداپذير $M$ باشد. در اين‌صورت $S$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است اگر و تنها اگر $M$ يک مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است.

**اثبات**: بنا به گزاره 4.2، می‌توان فرض کرد $qsSpec(S)\ne ∅$. فرض کنيد $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول و $T$ يک زيرمدول شبه نيم‌اول ناصفر $S$ باشد. بنا به گزاره 4.3 از [7]، $K⊆T$، و بنابراين $T/K$ يک زيرمدول شبه‌نيم‌اول $S/K$ است. چون $M≅S/K$ هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است، لذا اعداد صحيح $m,n$ موجودند به‌طوري‌که $T/K=(0:\_{S/K}P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m})$. با توجه به قضيه 4.4 از [7] نتيجه می‌گيريم $T=(0:\_{S}P\_{1}^{n}⊕P\_{2}^{m})$ و لذا $S$ هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است. برعکس، اگر $S$ هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول باشد، آنگاه بنا به گزاره 4.4، $M≅S/K$ هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است و اثبات کامل است.

**گزاره 6.4**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (1) و $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير تجزيه‌ناپذير و $M/PM$ با تاپ متناهی‌البعد روی $\overbar{R}$ باشد. اگر $0⟶K⟶S⟶M⟶0$ يک نمايش جداپذير $M$ باشد، آنگاه $S$ تاپ متناهی‌البعد دارد و انژکتيو محض است.

**اثبات**: بنا به گزاره 6.2 قسمت $(i)$ از [2]، $S/PS≅M/PM$, پس $S$ تاپ متناهی‌البعد دارد. لذا حکم از قضيه 5.4 و نتيجه 8.3 به‌دست می‌آيد.

**گزاره 7.4**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) و $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير تجزيه‌ناپذير باشد و همچنين $0⟶K\overset{i}{⟶}S\overset{φ}{⟶}M⟶0$ يک نمايش جداپذير از $M$ باشد. در اين‌صورت $\overbar{S}=0$.

**اثبات**: (فرض خلف) فرض کنيد $\overbar{S}\ne 0$. بنا به قضيه 5.4، $S$ هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است، لذا $S$ از نوع (2) قضيه 6.3 است که تجزيه‌ناپذير هستند. پس عدد صحيح $m$ای موجود است به‌طوري‌که $P^{m}S=0$و بنابراين خواهيم داشت $P^{m}M=0$. اگر $m=1$، آنگاه $(P\_{1}⊕0)M⊆PM=0$ و بنابراین $(P\_{1}⊕0)M∩(0⊕P\_{2})M=0$ که اين يک تناقض است. لذا فرض کنيد $m\geq 2$ و $k$ کوچکترين عدد صحيح مثبتی باشد که $P^{k}M=0$ (پس $P^{k-1}M\ne 0$). لذا برای هر $x\in S$، $φ(P^{k}x)=0$. بنابراين $φ(P\_{1}^{k}x)=φ(P\_{2}^{k}x)=0$. از طرفي بنا بر گزاره 3.2 از [11]، $φ$ يک ‌به ‌يک روی $P\_{i}S$ است، لذا داريم $P\_{1}^{k}x=P\_{2}^{k}x=0$. پس $P^{k}x=0$ و بنابراين $P^{k}S=0$. قرار دهيد $N=P^{k-1}M$. در اين‌صورت بنا به لم 1.3 از [4]، $0⟶K⟶φ^{-1}(N)=P^{k-1}S⟶N⟶0$ نمايش جداپذير روی $N$ است. لذا $K⊆PP^{k-1}S=P^{k}S=0$ و اين تناقض دارد با اين که $M$ جداناپذير است و در نتيجه $\overbar{S}=0$.

 براي بيان قضيه زير نياز به مطالبی هست که در ادامه شرح مي‌دهيم. فرض کنيد $M$ يک $R$-مدول و

$$0⟶K\overset{i}{⟶}S\overset{φ}{⟶}M⟶0$$

يک نمايش جداپذير $M$ باشد. اگر $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير باشد، آنگاه بنابه قضيه 4.5، $S$ هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول است. در اين حالت خواهیم داشت $،S=S\_{1}⊕S\_{2}$ که در آن $S\_{i}$ از نوع (1) قضيه 6.3 است. در هر نمايش جداپذير $0⟶K\overset{i}{⟶}S\overset{φ}{⟶}M⟶0$، هسته تابع $φ$ با $P$ پوچ می‌شود، لذا مشمول در $soc(S)$ است. بنابراين $M$ از آميختن سوکول‌های جمعوندهای مستقيم $S$ به‌دست ‌می‌آيند. فرض کنيد $M$ يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير تجزيه‌ناپذيز باشد و فرض کنيد $φ$ يک نمايش جداپذير $M$ باشد. بنا به گزاره 1.4، مدول‌های با طول متناهی مابين جمعوندهای $S$ اتفاق نمی افتند، $S=S\_{1}⊕S\_{2}$ که در آن $S\_{i}$ از نوع (1) قضيه 6.3 است. اگر دو مدول از نوع (1) وجود داشته باشد، آنگاه مولدهای آن‌ها نمی‌توانند توسط $P\_{i}$ پوچ شوند. اين تناقض دارد با وجود دو کپی از $P\_{1}$-پروفر و دو کپی از $P\_{2}$-پروفر، پس $S\_{1}$، $P\_{1}$-پروفر و $S\_{2}$، $P\_{2}$-پروفر است. واضح است که در حقيقت، مدول‌هايی که از اين آميختن به‌دست‌ می‌آيند، $E(R/P)$انژکتيو هال $R/P$ است که بنا به گزاره 1.4، يک $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير تجزيه‌ناپذير است. در نتيجه قضيه زير را داريم:

**قضيه 8.4** فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت تنها $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير تجزيه‌ناپذير $E(R/P)$ است.

**نتيجه 9.4**  فرض کنيد $R$ حلقه پولبک بيان شده در (\*) باشد. در اين‌صورت هر $R$-مدول هم‌ضربی شبه‌نيم‌اول جداناپذير تجزيه‌ناپذير، انژکتيو محض است.

**اثبات**: با توجه به قضيه 5.3 از [2] و قضيه 8.4 حکم برقرار است.

**منابع**

1. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F., The dual notion of multiplication modules, Taiwanese J. Math., 11(4) (2007) 1189-1201.

2. Ebrahimi Atani S., On pure-injective modules over pullback rings, Comm. Algebra, 28 (2000) 4037-4069.

3. Ebrahimi Atani S., On secondary modules over Dedekind domains, Southeast Asian Bull. Math., 25(25) (2001) 1-6.

4. Ebrahimi Atani S., On secondary modules over pullback rings, Comm. Algebra, 30 (2002) 2675-2685.

5. Ebrahimi Atani S., Indecomposable weak multiplication modules over Dedekind domains, Demonstratio Math., 41 (2008) 33-43.

6. Ebrahimi Atani S., Dolati Pish Hesari S., Khoramdel M., Sedghi Shanbeh Bazari M., Absorbing comultiplication modules over a pullback ring, Int. Electron. J. Algebra, 24 (2018) 31-49.

7. Ebrahimi Atani R., Ebrahimi Atani S., Comultiplication modules over a pullback of Dedekind domains, Czechoslovak Math. J., 59 (2009) 1103-1114.

8. Ebrahimi Atani R., Ebrahimi Atani S., On semiprime comultiplication modules over pullback rings, Colloquium Math., 146(2) (2016) 1-15.

9. Ebrahimi Atani R., Ebrahimi Atani S., Weak comultiplication modules over a pullback of commutative local Dedekind domains, Algebra and Discrete Mathematics, 1 (2009) 1-13.

10. Ebrahimi Atani S., Esmaeili Khalil Saraei F., Indecomposable primary comultiplication modules over a pullback of two Dedekind domains, Colloquium Math., 120 (2010) 23-42.

11. Klingler L., Integral representation of groups of square-free order, J. Algebra, 129 (1990) 26-74.

12. Kaplansky I., Modules over Dedekind rings and valuation rings, Trans. Amer. Math. Soc., (1952) 327-340.

13. Kielpiniki R., On $Γ$-pure-injective modules, Bull. Acad. Sci. Math., 15 (1967) 127-131.

14. Levy L.S., Modules over pullbacks and subdirect sums, J. Algebra, 71 (1981) 50-61.

15. Levy L.S., Modules over Dedekind-like rings, J. Algebra, 93 (1985) 1-116.

16. Levy L.S., Mixed modules over $ZG$, $G$, cyclic of prime order, and over related Dedekind pullback, J. Algebra, 71 (1981) 62-114.

17. McCasland R.L., Moore M.E., Smith P.F., On the spectrum of a module over a commutative ring, Comm. Algebra,25(1) (1997) 79-103.

18. Prest M., Model Theory and Modules, Cambridge: London Mathematical Society, Cambridge University Press, 1988.

19. Warfield R.B., Purity and algebraic compactness for modules, Pacific J. Math., 28 (1969) 699-719.

1. f\_farzalipour@pnu.ac.irنویسنده مسئول [↑](#footnote-ref-1)