

## تعمیم جدیدی برای توزیع وایبل معکوس

علی دوست‌مرادی\*، محمدرضا زادکرمی؛ دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه آمار  
ولی بهرامی؛ دانشگاه علامه طباطبایی، تهران

پذیرش ۹۴/۷/۲۲

دریافت ۹۴/۱/۲۵

### چکیده

میزان شکست از مفاهیم مهم در نظریه قابلیت اعتماد است. در این مقاله به ارائه توزیعی جدید چهار پارامتری بر مبنای توزیع وایبل معکوس می‌پردازیم. توزیع جدید به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها شامل پنج نرخ شکست نزولی، صعودی، وان شکل، تک نما و صعودی نزولی صعودی و همچنین تابع چگالی توزیع جدید نیز دومی است. در این مقاله گشتاور مرکزی، تابع چگالی آماره‌های ترتیبی، پارامتر قابلیت اعتماد، ماتریس اطلاع، مشاهده، محاسبه و از روش ماکزیم درست‌نمایی برای برآورد پارامترها استفاده شده است. با استفاده از دو مثال کاربردی به برتری توزیع پیشنهادی در مقایسه با توزیع‌های دیگر می‌پردازیم.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع وایبل معکوس، توزیع تعمیم یافته وایبل اصلاح شده، تابع نرخ شکست، گشتاورها، برآورد ماکزیم درست‌نمایی

### مقدمه

توزیع وایبل به‌علت داشتن نرخ شکست ثابت، نزولی و صعودی نقش مهمی در آنالیز داده‌های طول عمری ایفا می‌کند. با بسط توزیع وایبل، توزیع‌های جدیدی معرفی شده، که شامل میزان شکست‌های غیریک‌نوا می‌شود، و به‌عنوان رقیبی برای توزیع‌های دو پارامتری طول عمر رایج مانند وایبل، گاما و لگ‌نرمال هستند. از جمله این تعمیم‌ها می‌توان به توزیع‌هایی با نرخ شکست وان شکل هاپتا و اسکابل [۷]، توزیع‌های جدید بر مبنای وایبل راجارشی و راجارشی [۱۵]، توزیع وایبل نمایی مادهولکر و همکاران [۱۳]، توزیع وایبل تعمیم یافته ذی و لای [۱۹]، ذی و همکاران [۲۰]، توزیع دو پارامتری با نرخ شکست صعودی و وان شکل برای طول عمر چن [۵]، توزیع وایبل اصلاح شده لای و همکاران [۱۰]، توزیع رایلی تعمیم یافته کاندو و راکاب [۸]، توزیع بسط وایبل بیبینگتون و همکاران [۲]، توزیع وایبل اصلاح شده سارهان و زیندین [۱۶]، توزیع تعمیم یافته وایبل کاراسکو و همکاران [۴]، توزیع بتا وایبل اصلاح شده سیلوا و همکاران [۱۷] و توزیع تعمیم یافته وایبل معکوس فیلیپی و همکاران [۱۶] می‌توان اشاره کرد. در میان سایر نویسندگان فام و لای [۱۴] مرور خوبی بر توزیع‌های وایبل داشتند. در این مقاله به معرفی یک توزیع چهار پارامتری جدید بر مبنای توزیع کالر و کامت [۹] تحت عنوان تعمیم جدید توزیع وایبل معکوس می‌پردازیم. شکل تابع چگالی توزیع جدید علاوه بر نزولی و تک‌مدی، دومی نیز هست، همچنین تابع نرخ شکست‌های نزولی، صعودی، وان شکل تک نما و صعودی نزولی صعودی که این امر به انعطاف‌پذیری توزیع جدید افزوده است.

در این مقاله ابتدا به معرفی توزیع جدید، تابع بقا، تابع نرخ شکست، تابع گشتاور مرکزی، تابع چگالی آماره‌های ترتیبی، پارامتر قابلیت اعتماد و برآورد پارامترها به روش ماکزیمم درست‌نمایی می‌پردازیم و با استفاده از دو مثال کاربردی توزیع جدید را با برخی توزیع‌های تعمیم یافته و ایبل مقایسه می‌کنیم.

### تعمیم جدید توزیع و ایبل معکوس

کالر و ماکت توزیع و ایبل معکوس  $IW(\alpha, \gamma)$  را بدین صورت معرفی کردند:

$$F(t) = e^{-\alpha t^{-\gamma}}, \quad \alpha > 0, \gamma > 0, t > 0$$

شکل تابع چگالی آن نزولی، تک‌مدی و شکل تابع نرخ شکست آن نزولی و تک‌نما است. توزیع جدید که بر مبنای توزیع کالر و ماکت است با عنوان تعمیم جدید توزیع و ایبل معکوس  $GIW(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$  بدین صورت تعریف می‌کنیم:

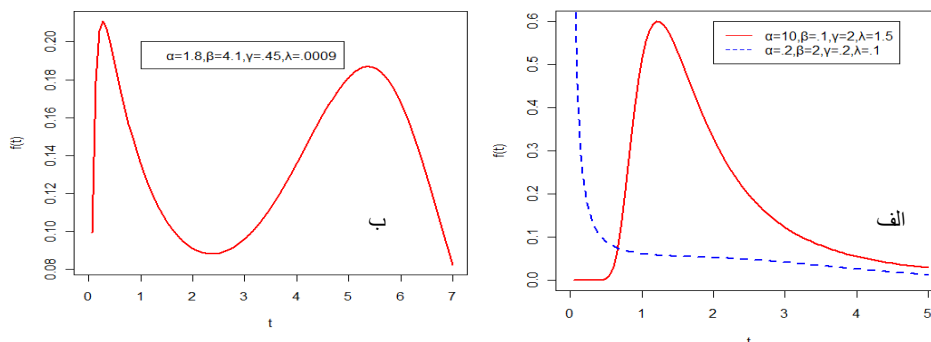
$$F(t) = e^{-\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^{\beta}}}, \quad \alpha > 0, \gamma > 0, \lambda > 0, \beta > 0, t > 0$$

تابع چگالی توزیع GIW بدین صورت است:

$$f(t) = (\alpha \gamma t^{-\gamma-1} e^{-\lambda t^{\beta}} + \alpha \beta \lambda t^{\beta-\gamma-1} e^{-\lambda t^{\beta}}) e^{-\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^{\beta}}}, \quad t > 0 \quad (1)$$

که در آن  $\alpha$  و  $\lambda$  پارامترهای مقیاس و  $\beta$  و  $\gamma$  پارامتر شکل هستند.

شکل هندسی تابع چگالی توزیع جدید علاوه بر نزولی و تک‌مدی، دومی نیز می‌شود. همچنین شکل هندسی تابع نرخ شکست توزیع جدید علاوه بر نزولی و تک‌نما، صعودی، وان شکل، صعودی نزولی صعودی را نیز شامل می‌شود. در شکل ۱ فرم‌های مختلف تابع چگالی برای مقادیر انتخابی پارامترها رسم شده است.



شکل ۱. تابع چگالی احتمال توزیع GIW برای مقادیر مختلف پارامترها، الف) تابع چگالی نزولی و تک‌نما، ب) تابع چگالی دومی

تابع بقا توزیع GIW بدین صورت به دست می‌آید:

$$S(t) = 1 - F_T(t) = 1 - e^{-\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^{\beta}}}, \quad t > 0$$

تابع نرخ شکست توزیع GW نیز بدین صورت است:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{(\alpha \gamma t^{-\gamma-1} e^{-\lambda t^{\beta}} + \alpha \beta \lambda t^{\beta-\gamma-1} e^{-\lambda t^{\beta}}) e^{-\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^{\beta}}}}{1 - e^{-\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^{\beta}}}}$$

شکل هندسی نرخ شکست تجربی داده‌ها بر اساس تبدیل TTT که بارلو و کامپو [۳] معرفی کردند، را رسم کردیم که کاربرد آن نوع نرخ شکست داده‌ها را مشخص می‌کند. تابع توزیع GIW دارای شکل‌های متنوع تابع

1. Inverse Weibull distribution  
2. Generalized Inverse Weibull distribution

نرخ شکست، از جمله نزولی، صعودی، وان شکل، تکنما و صعودی نزولی صعودی است. شکل ۲ تابع نرخ شکست توزیع GIW به ازای مقادیر مشخصی از پارامترهای مختلف را نشان می‌دهد.

### تابع گشتاور مرکزی

گشتاور مرکزی مرتبه  $r$  ام توزیع GIW بدین صورت به دست می‌آید:

$$\mu'_r = E(T^r) = \int_0^\infty t^r f(t; \theta) dt = \int_0^\infty t^r (\alpha \gamma t^{-\gamma-1} e^{-\lambda t^\beta} + \alpha \beta \lambda t^{\beta-\gamma-1} e^{-\lambda t^\beta}) e^{-\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^\beta}} dt \quad (2)$$

با جای‌گذاری رابطه  $e^{-\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^\beta}} = \sum_{i=0}^\infty \frac{(-\alpha)^i t^{-i\gamma} e^{-i\lambda t^\beta}}{i!}$  در (۲) داریم:

$$\mu'_r = \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i \alpha^{i+1}}{i!} \int_0^\infty (\gamma t^{r-\gamma(i+1)-1} e^{-(\lambda+i\lambda)t^\beta} + \beta \lambda t^{r+\beta-\gamma(i+1)-1} e^{-(\lambda+i\lambda)t^\beta}) dt \quad (3)$$

با فرض  $t^\beta = x$  داریم  $dt = \frac{x^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta} dx$  آن‌گاه رابطه (۳) را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\mu'_r = \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i \alpha^{i+1}}{i! \beta} \int_0^\infty \left( \gamma x^{\frac{r-\gamma(i+1)}{\beta}-1} e^{-(\lambda+i\lambda)x} + \beta \lambda t^{\frac{r+\beta-\gamma(i+1)}{\beta}-1} e^{-(\lambda+i\lambda)x} \right) dx$$

در نتیجه تابع گشتاور مرکزی مرتبه  $r$  ام توزیع GIW برابر است با:

$$\mu'_r = \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i \alpha^{i+1}}{i! \beta \gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{r-\gamma(i+1)}{\beta}\right)}{(\lambda+i\lambda)^{\frac{r-\gamma(i+1)}{\beta}}} + \lambda \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i \alpha^{i+1}}{i!} \frac{\Gamma\left(\frac{r+\beta-\gamma(i+1)}{\beta}\right)}{(\lambda+i\lambda)^{\frac{r+\beta-\gamma(i+1)}{\beta}}}$$

### تابع چگالی آماره‌های ترتیبی

تابع چگالی  $i$  امین آماره ترتیبی  $X_{i:n}$  توزیع  $GIW(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$  در نمونه تصادفی در اندازه  $n$  برای  $i = 1, \dots, n$  برابر است با:

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(t) F(t)^{i-1} (1-F(t))^{n-i}$$

که  $B(i, n-i+1)$  تابع بتا است با جای‌گذاری داریم.

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} (\alpha \gamma t^{-\gamma-1} e^{-\lambda t^\beta} + \alpha \beta \lambda t^{\beta-\gamma-1} e^{-\lambda t^\beta}) e^{-\alpha(i-1)t^{-\gamma} e^{-\lambda t^\beta}} (1 - e^{-\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^\beta}})^{n-i} \quad (4)$$

با جای‌گذاری بسط دو جمله‌ای  $(1 - e^{-\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^\beta}})^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k e^{-k\alpha t^{-\gamma} e^{-\lambda t^\beta}}$  در رابطه (۴) تابع

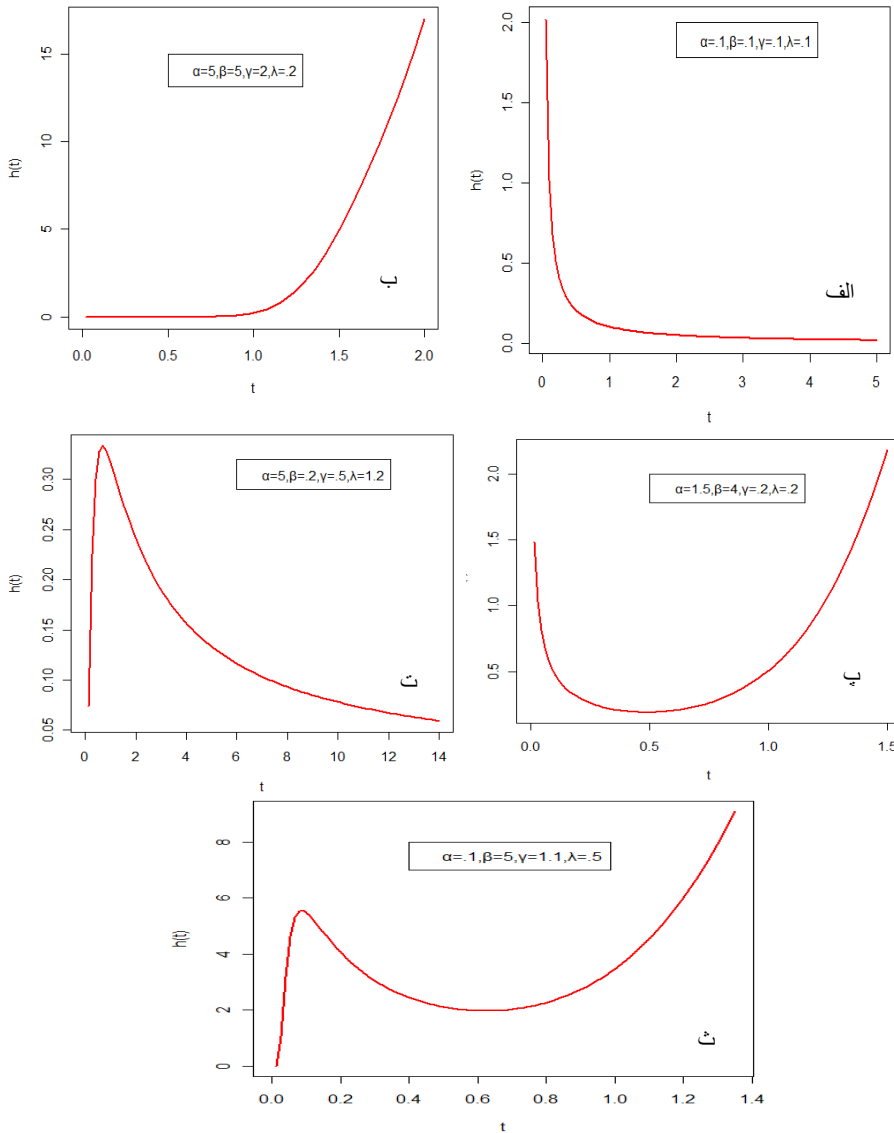
چگالی آماره‌های ترتیبی بدین صورت است:

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} (\alpha \gamma t^{-\gamma-1} e^{-\lambda t^\beta} + \alpha \beta \lambda t^{\beta-\gamma-1} e^{-\lambda t^\beta}) \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k e^{-\alpha(i-1+k)t^{-\gamma} e^{-\lambda t^\beta}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-i} W_{i,k} f_{i+k-1}(t)$$

که در آن  $f_{i+k-1}(t) \sim GIW((i+k-1)\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$  و وزن‌ها  $W_{i,k}$  بدین صورت است:

$$W_{i,k} = \frac{(-1)^k \binom{n-1}{k}}{(i+k-1)B(i, n-i+1)}$$



شکل ۲. نمودار تابع نرخ شکست توزیع GIW (الف)، تابع نرخ شکست نزولی، (ب) تابع نرخ شکست صعودی، (پ) تابع نرخ شکست وان شکل، (ت) تابع نرخ شکست تک نما، (ث) تابع نرخ شکست صعودی نزولی

### پارامتر قابلیت اعتماد

فرض کنید  $X \sim GIW(\alpha_1, \beta, \gamma, \lambda)$  و  $Y \sim GIW(\alpha_2, \beta, \gamma, \lambda)$  به طوری که  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند و پارامتر قابلیت اعتماد بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 p(Y < X) &= \int_0^{\infty} f_X(x)F_Y(x)dx \\
 &= \int_0^{\infty} (\alpha_1\gamma t^{-\gamma-1}e^{-\lambda t^\beta} + \alpha_1\beta\lambda t^{\beta-\gamma-1}e^{-\lambda t^\beta})e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t^{-\gamma}e^{-\lambda t^\beta}} dx \\
 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}
 \end{aligned}$$

چنان‌که مشاهده می‌شود پارامتر قابلیت اعتماد به پارامترهای  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\lambda$  بستگی ندارد.

### برآورد ماکزیمم درست‌نمایی

فرض کنید  $T_i$  متغیری تصادفی با بردار پارامتر  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda)^T$  است. بر اساس نمونه تصادفی  $t_1, \dots, t_n$  لگاریتم تابع درست‌نمایی عبارتست از:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln(\alpha\gamma t_i^{-\gamma-1}e^{-\lambda t_i^\beta} + \alpha\beta\lambda t_i^{\beta-\gamma-1}e^{-\lambda t_i^\beta}) - \sum_{i=1}^n (-\alpha t_i^{-\gamma}e^{-\lambda t_i^\beta})$$

که با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درست‌نمایی بر حسب پارامترهای موجود این معادلات به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 l_\alpha(\theta) &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i^\gamma \exp(\lambda t_i^\beta)} \\
 l_\beta(\theta) &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda t_i^\beta}{\gamma + \beta\lambda t_i^\beta} - \lambda \sum_{i=1}^n t_i^\beta \log(t_i) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\beta\lambda t_i^\beta \log(t_i)}{\gamma + \beta\lambda t_i^\beta} + \frac{\alpha\lambda t_i^\beta \log(t_i)}{t_i^\gamma \exp(\lambda t_i^\beta)} \right) \\
 l_\gamma(\theta) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta\lambda t_i^\beta} \log(t_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log(t_i)}{t_i^\gamma \exp(\lambda t_i^\beta)} \\
 l_\lambda(\theta) &= \sum_{i=1}^n \frac{\beta t_i^\beta}{\gamma + \beta\lambda t_i^\beta} - \sum_{i=1}^n t_i^\beta + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha t_i^\beta}{t_i^\gamma \exp(\lambda t_i^\beta)}
 \end{aligned}$$

برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها از حل معادلات غیرخطی  $l_\lambda = 0, l_\beta = 0, l_\gamma = 0, l_\alpha = 0$  به‌دست می‌آید. اما معادلات درست‌نمایی فرم بسته‌ای ندارند و معادلات را باید با روش‌های عددی حل کرد. برای تشکیل فواصل اطمینان و انجام آزمون فرض در باره پارامترها نیاز به محاسبه ماتریس اطلاع داریم. با توجه به این‌که محاسبه ماتریس اطلاع مورد انتظار بسیار پیچیده و نیازمند محاسبه انتگرال‌ها به‌روش عددی است، می‌توان از ماتریس اطلاع مشاهده شده  $J(\hat{\theta})$  که بدین‌صورت به‌دست می‌آید استفاده کنیم.

$$J(\hat{\theta})^{-1} = - \begin{pmatrix} \widehat{L}_{\alpha\alpha} & \widehat{L}_{\alpha\beta} & \widehat{L}_{\alpha\gamma} & \widehat{L}_{\alpha\lambda} \\ \cdot & \widehat{L}_{\beta\beta} & \widehat{L}_{\beta\gamma} & \widehat{L}_{\beta\lambda} \\ \cdot & \cdot & \widehat{L}_{\gamma\gamma} & \widehat{L}_{\gamma\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \widehat{L}_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{\alpha}) & \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}) & \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \\ \cdot & \text{Var}(\hat{\beta}) & \text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) & \text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) \\ \cdot & \cdot & \text{Var}(\hat{\gamma}) & \text{Cov}(\hat{\gamma}, \hat{\lambda}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \text{Var}(\hat{\lambda}) \end{pmatrix}$$

برای نمونه‌هایی با اندازه بزرگ برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها،  $\hat{\theta} = (\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha})$ ، تحت شرایط نظم (لهمن وکسلا [۱۱]) دارای توزیع مجانبی نرمال چهار متغیره با میانگین  $\theta$  و ماتریس واریانس-کواریانس برابر عکس ماتریس اطلاع فیشر  $I(\theta)$  است. ماتریس اطلاع فیشر  $I(\theta)$  با گرفتن امید ریاضی از ماتریس اطلاع مشاهده شده  $J(\theta)$  به دست می‌آید، چون ماتریس اطلاع مورد انتظار بسیار پیچیده و نیازمند حل انتگرال‌ها به روش عددی است می‌توان آن را با  $J(\hat{\theta})$  جای‌گزین کرد. بنابراین توزیع مجانبی بدین صورت است:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim N_4 \left( 0, J(\hat{\theta})^{-1} \right) \quad (5)$$

از آزمون نسبت درست‌نمایی (LRT) می‌توان برای مقایسه توزیع GIW با زیر توزیع آن استفاده کرد، در این حالت می‌توانیم مقدارهای ماکزیمم درست‌نمایی را تحت محدودیت و غیرمحدودیت محاسبه کنیم. برای مثال آزمون  $H_0: \lambda = 0$  در مقابل  $H_1: \lambda \neq 0$  معادل با مقایسه توزیع IW با GIW است که آماره نسبت درست‌نمایی آن برابر است با:

$$W = 2\{l(\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}) - l(0, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})\}$$

$\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}$  برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها تحت فرض  $H_1$  و  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$  برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها تحت فرض  $H_0$  است.

### مثال‌های کاربردی

در این بخش دو مثال کاربردی برای مقایسه توزیع جدید با دیگر توزیع‌های معرفی شده برای داده‌های طول عمر تجزیه و تحلیل می‌شوند.

#### ۱. مثال اول

مؤسسه آموزشی و اصلاح بزهکاران کلمبیا در ابتکاری برای جلوگیری از تکرار جرم روشی روشن در مواجهه با این مشکل در جامعه استفاده کردند. این مؤسسه به‌طور اتفاقی تعدادی مجرم را با شرط تکرار نکردن جرم آزاد می‌کند. داده‌ها جدول ۱ زمان تکرار به جرم (به روز) ۵۱ مجرم هستند. این داده‌ها را استولماک و هریس<sup>۳</sup> (۱۹۷۴) [۱۸] تجزیه و تحلیل کردند. با برآش این توزیع‌ها به داده‌ها با استفاده از معیار اطلاع آکائیک (AIC<sup>۴</sup>) و معیار اطلاع بیزی (BIC<sup>۵</sup>) به مقایسه مدل‌های برآش شده با استفاده از این توزیع‌ها می‌پردازیم. برآورد پارامترها با استفاده از تابع `fminsearch` با نرم‌افزار متلب محاسبه شدند.

جدول ۱. داده‌های زمان تکرار به جرم

18	18	18	18	18	21	32	36	40	46	46	47	60	66	88	88	89	93	96
107	112	116	122	147	160	161	177	179	190	204	207	221	233	240	246			
247	264	267	272	283	291	301	307	320	337	343	362	362	367	396				
421																		

3. Stollmack and Harris  
4. Akaike Information Cnteria  
5. Bysian Information Cnteria

جدول ۲. چند توزیع تعمیم یافته بر پایه توزیع وایبل

توزیع	تابع چگالی
بتا وایبل اصلاح شده (BMW)، سیلوا و همکاران (۲۰۱۰)	$f(t) = \frac{1}{B(a,b)} G(t)^{a-1} \{1 - G(t)\}^{b-1} g(t), t > 0, a > 0, b > 0$ $G(t) = 1 - \text{exp}(-at^\gamma \exp(\lambda t)), t > 0, \alpha > 0, \gamma > 0, \lambda > 0$ $g(t) = at^{\gamma-1}(\gamma + \lambda t) \exp(\lambda t - at^\gamma \exp(\lambda t)),$
تعمیم وایبل اصلاح شده (GMW)، کاراسکو و همکاران (۲۰۰۸)	$f(t) = \frac{\alpha \beta t^{\gamma-1} (\gamma + \lambda t) \exp(\lambda t - at^\gamma \exp(\lambda t))}{\{1 - \text{exp}(-at^\gamma \exp(\lambda t))\}^{1-\beta}}, t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \gamma > 0, \beta > 0$
بتا وایبل (BW)، لی و همکاران (۲۰۰۷)	$f(t) = \frac{1}{B(a,b)} G(t)^{a-1} \{1 - G(t)\}^{b-1} g(t), t > 0, a > 0, b > 0$ $G(t) = 1 - \exp(-at^\gamma), \alpha > 0, \gamma > 0, \lambda > 0$ $g(t) = \alpha \gamma t^{\gamma-1} \exp(-at^\gamma)$
رایلی تعمیم یافته (GR)، کاندو و راکاب (۲۰۰۵)	$f(t) = 2\alpha \beta t \exp(-at^2) \{1 - \exp(-at^2)\}^{\beta-1}, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$
توزیع وایبل اصلاح شده (MW)، لای و همکاران (۲۰۰۳)	$f(t) = at^{\gamma-1}(\gamma + \lambda t) \exp(\lambda t - at^\gamma \exp(\lambda t))$
وایبل نمایی (EW)، مادهولکر و همکاران (۱۹۹۶-۱۹۹۵)	$f(t) = \alpha \beta \gamma t^{\gamma-1} \exp(-at^\gamma) \{1 - \exp(-at^\gamma)\}^{\beta-1}, t > 0, \alpha > 0, \gamma > 0, \beta > 0,$

جدول ۳. برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها

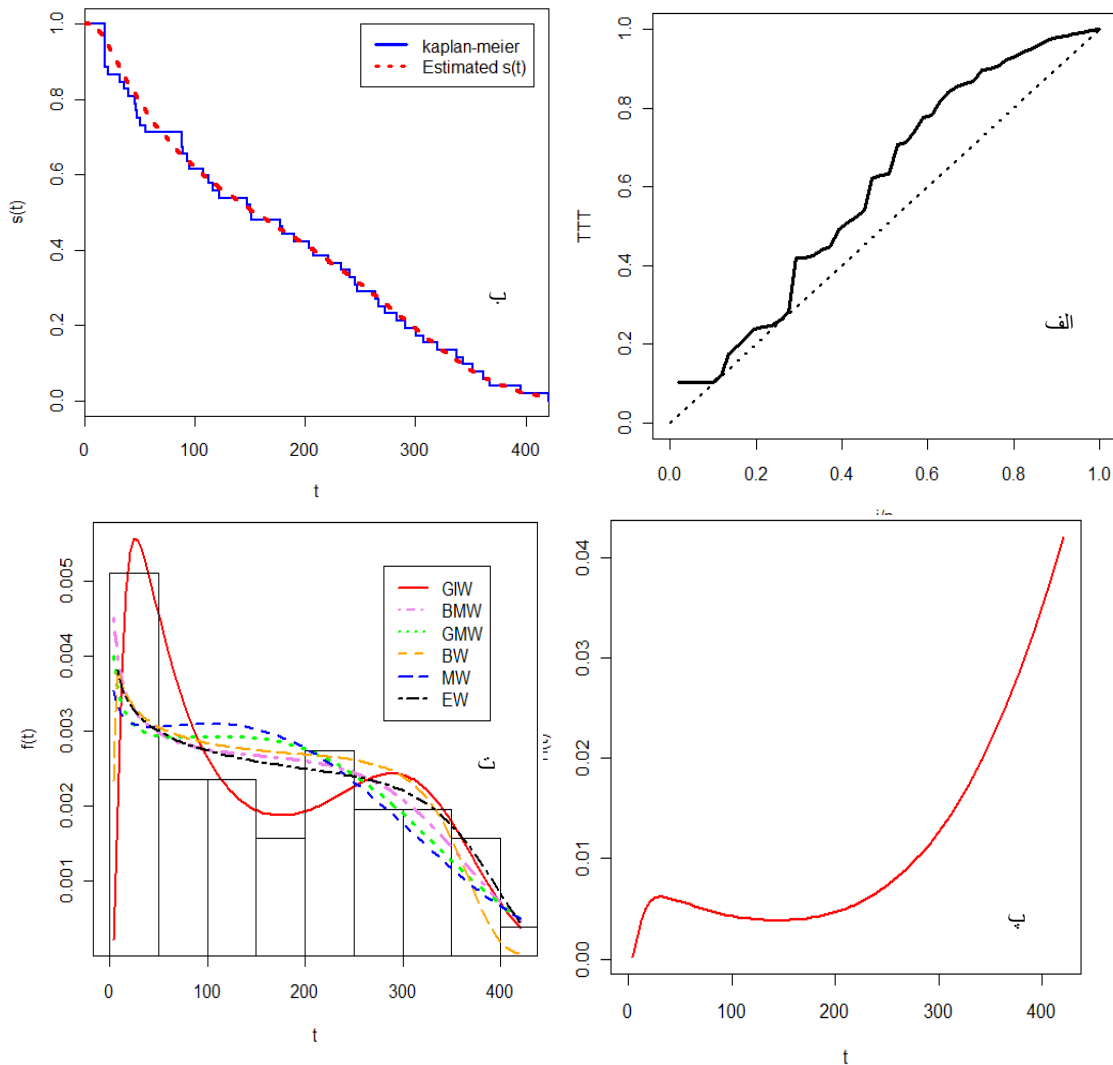
مدل	برآورد پارامترها							
	BIC	AIC	$\hat{b}$	$\hat{a}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$
GIW	620/9	616/3	-	-	4.6469 (1/3542)	2.34e-12 (1/88e-11)	0/69486 (0/1146)	23/8126 (10/809)
BMW	634/9	626/2	0/41130 (0/06743)	0/28476 (0/02714)	-	0/00197 (3/6e-3)	2/84030 (0/2043)	126e-9 (16/72e-9)
GMW	632/6	624/8	-	-	0/64238 (0/1766)	0/00348 (2/296-3)	1/4969 (0/38974)	888e-7 (1/996e-4)
BW	629/2	621/7	0/66448 (0/13746)	0/102030 (0/01612)	-	-	8/46334 (/00624)	3/03e-22 (79/2e-24)
MW	629/2	623/4	-	-	-	0/00310 (1/60e-3)	0/88731 (0/24308)	0/00464 (4/8e-3)
EW	626/66	619/7	-	-	0/09926 (0/0203)	-	8/76983 (1/1908)	2/64e-23 (1/89e-22)
IW	649 /1	648 /5	-	-	-	-	0 /9762 (0/0169)	64/990 (1/2769)
GR	626/8	622/9	-	-	0/64966 (0/09112)	-	۲	1/498e-6 (3/261e-6)
W	629/4	626/6	-	-	0/00078 (0/0006)	1/3662 (0/1666)	-	-

در جدول ۲ چند توزیع تعمیم یافته بر پایه توزیع وایبل برای مقایسه با توزیع جدید معرفی شده است که مقادیر آکائیک و بیزی و انحراف معیار برآورد پارامترها (مقادیر داخل پرانتز) این توزیع‌ها در جدول ۳ برای داده‌های زمان تکرار به جرم محاسبه شده‌اند.

مقادیر ماتریس واریانس کواریانس برآورد پارامترها توزیع جدید برابر است با:

$$j(\hat{\theta})^{-1} = \begin{pmatrix} 116/8484 & 5.228 & 1.1774 & -7.429e-11 \\ 5.2287 & 1.8340 & 0/06517 & -2.553e-11 \\ 1.1774 & 0/06517 & 0/01315 & -9.25e-13 \\ -7.429e-11 & -2.553e-11 & -9.25e-13 & 3.55e-22 \end{pmatrix}$$

چنان‌که در جدول ۳ ملاحظه می‌شود با توجه به محک‌های AIC و BIC توزیع GIW دارای اطلاع آکائیک و بی‌زی کم‌تر و در نتیجه برازش مناسب‌تری به داده‌ها است.



شکل ۳. الف) نمودار TTT، ب) منحنی کاپلان مایر بقا و برآورد تابع بقا، پ) برآورد تابع نرخ شکست، ت) هیستوگرام داده‌ها و برآورد تابع چگالی توزیع‌ها

شکل ۳ الف نشان می‌دهد که TTT برای مجموعه داده‌ها کاو است و بیانگر صعودی بودن تابع نرخ شکست است. شکل ۳ ب منحنی کاپلان مایر بقا و برآورد تابع بقا برای مدل GIW رسم شده است، که بیانگر برازش خوب مدل GIW به داده‌ها است. با توجه به شکل ۳ پ برآورد تابع نرخ شکست توزیع جدید صعودی نزولی صعودی است ولی در حالت کلی صعودی است که با منحنی TTT مطابقت دارد.



شکل ۳ ت هیستوگرام داده‌ها نشان می‌دهد که توزیع GIW توزیع مناسب‌تری برای برآزش داده‌ها است و چنان‌که مشاهده می‌شود تابع چگالی توزیع جدید برای این داده‌ها شکل دومی دارد. مقدارهای ماکزیمم درست‌نمایی را تحت محدودیت و غیر محدودیت محاسبه و مقدار آماره LRT را به‌دست می‌آوریم. برای مثال آزمون  $H_0: \lambda = 0$  در مقابل  $H_1: \lambda \neq 0$  معادل با مقایسه توزیع IW با GIW است که آماره نسبت درست‌نمایی برابر است با:

$$w = 2\{(-303/6) - 322/2\} = 18/5$$

با  $p$ -value  $< 0/01$  بنابراین توزیع GIW تأیید می‌شود.

## ۲. مثال دوم

داده‌های جدول ۴ زمان شکست ۵۰ دستگاه است که اولین بار آرتست [۱] (۱۹۸۷) تجزیه و تحلیل کردند. نتایج مدل‌های  $GMW, EW, BMW, BW, GR, W$  از سیلوا و همکاران (۲۰۱۰) استخراج و با نتایج توزیع جدید مقایسه شده است.

جدول ۴. زمان شکست ۵۰ دستگاه (داده‌های آرتست)

0/1	0/2	11	1	1	1	2	3	6	7	11	12	18	18	18	18	18	21	32	36	40	45	46	47	50	55	60	63	63	67	
67	67	67	72	75	79	82	82	83	84	84	84	84	85	85	85	85	85	85	86	86										

جدول ۵. برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها داده‌های آرتست

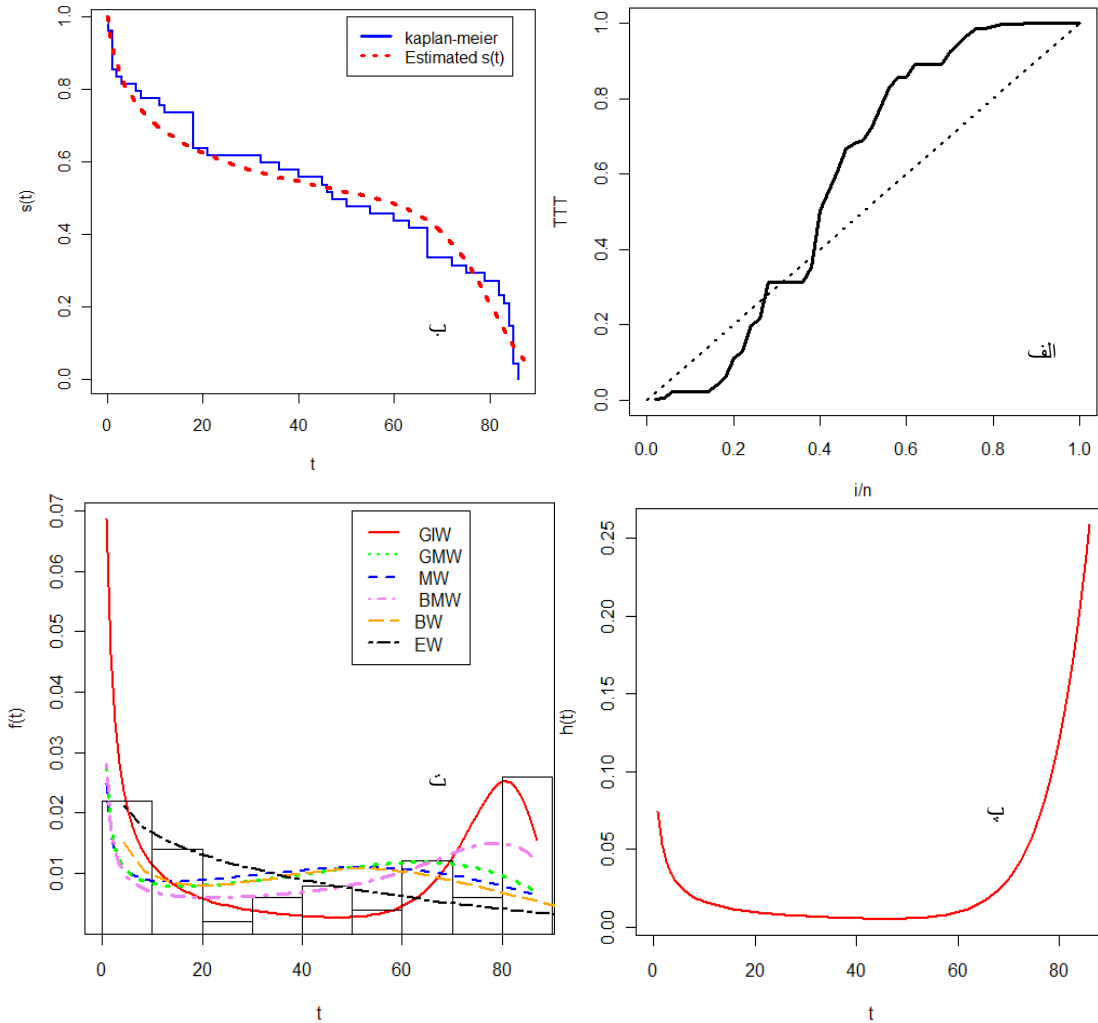
برآورد پارامترها								مدل
BIC	AIC	$\hat{b}$	$\hat{a}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	
446/8	439/2	—	—	10/627 (0/9761)	5/91e-21 (2/56e-20)	0/3163 (0/0455)	2/5231 (0/3858)	GIW
461/2	451/6	0/1647 (0/0830)	0/1975 (0/0462)	—	0/0541 (0/0157)	1/3771 (0/3387)	0/0002 (6/69e-5)	BMW
463/4	455/8	—	—	0/2975 (0/0613)	0/0529 (0/0183)	0/9942 (0/2396)	0/0002 (0/0001)	GMW
471/6	463/9	0/0748 (0/0353)	0/18356 (0/0509)	—	—	2/3615 (0/1715)	0/0007 (0/0004)	BW
466/0	460/3	—	—	—	0/0233 (0/0048)	/3548 (/1127)	/0624 (/0267)	MW
486/2	480/5	—	—	0/4668 (0/0889)	—	1/5936 (0/1858)	0/0011 (0/0010)	EW
537/8	534/0	—	—	—	—	0/4633	2/6502	IW
479/7	475/9	—	—	0/3643 (0/0624)	—	—	0/0002 (4/87e-5)	GR
485/4	486/0	—	—	—	—	0/949 (1/01e-2)	0/949 (1/01e-2)	W

در جدول ۵ برآورد پارامترها برای داده‌های زمان شکست ۵۰ دستگاه و انحراف معیار برآورد پارامترها (مقادیر داخل پرانتز) به‌دست آمده است.

مقادیر ماتریس واریانس کواریانس برآورد پارامترها برابر است با:

$$j(\hat{\theta})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1488 & 3.13e-3 & 6.45e-3 & -6.69e-23 \\ 3.13e-3 & 0.9529 & 4.22e-3 & -2.50e-20 \\ 6.45e-3 & 4.22e-3 & 2.07e-3 & -1.19e-22 \\ -6.69e-23 & -2.50e-20 & -1.19e-22 & 6.58e-40 \end{pmatrix}$$

چنان‌که در جدول ۵ ملاحظه می‌شود با توجه به محک‌های AIC و BIC توزیع GIW دارای اطلاع آکائیک و بی‌بی‌زی کمتر و در نتیجه برآزش مناسب‌تری به داده‌ها است.



شکل ۴. الف) نمودار TTT، ب) منحنی کاپلان مایر بقا و برآورد تابع بقا، پ) برآورد تابع نرخ شکست، ت) هیستوگرام داده‌ها و برآورد تابع چگالی توزیع‌ها

شکل ۴ الف نشان می‌دهد که TTT برای مجموعه داده‌ها کوژ و سپس کاو است، که بیان‌گر این است تابع نرخ شکست وان شکل است. شکل ۴ ب منحنی کاپلان مایر بقا و برآورد تابع بقا مدل GIW رسم شده است که بیان‌گر برآزش خوب مدل GIW به داده‌ها است. با توجه به شکل ۴ پ برآورد تابع نرخ شکست توزیع جدید وان شکل است که با منحنی TTT مطابقت دارد. شکل ۴ ت هیستوگرام داده‌ها نشان می‌دهد که توزیع GIW توزیع مناسب‌تری برای برآزش به داده‌ها است برای این داده‌ها تابع چگالی توزیع جدید شکل نزولی صعودی نزولی را دارد که از ویژگی‌های انعطاف‌پذیری توزیع است.

مقدارهای ماکزیمم درست‌نمایی را تحت محدودیت و غیرمحدودیت محاسبه و مقدار آماره LRT را به دست می‌آوریم. برای مثال آزمون  $H_0: \lambda = 0$  در مقابل  $H_1: \lambda \neq 0$  معادل با مقایسه توزیع IW با GIW است که آماره نسبت درست‌نمایی برابر است با:

$$w = 2\{(-215/6) - 265/0\} = 49/4$$

با  $p$ -value  $< 0/01$  بنابراین توزیع GIW تایید می‌شود.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله توزیع جدید تحت عنوان تعمیم توزیع وایبل معکوس (GIW) معرفی شد. تابع چگالی GIW علاوه بر نزولی و تک‌نما، دومی نیز هست و شکل هندسی تابع نرخ شکست آن نزولی، صعودی، وان شکل، تک‌نما و صعودی نزولی صعودی است، که این امر به انعطاف‌پذیری توزیع می‌افزاید. رفتار ریاضی این توزیع که در برگزیده گشتاور مرکزی، تابع چگالی آماره‌های ترتیبی، پارامتر قابلیت اعتماد، تابع نرخ شکست، تابع بقا، برآورد پارامترها به روش ماکزیمم درست‌نمایی را محاسبه و کاربرد توزیع پیشنهادی را در قالب دو مثال کاربردی با برخی توزیع‌های تعمیم یافته بر پایه توزیع وایبل مقایسه شد.

### تشکر و قدردانی

از دست اندرکاران نشریه و داوران محترم که کمک به بهبود کیفیت و پربارتر شدن مقاله کرده‌اند قدردانی و تشکر می‌کنیم.

### منابع

1. Aarset M.V., "How to identify bathtub hazard rate", IEEE Transactions on Reliability 36, (1987) 106-108.
2. Bebbington M., Lai C.D., Zitikis R., "A flexible Weibull extension", Reliability Engineering and System Safety 92 (2007) 719-726.
3. Barlow R.E., Campo R., "Total time on test processes and applications to failure data analysis", In: Reliability and Fault Tree Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics (1975) 451-481.
4. Carrasco J.M.F., Ortega E.M.M., Cordeiro G.M., "A generalized modified Weibull distribution for lifetime modeling", Comput Stat Data Anal, 53 (2008) 450-462.
5. Chen, Z., "A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function", Statistics and Probability Letters 49 (2000) 155-161
6. Felipe R.S., Edwin M.M.O., Cordeiro M., "The generalized inverse Weibull distribution", Stat Papers 52 (2011) 591-616.

7. Haupt E., Schabe H., "A new model for a lifetime distribution with bathtub shaped failure rate", *Microelectronics and Reliability* 32 (1992) 633-639.
8. Kundu D., Rakab M.Z., "Generalized Rayleigh distribution: different methods of estimation", *Comput Stat Data Anal* 49 (2005) 187-200.
9. Keller A.Z, Kamath A.R., "Reliability analysis of CNC machine tools", *Reliab Eng* 3 (1982) 449-473.
10. Lai C.D, Xie M., Murthy D.N.P., "A modified Weibull distribution", *IEEE Transactions on Reliability* 52 (2003) 33-37.
11. Lehmann E.L., Casella G. "Theory of point estimation", 2nd Edn. Chpman and Hall New York (1998).
12. Lee C, Famoye F, Olumolade O., "Beta-Weibull distribution: some properties and applications to censored data", *J Mod Appl Stat Methods* 6 (2007) 173-186.
13. Mudholkar G.S., Srivastava D.K., Friemer M., "The exponentiated Weibull family: A reanalysis of the bus-motor-failure data", *Technometrics* 37(1995) 436-445.
14. Pham H., Lai C.D., "On recent generalizations of the Weibulldistribution", *IEEE Transactions on Reliability* 56 (2004) 454-458.
15. Rajarshi S., Rajarshi M.B., "Bathtub distributions: A review. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 17 (1988) 2521-2597.
16. Sarhan A.M., Zaindin M., "Modified Weibull distribution", *Applied Sciences*, Vol.11 (2009) 123-136.
17. Silva G.O., Edwin M.M.O., Gauss M.C., "The beta modified Weibull distribution", *Lifetime Data Anal* 16 (2010) 409-430.
18. Stollmack S., Harris C.M, "Failure-reate analysis applied to recidivism data", *Operations Research* 22(6) (1974) 1192-1205.
19. Xie M., Lai C.D., "Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function", *Reliability Engineering and System Safety* 52 (1995) 87-93.
20. Xie M., Tang Y., Goh T.N., "A modified Weibull extension with bathtub failure rate function", *Reliability Engineering and System Safety* 76 (2002) 279-285.