روش هستهٔ تبهگن اصلاح شده برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چندبعدی

احمد ملابهرامی*
دانشگاه ایلام، گروه ریاضی

دریافت ۹۵/۱۲/۲۶ پذیرش ۹۷/۱۲/۱۱

چکیده

در این مقاله برای تحقیق روی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چند بعدی از روش هسته تبهگن اصلاح شده استفاده می‌شود. اصلاح یاد شده، از اعمال تقریب به‌کار رفته برای جداسازی هسته برای تابع منبع حاصل می‌شود. برای حصول تقریب‌های مورد نیاز از روش درون‌یابی لاگرانژی استفاده می‌شود. آنالیز خطا و همگرایی روش به‌صورت دقیق ارائه می‌شود. کارایی روش با اعمال آن روی چند مثال نشان داده شده و مقایسه‌ای نیز با برخی روش‌ها انجام می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چندبعدی، روش درونیابی لاگرانژی چندبعدی، روش هسته تبهگن، روش محاسبه مستقیم، روش هسته تبهگن اصلاح شده.
رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۴۵B۰۵

مقدمه و معرفی مدل معادلات انتگرال فردهلم

پدیده‌های طبیعی معمولاً در قالب یک معادله دیفرانسیل (معمولی یا جزئی)، معادله انتگرال، معادله انتگرال-دیفرانسیل و یا دستگاهی از اینها مدل‌بندی می‌شوند. از این‌رو، یافتن جواب‌های معادلات انتگرال نقش مهمی در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی ایفا می‌کند [۱]. از کاربردهای معادلات انتگرال می‌توان به فیزیک پلاسما، مسئله اصلاح تصویر و تنظیم آن، نظریه پراش و رفتارهای الکتروشیمیایی الکترود میکروباند مشتق شده اشاره کرد [۲].

یک معادله انتگرال فردهلم n-بعدی به‌صورت (۱) است

$$\phi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_B k(x,t)F(u(t))dt,\ x\in A, \qquad (۱)$$

که در آن ϕ، f (تابع منبع)، k (هسته) و F توابعی معلوم، λ یک پارامتر، و u تابع مجهول است که باید معین شود. هم‌چنین $A,B\subseteq R^n$، $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ و $t=(t_1,t_2,...,t_n)$. برای $\phi(x)\equiv 0$، $\phi(x)\equiv 1$ و $\phi(x)\not\equiv 0,$ معادله (۱) به‌ترتیب به نوع اول، دوم و سوم معروف است. در این پژوهش برای نواحی A و B فرم مستطیلی $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ مورد نظر است. اگر $F(u(t))=u(t)$ آن‌گاه معادله (۱) را خطی گوییم. نمایش دیگری از معادله انتگرال فردهلم n-بعدی از جای‌گزینی $k(x,t)F(u(t))$ با $K(x,t,u(t))$ در معادله (۱) حاصل می‌شود که به معادلهٔ غیرخطی اریسون[۱] معروف است [۳].

تا کنون روش‌های زیادی برای حل معادلات انتگرال به‌کار رفته است که به دو دسته تحلیلی و عددی تقسیم می‌شود. از روش‌های تحلیلی می‌توان به‌روش‌های هموتوپی و دیگر روش‌هایی که جواب را به‌صورت دنباله یا سری حاصل می‌کنند اشاره کرد. روش‌های عددی برای معادلات انتگرال شامل دو گروه عمده روش‌های تصویری[۲] و نیسترم[۳]

*نویسنده مسئول a.molabahrami@ilam.ac.ir

1. Urysohn
2. Projection methods
3. Nyström methods

هستند [۳]. هم‌چنین اخیراً روش‌های سودمندی برای حل معادلات انتگرال ولترا، معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری و معادلات دیفرانسیل کسری توسعه یافته است [۴]، [۵]، [۶]. در این پژوهش یک اصلاح از روش هسته تبهگن برای حل معادلات انتگرال فردهلم n-بعدی نوع دوم

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_B k(x,t) F(u(t)) dt, \; x \in A, \tag{۲}$$

به‌کار می‌رود. در [۷]، یک اصلاح از روش هسته تبهگن برای حل یک دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم یک بعدی استفاده شده است.

در این پژوهش، یک صورت اصلاح شده از روش هسته تبهگن برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چند بعدی بررسی می‌شود. صورت اصلاح شده مورد نظر قبلاً در [۷] و [۸] برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل نوع فردهلم تحت شرایط آمیخته و نیز دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم یک‌بعدی به‌کار رفته است که نتایج حاصل، نوید بخش آن است که توسعهٔ این صورت اصلاح شده برای معادلات انتگرال فردهلم چندبعدی نیز می‌تواند نتایج امید بخشی را حاصل کند. اغلب مواجهه با معادلات انتگرال غیرخطی چالش‌هایی را پیش‌رو می‌گذارد که از مهم‌ترین آنها می‌توان به یافتن تمام جواب‌ها و یا تقریب مناسبی از آنها اشاره کرد. در این پژوهش نشان می‌دهیم که برای آن دسته از معادلات خطی و غیر خطی که امکان یافتن جواب دقیق آنها فراهم باشد، روش پیشنهادی این مهم را به‌خوبی و بدون نقص انجام می‌دهد. منظور از "امکان" در این‌جا این است جواب معادله بررسی شده متعلق به زیرفضای تولید شده توسط پایه باشد. هم‌چنین روش پیشنهادی توانایی ارائه تقریب مناسب از جواب‌هایی را دارد که "امکان" اشاره شدهٔ مذکور در مورد آن مهیا نباشد.

روش هسته تبهگن[۱]

روش هسته تبهگن روشی معمول برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم است. این روش معادله داده شده را به یک دستگاه جبری از معادلات تبدیل می‌کند که اگر معادله بررسی شده خطی باشد دستگاه جبری متناظر آن خطی در غیر این صورت غیرخطی است [۹] و [۱۰]. برای توصیف روش، فرض کنید یک تقریب تبهگن مرتبه mام هسته معادله (۳) بدین‌صورت باشد

$$k_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x) h_j(t), \tag{۳}$$

که در آن توابع g_j و h_j، $j=1,2,...,m$، مستقل خطی‌اند. با نمایش تقریب مرتبهٔ m ام جواب متناظر تقریب (۲) معادلهٔ (۳) به‌صورت u_m، روش هسته تبهگن به‌صورت گام‌های ذیل قابل ذکر است:

۱. با جای‌گذاری (۳) در (۲) داریم:

$$u_m(x) = u_m(x;\alpha) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(x), \tag{۴}$$

که در آن

$$\alpha_j = \int_B h_j(t) F(u_m(t)) dt, \; j=1,2,...,m. \tag{۵}$$

۲. با جای‌گذاری (۴) در (۵) دستگاه جبری (۶) حاصل می‌شود:

$$\alpha_j = \int_B h_j(t) F(f(t) + \lambda \sum_{r=1}^{m} \alpha_r g_r(t)) dt, \; j=1,2,...,m. \tag{۶}$$

1. Degenerate Kernel Method (DKM)

۳. حل دستگاه معادلات جبری (۶) و محاسبهٔ مقادیر α_j و جای‌گذاری آن‌ها در (۴) و حصول جواب (جواب‌های) تقریبی معادله (۳). در این گام تقریبی از u_m حاصل می شود که آن‌را با $\tilde{u}_m$ نشان می‌دهیم.

ملاحظهٔ ۱. در حالت کلی دستگاه معادلات جبری (۶) غیرخطی است. برای حل آن، نخست سعی می‌شود جواب (جواب‌های) دقیق محاسبه شود در غیر این صورت از یک روش تکراری مانند نیوتن برای محاسبه جواب (جواب‌های) عددی آن استفاده می‌شود که در این حالت تقریبی از u_m حاصل می‌شود که آن‌را با $\tilde{u}_m$ نشان می‌دهیم. باید توجه داشت که دستگاه (۶) یک دستگاه ساده برای حل نیست و گاهی لازم است انتگرال‌های موجود در آن به‌صورت تقریبی محاسبه شوند.

ملاحظهٔ ۲. مطابق (۴) غیرخطی بودن معادلهٔ (۳) فقط بر مقادیر α_jها اثر می‌گذارد و فرم جواب را تغییر نمی‌دهد.

ملاحظهٔ ۳. برای حالت خطی معادلهٔ (۲) دستگاه (۶) به‌صورت خطی (۷) ساده می‌شود

$$\alpha_j - \lambda\sum_{r=1}^{m}\alpha_r \int_B h_j(t) g_r(t)dt = \int_B h_j(t) f(t)dt,\ j = 1,2,...,m, \tag{۷}$$

صورت ماتریسی دستگاه (۷) عبارت است از $A\alpha = b$، که در آن $A = I_m - \lambda\int_B H(t)G(t)dt$، $b = \int_B H(t) f(t)dt$، $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)^T$، $G(x) = (g_1(x), g_2(x),..., g_m(x))$ و $H(t) = (h_1(t), h_2(t),..., h_m(t))^T$.

ملاحظهٔ ۴. اگر در معادلهٔ (۳) هسته تبهگن باشد، یعنی $k(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x)h_j(t)$، در این صورت از روش هسته تبهگن به‌عنوان روش محاسبهٔ مستقیم[1] یاد می‌شود [۸].

یک اصلاح روش هسته تبهگن[2]

برای به‌دست آوردن یک اصلاح از روش هسته تبهگن که از آن به MDKM یاد می‌کنیم [۱۱] و [۷]، تابع منبع را با همان تابع پایه‌ای که یک تقریب تبهگن هسته را حاصل کرده، تقریب می‌زنیم. مطابق (۳) توابع پایه برای تقریب هسته عبارت است از g_j، $j = 1,2,...,m$، بنابراین داریم

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j g_j(x), \tag{۸}$$

که در آن c_j، $j = 1,2,...,m$، مقادیر معلومی‌اند. از (۴) و (۸) داریم:

$$u_m(x) = u_m(x;\alpha) = \sum_{j=1}^{m}(c_j + \lambda\alpha_j) g_j(x), \tag{۹}$$

با استفاده از (۹) دستگاه معادلات جبری (۶) بدین‌صورت حاصل می‌شود:

$$\alpha_j = \int_B h_j(t) F(\sum_{r=1}^{m}(c_r + \lambda\alpha_r) g_r(t))dt,\ j = 1,2,...,m. \tag{۱۰}$$

ملاحظهٔ ۵. مطابق (۵)، تقریب مرتبه m ام حاصل از MDKM، یعنی u_m، همانند هسته و تابع منبع بر حسب توابع پایه‌ای g_j، $j = 1,2,...,m$، تقریب زده می‌شود. فرض کنید جواب معادله (۳) متعلق به یک فضای باناخ مانند V باشد و زیرفضای تولید شده توسط پایه $\{g_j\}_{j=1}^{m}$ را با V_m نمایش دهیم آن‌گاه $f_m, u_m, k_m[u_m] \in V_m$ که در آن عملگر انتگرالی $k[u]$ به‌صورت $k[u] = \lambda\int_B k(x,t)F(u(t))dt$ تعریف می‌شود.

1. Direct Computation Method (DCM)
2. Modified Degenerate Kernel Method (MDKM)

ملاحظهٔ ۶. ۳-۲. اگر تقریب حاصل از (۹) را به‌صورت عملگری $P_m u = u_m$ نمایش دهیم، که در آن $P_m : V \to V_m$، واضح است که عملگر P_m یک عملگر تصویری است و خاصیت $P_m^2 = P_m$ را صدق می‌دهد. از این رو، اگر یک جواب دقیق معادله (۳) در V_m باشد آن‌گاه MDKM آن جواب را تولید می‌کند.

ملاحظهٔ ۷. ۳-۳. فرم عملگری معادله (۳) عبارت است از $u = f + k[u]$. از اعمال عملگر P_m به طرفین معادلهٔ (۳) داریم $P_m u = P_m f + P_m k[u]$ که معادل $u_m = f_m + k_m[u_m]$ است و فرم غیرعملگری آن بدین‌صورت است:

$$u_m(x) = f_m(x) + \lambda \int_B k_m(x,t) F(u_m(t)) dt, \; x \in A. \qquad (۱۱)$$

در این پژوهش، توابع پایه‌ای را توابع لاگرانژی در نقاط هم‌محلی $\hat{x}_j$، $j = 1,2,...,m$، در نظر می‌گیریم، یعنی قرار می‌دهیم $g_j(\hat{x}_r) = \delta_{jr}$ که در آن δ_{jr} دلتای کرونکر است. بدیهی است که در این حالت MDKM به‌روش هم‌محلی لاگرانژی[۱] تبدیل می‌شود [۱۱]. ارتباط بین روش هسته تبهگن و روش‌های تصویری (روش‌های هم‌محلی و گالرکین) در [۱۱] آمده است. بنابراین، مطابق ملاحظهٔ ۶، اگر معادله بررسی شده دارای جوابی به‌صورت چندجمله‌ای باشد آن‌گاه روش حاضر آن جواب را حاصل می‌کند.

آنالیز خطا و همگرایی MDKM

برای آنالیز خطا و همگرایی، شبیه آن‌چه در [۷] آمده است، به چند فرضیه[۲] نیاز داریم که نخست به بیان آنها می‌پردازیم.

۱. فرض کنید تابع F در شرط لیپشیتس[۳] بدین‌صورت صدق کند:

$$\|F(u) - F(\tilde{u}_m)\|_\infty \le L_F \|u - \tilde{u}_m\|_\infty ,$$

که در آن L_F ثابت نامنفی است.

۲. ثابت مثبتی مانند $\tilde{k}$ یافت شود به‌طوری‌که

$$\|k\|_\infty \le \tilde{k}.$$

۳. ثابت نامنفی $\tilde{F}_m$ یافت شود به‌طوری‌که

$$\|F(\tilde{u}_m)\|_\infty \le \tilde{F}_m.$$

۴. این نامساوی برقرار باشد:

$$|\lambda| \tilde{k} L_F \prod_{r=1}^{n} (b_r - a_r) < 1.$$

قضیهٔ ۸. ۱-۴. فرض کنید که فرضیه‌های ۱ تا ۴ برقرار باشند. در این صورت برای تقریب مرتبهٔ m ام حاصل از MDKM، یعنی $\tilde{u}_m$، داریم:

$$\|u - \tilde{u}_m\|_\infty \le \frac{e_m(f) + |\lambda| \tilde{F}_m e_m(k) \prod_{r=1}^{n} (b_r - a_r)}{1 - |\lambda| \tilde{k} L_F \prod_{r=1}^{n} (b_r - a_r)}, \qquad (۱۲)$$

که در آن $e_m(f) = \|f - f_m\|_\infty$ و $e_m(k) = \|k - k_m\|_\infty$.

برهان. از معادلهٔ (۲) و (۱۱) داریم:

---
1. Lagrange Collocation Method
2. Hypothesis
3. Lipschitz

$$u(x)-\tilde{u}_m(x)= f(x)- f_m(x)+\lambda\int_B (k(x,t)F(u(t))-k_m(x,t)F(\tilde{u}_m(t)))dt,$$

پس

$$\|u(x)-\tilde{u}_m\|_\infty \le \| f - f_m\|\infty+|\lambda|\int_B \|k(x,t)F(u(t))-k_m(x,t)F(\tilde{u}_m(t))\|_\infty dt. \qquad (۱۳)$$

از طرف دیگر، داریم:

$$\begin{aligned}&\|k(x,t)F(u(x))-k_m(x,t)F(\tilde{u}_m(x))\|_\infty\\ &=\|k(x,t)F(u(x))-k(x,t)F(\tilde{u}_m(x))+k(x,t)F(\tilde{u}_m(x))-k_m(x,t)F(\tilde{u}_m(x))\|_\infty \qquad (۱۴)\\ &\le \tilde{k}L_F\,\|u-\tilde{u}_m\|_\infty+e_m(k)\tilde{F}_m.\end{aligned}$$

از (۱۲) و (۱۴) کران خطا بدین‌صورت حاصل می‌شود:

$$e_m(u)\le \frac{e_m(f\,)+|\lambda|\tilde{F}_m e_m(k\,)\prod_{r=1}^{n}(b_r-a_r)}{1-|\lambda|\tilde{k}L_F\prod_{r=1}^{n}(b_r-a_r)}, \qquad (۱۵)$$

که در آن $e_m(u)=\|u-\tilde{u}_m\|_\infty$، و این برهان را کامل می‌کند.

همگرایی روش از (۱۵) حاصل می‌شود که در نتیجه ذیل آمده است.

نتیجهٔ ۹. مطابق (۱۵) اگر $e_m(k\,)\to 0$ و $e_m(f\,)\to 0$ وقتی که $m\to\infty$ آن‌گاه $e_m(u)\to 0$ وقتی‌که $m\to\infty$.

بررسی چند مثال

در این بخش برای نشان دادن کارایی روش آن‌را روی چند مثال از مراجع مختلف اجرا می‌کنیم. برای مقایسهٔ جواب حاصل از با جواب دقیق از نرم بیشینهٔ خطا $e_m(u)=\max_{x\in A}|u(x)-u_m(x)|$ استفاده می‌کنیم. در مثال‌های ذیل فرض می‌کنیم $A=B$. هم‌چنین در مثال‌های ذیل از شکل معمول متغیرهای مستقل برای توابع استفاده شده است.

مثال ۱. معادله انتگرال فردهلم دوبعدی ۱۶ را در نظر بگیرید [۱۲]:

$$u(x,y)=1-\frac{\sin(\sqrt{\pi}x)\sin(\sqrt{\pi}y)}{5xy}+\frac{1}{5}\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos(xs)\cos(yt)u(s,t)dsdt. \qquad (۱۶)$$

با انتخاب دو نقطه هم‌محلی چبیشف یا متساوی‌الفاصله، جواب دقیق (۱۶) را حاصل می‌کند. برای نقاط هم‌محلی متساوی‌الفاصله داریم:

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{\pi}{5},\\ \alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0,\end{cases}$$

و

$$\begin{aligned}u(x;\alpha)&=\frac{1}{5}(5\alpha_1-\pi+5)+\frac{1}{5\sqrt{\pi}}(-5\alpha_1+5\alpha_3+\pi)y\\ &+\frac{1}{5\pi}(\sqrt{\pi}(-5\alpha_1+5\alpha_2+\pi)-(-5\alpha_1+5\alpha_2+5\alpha_3+5\alpha_4+\pi)y)x,\end{aligned}$$

پس جواب دقیق (۱۶) بدین‌صورت حاصل می‌شود:

$$u(x,y)=u_2(x,y)=1.$$

ملاحظه می‌شود که تقریب مرتبهٔ دوم حاصل از MDKM جواب دقیق (۱۶) را تولید می‌کند و داریم $e_2(u)=0$ که مطابق ملاحظهٔ ۶ دور از انتظار نیست.

مثال ۲. معادلهٔ انتگرال فردهلم دوبعدی (۱۷) را در نظر بگیرید [۱۳]:

$$u(x,y)=f(x,y)+\int_0^1\int_0^1\left(e^{\left(\frac{x}{5}\right)^5 s}-1\right)u(s,t)dsdt, \qquad (۱۷)$$

که در آن $f(x,y)=xy-\frac{3125}{2x^{10}}\left(e^{\frac{x^5}{3125}}(x^5-3125)+3125\right)+\frac{1}{4}$.

مشابه مثال قبل، با انتخاب دو نقطه هم‌محلی چبیشف یا متساوی‌الفاصله، MDKM جواب دقیق (۱۷) به‌دست می‌آید. برای نقاط هم‌محلی متساوی‌الفاصله داریم:

$$\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=\dfrac{19531249}{4}-4881250\sqrt[3125]{e},\end{cases}$$

و

$$u(x;\alpha)=\alpha_1+x(-\alpha_1+\alpha_3+y+4881250\sqrt[3125]{e}-\frac{19531249}{4}),$$

پس جواب دقیق (۱۷) بدین‌صورت حاصل می‌شود:

$$u(x,y)=u_2(x,y)=xy.$$

ملاحظه می‌شود که تقریب مرتبهٔ دوم حاصل از MDKM جواب دقیق (۱۷) را تولید می‌کند و داریم $e_2(u)=0$ که مطابق ملاحظهٔ ۶ دور از انتظار نیست.

مثال ۳. معادلهٔ انتگرال فردهلم سه‌بعدی (۱۸) را در نظر بگیرید

$$u(x,y,z)=xyz^2-\frac{2+xy+e^{xy}(-2+xy)}{2x^3}+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 y^3e^{xytr}u(s,t,r)dsdtdr. \qquad (۱۸)$$

با انتخاب سه نقطه هم‌محلی متساوی‌الفاصله، MDKM جواب دقیق (۱۸) را حاصل می‌کند. برای نقاط هم‌محلی متساوی‌الفاصله داریم

$$\begin{cases}\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0,\alpha_4=\dfrac{1}{96},\alpha_5=9-7\sqrt[4]{e},\\ \alpha_6=\dfrac{1}{4}(5-3\sqrt{e}),\alpha_7=\dfrac{1}{12},\alpha_8=10-6\sqrt{e},\alpha_9=\dfrac{3-e}{2}.\end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر α_jها در $u_3(x,y,z;\alpha)$ متناظر (که به‌دلیل طولانی بودن از ذکر آن خوداری شده است)، جواب دقیق (۱۸) بدین‌صورت حاصل می‌شود:

$$u(x,y,z)=u_3(x,y,z)=xyz^2.$$

ملاحظه می‌شود که تقریب مرتبهٔ سوم حاصل از MDKM جواب دقیق (۱۸) را تولید می‌کند و داریم $e_3(u)=0$ که مطابق ملاحظهٔ ۶ دور از انتظار نیست. هم‌چنین با انتخاب دو نقطه هم‌محلی چبیشف و متساوی‌الفاصله به‌ترتیب داریم: $e_2(u)=0.141500$ و $e_2(u)=0.402132$.

مثال ۴. معادلهٔ انتگرال فردهلم دوبعدی غیرخطی (۱۹) را در نظر بگیرید [۱۳]:

$$u(x,y)=x\cos(y)+\frac{1}{20}\left(\cos^4(1)-1\right)-\frac{1}{12}\left(\cos^2(1)+2\right)\sin(1)+\int_0^1\int_0^1(s\sin(t)+1)u^3(s,t)dsdt. \qquad (۱۹)$$

برای معادله (۱۹) با توجه به تبهگن بودن هسته معادله، نیازی به تقریب تابع منبع، f، نیست. در این حالت MDKM معادل DCM می‌شود. بنابراین از معادلهٔ جبری متناظر (۱۳) با $m=1$ (از معادله (۱۰) با $m=1$ و $c_r=0$)، با جای‌گزینی α به جای α_1، داریم:

$$\alpha=\frac{1}{480}(15+90\sin(1)+15\sin(3)-12\sin(2)-3\cos(4)),$$
$$\frac{150+900\sin(1)+100\sin(2)-60\sin(3)+10\sin(4)+18\cos(1)-168\cos(2)-15\cos(3)+18\cos(4)-3\cos(5)\pm120\beta}{960(\cos(1)-3)},$$

که در آن $\beta=\sqrt{2(81+44\sin(1)-48\sin(2)-4\sin(3)+20\cos(1)-48\cos(2)+12\cos(3)-\cos(4))}$. هم‌چنین مطابق (۴) با $m=1$ (مطابق (۵) با $m=1$ و $c_r=0$) داریم

$$u(x,y;\alpha)=x\cos(y)+\frac{1}{20}\left(\cos^4(1)-1\right)-\frac{1}{24}\left(\cos^2(2)+5\right)\sin(1)+\alpha.$$

با جای‌گذاری مقادیر α در $u(x,y;\alpha)$ سه جواب دقیق (۱۹) به‌کمک DCM بدین‌صورت حاصل می‌شود:

$$u(x,y)=x\cos(y),x\cos(y)+\frac{2+12\sin(1)-2\cos(2)\pm\beta}{8(\cos(1)-3)}.$$

ملاحظهٔ ۱۰. برای بررسی شرط $|\lambda|\tilde{kL}_F\prod_{r=1}^{n}(b_r-a_r)<1$ (شرط ۴ در بخش ۴) برای مثال‌های مذکور، قرار می‌دهیم $\gamma=|\lambda|\tilde{kL}_F\prod_{r=1}^{n}(b_r-a_r)$، در این صورت برای مثال‌های ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب داریم $\gamma=\frac{\pi}{5}$، $\gamma=\left|e^{(0.2)^5}-1\right|\cong0.000320051$ و $\gamma=e$. بنابراین برای دو مثال اول و دوم $\gamma<1$ و برای مثال سوم $\gamma>1$ حاصل می‌شود. از طرفی نتایج حاصل برای مثال ۵ همگرایی روش را تأیید می‌کند از این‌رو، شرایط داده شده در قضیهٔ ۸ شرایط کافی برای همگرایی MDKM هستند.

ملاحظهٔ ۱۱. برای مثال‌های مذکور زمان محاسبات و اطلاعات مربوط در جدول ۱ آمده است. با دقت در جدول ۱ ملاحظه می‌شود که MDKM از نظر هزینه و پیچدگی محاسبات قابل قبول و مناسب است. برای حصول نتایج جدول ۱ رایانه استفاده شده یک لب‌تاب اپل (Apple MacBook Pro) است.

مشخصات نرم‌افزاری: نرم‌افزار استفاده شده برای پیاده‌سازی متمتیکای ۹ و سیستم عامل ویندوز ۸، و مشخصات سخت‌افزاری عبارت است از: Intel® Core™ 2 Duo CPU, P8600@2.40 GHz, 1.58 GHz, 2.74GB Of RAM. واضح است که با جای‌گزینی سیستم عامل لینوکس به‌جای ویندوز هزینه محاسباتی جدول ۱ را می‌توان تا سطح قابل ملاحظه‌ای کاهش داد.

جدول۱. زمان محاسبات مورد نیاز (بر حسب ثانیه) برای مثال‌های ۱، ۲، ۳ و ۴

مثال	مرتبه تقریب	CPU time (in seconds)	ماکسیمم خطا
۵-۱	۲	۲۰	۰
۵-۲	۲	۲	۰
۵-۳	۳	۸۸	۰
۵-۴	-	۳۵	۰

مقایسه و بحث

در این بخش، مقایسه‌ای بین الگوریتم‌های عنوان شده در این پژوهش و الگوریتم‌های [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، برای نشان دادن دقت الگوریتم‌های اشاره شده بررسی حاضر، انجام می‌شود. در این‌جا نخست به چگونگی امکان یافتن تمام جواب‌های یک معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌پردازیم. حالت اول فرض کنید هسته معادلهٔ (۳) تبهگن باشد آن‌گاه این امکان وجود دارد که بتوان تمام جواب‌های دقیق آن را یافت. اگر بتوان دستگاه (معادله) جبری (۶) را به‌صورت

دقیق حل کرد آن‌گاه با جای‌گذاری مقادیر حاصل در (۴) تمام جواب‌های معادله (۳) به‌صورت دقیق حاصل می‌شوند (مثال ۴ را ببینید). ممکن است یافتن تمام جواب‌های (۶) به‌صورت دقیق مقدور نباشد، در این حالت متناظر جواب‌های دقیق (۶) جواب‌های دقیق معادله (۳) و متناظر جواب‌های تقریبی (۶) جواب‌های تقریبی معادله (۳) حاصل می‌شود (معادلهٔ (۱۹)). برای حالت دوم فرض کنید هسته معادله (۳) غیرتبهگن باشد، در این حالت جواب‌های دقیق (۱۰) ممکن است جواب‌های دقیق متناظر معادله (۳) را توسط (۵) حاصل کند (مثال‌های۱، ۲ و ۳). به‌طور خلاصه، جواب‌های دقیق (۶) و (۱۰) می‌توانند جواب‌های دقیق متناظر معادله انتگرال (۳) را به‌ترتیب به‌کمک (۴) و (۵) حاصل کنند. جواب‌های تقریبی (۶) و (۱۰) جواب‌های تقریبی متناظر معادله انتگرال (۳) را به‌دست می‌دهد.

در [۱۲] معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم دوبعدی با توابع پایه‌ای شعاعی[1] گاوسی بررسی شده است که در آن برای معادلهٔ (۱۶) برای تقریب مرتبهٔ نهم $e_9(u)=2.3\times 10^{-10}$ حاصل شده است، در حالی‌که مطابق مثال ۱ تقریب مرتبهٔ دوم حاصل از MDKM جواب دقیق آن معادله را به‌دست می‌دهد، یعنی $e_2(u)=0$. هم‌چنین در [۱۳] و مراجع استفاده شده آن برای معادله انتگرال

$$u(x,y)=\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{x}{6(1+y)}+\int_0^1\int_0^1\frac{x}{1+y}(1+t+s)u^2(s,t)dsdt,$$

فقط یک جواب دقیق گزارش شده است، در حالی‌که با به‌کارگیری DCM به‌راحتی می‌توان نشان داد که معادلهٔ ذکر شده دارای دو جواب دقیق بدین‌صورت است:

$$u(x,y)=\frac{1}{(x+y+1)^2},\frac{1}{(x+y+1)^2}+\frac{24x\,(1-\frac{8}{3}\ln\frac{2}{3})}{(y+1)(3+7\ln 2)}.$$

در [۱۳] نویسندگان مقاله، روش مقدار میانگین انتگرال[2] را برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چندبعدی توسعه داده‌اند. لیکن به‌دلیل اجرای نامناسب آن روش نتوانسته‌اند تمام جواب‌های معادلات بررسی شده را ارائه دهند. به‌عنوان نمونه، برای معادلهٔ (۵-۴) در [۱۳] و مرجع استفاده شده آن فقط یک جواب دقیق گزارش شده است در حالی‌که به‌کمک DCM سه جواب دقیق برای آن معادله حاصل می‌شود (مثال ۴). هم‌چنین در [۱۳] با اجرای IMVM برای معادلهٔ (۱۷) جواب مناسبی فراهم نشده است، در حالی‌که مطابق نتایج مثال ۲، تقریب مرتبهٔ دوم حاصل از MDKM جواب دقیق آن را به‌دست می‌دهد. حال معادله انتگرال فردهلم نوع دوم دوبعدی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۱۴] و [۱۳]:

$$u(x,y)=\frac{x}{16(1+y)}-\ln\left(\frac{xy}{1+y^2}+1\right)+\int_0^1\int_0^1\frac{x(1-s^2)}{(y+1)(t^2+1)}\left(1-e^{-u(s,t)}\right)dsdt, \qquad (۲۰)$$

در [۱۳] و [۱۴] تنها یک جواب دقیق برای معادلهٔ (۲۰) گزارش شده است که عبارت است از:

$$u(x,y)=-\ln\left(\frac{xy}{1+y^2}+1\right).$$

در ادامه نشان می‌دهیم که معادله (۲۰) حداقل یک جواب دقیق دیگری هم دارد. با اجرای DCM روی معادله (۲۰)، داریم:

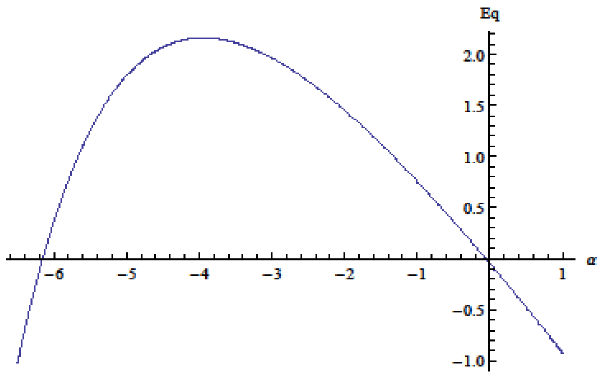
$$u(x,y;\alpha)=\frac{x(16\alpha+1)}{16(1+y)}-\ln\left(\frac{xy}{1+y^2}+1\right), \qquad (۲۱)$$

1. Radial Basis Functions (RBF)
2. Integral Mean Value Method (IMVM)

که در آن α جوابی برای معادلهٔ (۲۲) است (معادله متناظر معادله (۲-۴))

$$-\alpha+\frac{\pi}{6}+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{st(s^2-1)}{(t^2+1)^2}+\frac{s^2-1}{t^2+1}\right)e^{-\frac{s\left(\alpha+\frac{1}{16}\right)}{t+1}}dsdt=0, \qquad (۲۲)$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که $\alpha=-\frac{1}{16}$ ریشهٔ معادلهٔ (۶-۳) است که با جای‌گذاری آن در (۲۱) جواب گزارش شده در [۱۳] و [۱۴] حاصل می‌شود. حال نشان می‌دهیم که معادلهٔ (۲۲) ریشهٔ دیگری در فاصلهٔ $[-6.2,-6]$ دارد. با رسم طرف اول معادله (۲۲) نسبت به α ملاحظه می‌شود که منحنی حاصل محور x ها را در فاصله $[-6.2,-6]$ نیز قطع می‌کند (نمودار ۱). پس معادله انتگرال (۲۰) جواب دقیق دیگری به فرم (۲۱) دارد که در آن α در فاصلهٔ $(-6.2,-6)$ قرار دارد. با محاسبهٔ مقدار تقریبی ریشه یاد شده به‌کمک روش نیوتن با شروع از نقطه $\alpha_0=-6.2$ به‌عنوان نقطه آغازین، مقدار تقریبی ریشه به‌صورت $\alpha=-6.15035$ حاصل می‌شود.



شکل ۱. منحنی نمایش نمودار طرف اول معادلهٔ (۶-۳)

بنابراین صورت تقریبی جواب دقیق دیگر معادلهٔ (۲۰) بدین‌صورت است که به‌ازای آن خطای مانده متناظر برابر صفر می‌شود:

$$u(x,y)=-\frac{6.08785x}{1+y}-\ln\left(\frac{xy}{1+y^2}+1\right).$$

نتیجه

در این مقاله، یک اصلاح از روش هسته تبهگن برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چندبعدی به‌کار رفت. برای ساخت تقریب تبهگن هسته و نیز تابع منبع از درون‌یابی لاگرانژی استفاده شد. روش‌های دیگر تقریب‌ساز نیز، برای تقریب هسته و تابع منبع، می‌توانند به‌کار روند. نتایج حاصل نشان می‌دهند که برای حصول جواب‌های دقیق به‌کمک MDKM، انتخاب توابع پایه برای تقریب هسته و تابع منبع نقش اساسی دارند که گاهی این مهم از فیزیک معادله بررسی شده دست یافتنی است. واضح است که روش حاضر برای حالت‌های دیگر معادلات فردهلم از جمله معادلات با هسته‌های منفرد و نیز دستگاه معادلات فردهلم چند بعدی قابل توسعه است. در پایان خاطر نشان می‌شود که الگوریتم‌های ارائه شده در این پژوهش در محیط نرم‌افزار متمتیکا در قالب یک برنامه پیاده‌سازی و اجرا شده است.

منابع

1. Molabahrami A., "An algorithm based on the regularization and integral mean value methods for the Fredholm integral equation of the first kind", Appl. Math. Modelling, 37 (2013) 9634-9642.

2. Assari P., Adibi H., Dehghan M., "A meshless method for solving nonlinear two dimensional integral equations of the second kind on non-rectangular domains using radial basis functions with error analysis", J. Comput. Appl. Math., 239 (2013) 72-92.

3. Atkinson K., Han W., "Theoretical Numerical Analysis (A Functional Analysis Framework)", Springer-Verlag, New York, Third Edition (2009).

4. Nemati S., Lima P.M., Ordokhani Y., "Numerical solution of a class of two-dimensional nonlinear Volterra integral equations using Legendre polynomials", Journal of Computational and Applied Mathematics**,** 242 (2013) 53-69.

5. Rahimkhani Parisa, Ordokhani Yadollah, Babolian Esmail, "Fractional-order Bernoulli functions and their applications in solving fractional Fredholm-Volterra integro-differential equations", Applied Numerical Mathematics, 122 (2017) 66-81.

6. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations", Numer. Algor., 74 (2017) 223-245.

7. Molabahrami Ahmad, "A modified degenerate kernel method for the system of Fredholm integral equations of the second kind", Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, (2017) In press.

8. Molabahrami Ahmad, "Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integro-differential equation under the mixed conditions: Degenerate and non-degenerate kernels", Journal of Computational and Applied Mathematics**,** 282 (2015) 34-43.

9. Atkinson K., "The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind", Cambridge University Press, UK, 1997.

10. Kanwal R. P., "Linear Integral Equations, Theory and Technique", Academic Press, NewYork, 1971.

11. Molabahrami Ahmad., "The relationship of degenerate kernel and projection methods on Fredholm integral equations of the second kind", Commun. Numer. Anal. 1 (2017) 34-39.

12. Alipanah Amjad., Esmaeili Shahrokh., "Numerical solution of the two-dimensional Fredholm integral equations using Gaussian radial basis function", Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2011) 5342-5347.

13. Heydari M., Avazzadeh Z., Navabpour H., Loghmani G. B., "Numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind by using integral mean value theorem II. High dimensional problems", Appl. Math. Modelling, 37 (2013) 432-442.

14. Han G. Q., Wang R., "Richardson extrapolation of iterated discrete Galerkin solution for two-dimensional Fredholm integral equations", J. Comput. Appl. Math., 139 (2002) 49-63