مدل‌سازی سالیتونی جواب‌های تحلیلی معادله غیرخطی شرودینگر با قانون دوگانه غیرخطی

احمد نیرمه*، سعید شکوه؛
دانشگاه گنبد کاووس، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

در این پژوهش سعی بر این است تا با استفاده از روش جدیداً مطرح شده مبتنی بر ساختار نرم افزاری میپل[۱]، تحت عنوان روش اصلاح شدهٔ خاترز[۲] جواب‌هایی از انواع جواب‌های سالیتونی، نمایی، هایپربولیک و مثلثاتی برای یکی از معادلات شرودینگر تحت عنوان معادلهٔ غیرخطی شرودینگر با قانون دوگانه غیرخطی مطرح شود. با توجه به طیف گسترده استفاده از معادلهٔ شرودینگر در فیزیک و مهندسی حل این معادله با استفاده از روش مذکور که در برگیرندهٔ تنوع زیادی از جواب‌ها است اهمیت زیادی دارد.

واژه‌های کلیدی: معادله غیرخطی شرودینگر، نرم افزار میپل، جواب‌های تحلیلی، روش اصلاح شدهٔ خاترز، سالیتون.

مقدمه

معادلهٔ غیرخطی شرودینگر[۳]، معادلهٔ دیفرانسیل جزئی است که در فیزیک مدرن نقش به‌سزایی دارد. از آن‌جاکه مکانیک کوانتومی در مدرن‌ترین فناوری‌ها، مانند انرژی هسته‌ای، رایانه‌های ساخته شده از مواد نیمه‌رسانا، لیزرها و تمام پدیده‌های کوانتومی حضور پررنگی دارد و تمام مشاهدات تجربی دنیای پیرامون ما با نتایج حاصل از این معادلات سازگاری کامل دارند و این معادله شرودینگر است که سامانهٔ حرکت ذرات اتمی و ریز اتمی را در طول گذر زمان توصیف می‌کند از این‌رو، به‌دلیل اهمیت زیاد جواب‌های معادلهٔ شرودینگر که توصیف‌کنندهٔ پدیده‌های زیادی در فیزیک و مهندسی است، حل این معادله ضرورت زیادی پیدا می‌کند. در هر پدیده و فرآیندی در طبیعت پارامترهای مختلفی وجود دارد که مطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با هم ارتباط دارند بیان این ارتباط به زبان ریاضی معادله‌ای تابعی است و معادلهٔ تابعی حاصل از پدیده‌ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر مستقل بررسی می‌شود، معادلهٔ دیفرانسیل نامیده می‌شود. معادلهٔ شرودینگر با توجه به ماهیت معادله که شامل جملات غیرخطی مختلف است کاربرد بسیار زیادی در علوم نوین از جمله فیریک کوانتوم دارد. شاید بتوان گفت که وسیع‌ترین گسترهٔ کاربردی معادلات، به معادلهٔ شرودینگر به‌ویژه در فیزیک و شیمی مدرن و الکترونیک کوانتوم مربوط باشد. هر جا که سخن از ذرات ریز است، معادلهٔ شرودینگر راه‌گشای تحلیل پیچیده‌ترین مسائل مربوط به آن‌ها است. آن‌گاه که

*نویسنده مسئول a.neirameh@gonbad.ac.ir

1. MAPLE
2. Modified Khaters method
3. Nonlinear Schrodinger equation

ادوات را در ابعاد مزوسکپیک[1]، اتمی یا هسته‌ای بررسی می‌کنیم و آن‌جا که قدم به فضای یک الکترون گذاشته و به تحلیل کوارک‌ها[2] می‌پردازیم، باز هم این معادلۀ اسرارآمیز شرودینگر است که پیروزی انسان را بر جهان ماده رقم می‌زندT از این رو یافتن، جواب‌های دقیق برای این نوع معادلات غیرخطی با عنوان معادلات غیرخطی شرودینگر و معادلاتی از این دست اهمیت به‌سزایی دارد [1]-[6]. اگرچه یافتن جواب‌های معادلات غیرخطی در حالت کلی بسیار سخت و پیچیده است ولی اخیراً روش‌های زیادی برای حل این‌گونه از معادلات مطرح شده است. از جمله می‌توان به روش بسط اف[3] [7]، [8] روش بسط جیپریم جی[4] [9]، [10]، روش بالانس همگن[5] [11]، [12]، روش سینوس کسینوس[6] [13] و غیره اشاره کرد. در این مقاله معادله غیرخطی شرودینگر شامل قانون دوگانه توان غیرخطی بدین‌صورت در نظر گرفته شده است:

$$i\,\frac{\partial q}{\partial Z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2}+\left(|q|^{2p}+\upsilon|q|^{4p}\right)q=0, \tag{۱}$$

که در آن q تابع مختلط و بیانگر دامنۀ مختلط شکل موج است و p مقدار ثابت دلخواه غیر صفر است. چهارچوب مقاله به این صورت است که در بخش دوم به اختصار روش خاترز و خانواده جواب‌های مختلف حاصل از این روش بحث شده است. در بخش دوم کاربرد این روش برای معادلۀ غیرخطی شرودینگر مطرح شده است و در آخر نتیجه‌گیری بیان شده است.

۱. مقدمات روش اصلاح شده خاترز

این روش را در ابتدا مصطفی خاتر [14] برای سهولت در یافتن جواب‌های معادلات غیرخطی مطرح کرد که دربرگیرندۀ جواب‌های این نوع معادلات با چندین روش بود. روش خاترز اصلاح شده مشتمل بر پنج زیربخش است که بدین‌صورت مطرح می‌شوند.

۱-۱. معادله با مشتقات جزیی را به‌صورت (۲) در نظر می‌گیریم:

$$F\left(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{xx},\ldots\right)=0\,, \tag{۲}$$

با تغییر متغیر موجی

$$u(x,t)=u(\xi),\qquad \xi=x-\lambda t \tag{۳}$$

معادلۀ جزیی (۲) به یک معادله دیفرانسیل معمولی به‌صورت (۴) تبدیل می‌شود:

$$G\left(u,u',u'',\ldots\right)=0, \tag{۴}$$

۲-۱. فرض می‌کنیم معادلۀ (۴) جوابی به‌صورت (۵) داشته باشد:

$$u(\xi)=\sum_{k=0}^{m} b_k\, a^{kf(\xi)}, \tag{۵}$$

که درآن $b_k\left(0\le k\le m\right)$ ضرایب ثابت هستند که محاسبه خواهند شد و $f(\xi)$ در معادلۀ معمولی (۶) صدق می‌کند:

1. Mesoscopic
2. Quarks
3. F- expansion method
4. (G'/G)-expansion method
5. Homogeneous balance method
6. Sine-cosine method

$$f'(\xi)=\frac{1}{\ln(a)}\left(\alpha a^{-f(\xi)}+\beta+\sigma a^{f(\xi)}\right). \tag{۶}$$

کارایی این روش در این است که با مطرح شدن معادلهٔ (۶) طیف وسیعی از جواب‌ها را برای معادلهٔ مذکور و در نتیجه برای معادلهٔ (۱) داریم. تعدادی از این جواب‌ها در قالب دسته‌های مختلف عبارتند از:

دستهٔ ۱: جواب‌هایی از نوع توابع‌هایپربولیک

اگر $\beta^2-4\alpha\sigma>0$ و $\sigma\neq 0$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{-\beta}{2\sigma}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\tanh\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2}(\xi+\xi_0)\right), \tag{۷}$$

یا

$$a^{f(\xi)}=\frac{-\beta}{2\sigma}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\coth\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2}(\xi+\xi_0)\right). \tag{۸}$$

که در آن ξ_0 ثابت دلخواه و α,β,σ ثابت‌های مد نظر رابطهٔ (۵) هستند. اگر $\beta^2+4\alpha^2>0, \sigma\neq 0$ و $\sigma=-\alpha$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2\alpha}\tanh\left(\frac{\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}(\xi+\xi_0)\right), \tag{۹}$$

یا

$$a^{f(\xi)}=\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2\alpha}\coth\left(\frac{\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}(\xi+\xi_0)\right). \tag{۱۰}$$

اگر $\beta^2-4\alpha^2>0$ و $\sigma=\alpha$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{-\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha^2}}{2\alpha}\tanh\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha^2}}{2}(\xi+\xi_0)\right), \tag{۱۱}$$

یا

$$a^{f(\xi)}=\frac{-\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha^2}}{2\alpha}\coth\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha^2}}{2}(\xi+\xi_0)\right). \tag{۱۲}$$

اگر $\alpha\sigma<0, \sigma\neq 0$ و $\beta=0$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=-\sqrt{\frac{-\alpha}{\sigma}}\tanh\left(\sqrt{-\alpha\sigma}(\xi+\xi_0)\right), \tag{۱۳}$$

یا

$$a^{f(\xi)}=-\sqrt{\frac{-\alpha}{\sigma}}\coth\left(\sqrt{-\alpha\sigma}(\xi+\xi_0)\right). \tag{۱۴}$$

دستهٔ ۲: جواب‌هایی از نوع توابع مثلثاتی

اگر $\beta^2-4\alpha\sigma<0$ و $\sigma\neq 0$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{-\beta}{2\sigma}+\frac{\sqrt{-\left(\beta^2-4\alpha\sigma\right)}}{2\sigma}\tan\left(\frac{\sqrt{-\left(\beta^2-4\alpha\sigma\right)}}{2}\left(\xi+\xi_0\right)\right),\qquad (۱۵)$$

یا

$$a^{f(\xi)}=\frac{-\beta}{2\sigma}-\frac{\sqrt{-\left(\beta^2-4\alpha\sigma\right)}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{-\left(\beta^2-4\alpha\sigma\right)}}{2}\left(\xi+\xi_0\right)\right).\qquad (۱۶)$$

اگر $\beta^2+4\alpha^2<0, \sigma\neq 0$ و $\sigma=-\alpha$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{-\left(\beta^2+4\alpha^2\right)}}{2\alpha}\tan\left(\frac{\sqrt{-\left(\beta^2+4\alpha^2\right)}}{2}\left(\xi+\xi_0\right)\right),\qquad (۱۷)$$

یا

$$a^{f(\xi)}=\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{-\left(\beta^2+4\alpha^2\right)}}{2\alpha}\cot\left(\frac{\sqrt{-\left(\beta^2+4\alpha^2\right)}}{2}\left(\xi+\xi_0\right)\right).\qquad (۱۸)$$

اگر $\beta^2-4\alpha^2<0$ و $\sigma=\alpha$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{-\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{-\left(\beta^2-4\alpha^2\right)}}{2\alpha}\tan\left(\frac{\sqrt{-\left(\beta^2-4\alpha^2\right)}}{2}\left(\xi+\xi_0\right)\right),\qquad (۱۹)$$

یا

$$a^{f(\xi)}=\frac{-\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{-\left(\beta^2-4\alpha^2\right)}}{2\alpha}\cot\left(\frac{\sqrt{-\left(\beta^2-4\alpha^2\right)}}{2}\left(\xi+\xi_0\right)\right).\qquad (۲۰)$$

اگر $\alpha\sigma>0, \sigma\neq 0$ و $\beta=0$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\tan\left(\sqrt{\alpha\sigma}\left(\xi+\xi_0\right)\right),\qquad (۲۱)$$

یا

$$a^{f(\xi)}=-\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\cot\left(\sqrt{\alpha\sigma}\left(\xi+\xi_0\right)\right).\qquad (۲۲)$$

دستهٔ ۳: جواب‌هایی از نوع توابع نمایی

اگر $\beta=0$ و $\alpha=-\sigma,$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{e^{2\alpha\left(\xi+\xi_0\right)}+1}{e^{2\alpha\left(\xi+\xi_0\right)}-1}.\qquad (۲۳)$$

اگر $\alpha=\sigma=0$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{-(1+e^{2\beta\left(\xi+\xi_0\right)})}{2e^{\beta\left(\xi+\xi_0\right)}}.\qquad (۲۴)$$

گر $\beta=\upsilon,\sigma=2\upsilon$ و $\alpha=0$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{e^{\upsilon(\xi+\xi_0)}}{1-e^{\upsilon(\xi+\xi_0)}}. \tag{۲۵}$$

اگر $\alpha=0$ داریم:

$$a^{f(\xi)}=\frac{\beta e^{\beta(\xi+\xi_0)}}{2-\sigma e^{\beta(\xi+\xi_0)}}. \tag{۲۶}$$

که در آن ξ_0 و C ثابت هاب دلخواه هستند.

۳-۱. در این قسمت مقدار عدد صحیح در معادلهٔ (۵) را با در نظر گرفتن بالانس همگن مابین بالاترین مرتبهٔ مشتق و بالاترین مرتبهٔ جمله غیرخطی در معادلهٔ (۴) با این دستور به‌دست می‌آوریم:

$$D\left[\frac{d^{\lambda}u(\xi)}{d\xi^{\lambda}}\right]=n+\lambda,\quad D\left[u^{\lambda}\left(\frac{d^{\upsilon}u(\xi)}{d\xi^{\upsilon}}\right)^{s}\right]=n\lambda+s(n+\upsilon).$$

۴-۱. با جاگذاری معادلهٔ (۵) همراه با مشتقات لازم در معادلهٔ (۴) و جداسازی توان‌های مختلف دسته‌ای از معادلات جبری را به‌دست می‌آوریم. با حل این معادلات جبری با استفاده از نرم افزارهایی مانند متلب یا میپل ضرایب لازم برای به‌دست آوردن جواب‌های معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

۲. کاربرد روش خاترز برای معادلهٔ غیرخطی شرودینگر

در ادامه برای حل معادلهٔ (۱) تغییر متغیر موجی (۲۷) را برای تبدیل معادلهٔ غیرخطی با مشتقات جزیی (۱) به یک معادله دیفرانسیل معمولی مطرح می‌کنیم:

$$q(Z,T)=U(\xi)\exp\left(i\left(\alpha Z+\beta T\right)\right),\qquad \xi=\beta\omega Z-\omega T+\xi_0, \tag{۲۷}$$

که داریم:

$$-\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta^2\right)U(\xi)+\frac{1}{2}\omega^2U''(\xi)+U^{2p+1}(\xi)+\upsilon U^{4p+1}(\xi)=0, \tag{۲۸}$$

در ادامه تبدیل $U=V^{\frac{1}{2p}}$ را در نظر می‌گیریم. با این تبدیل داریم:

$$\begin{gathered}\frac{\omega^2}{2}(1-2p)\left(V'(\xi)\right)^2+\omega^2V(\xi)V''(\xi)-\\ 4p\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta^2\right)V^2(\xi)+4pV^3(\xi)+4p\upsilon V^4(\xi)=0,\end{gathered} \tag{۲۹}$$

براساس ساختار روش خاترز معادلهٔ (۲۹) جوابی به‌صورت رابطهٔ (۴) خواهد داشت بنابراین با در نظرگرفتن بالانس همگن بر اساس قسمت ۲-۳ بین بالاترین مرتبهٔ مشتق و بالاترین مرتبهٔ غیرخطی مقدار $m=1$. بنابراین جواب معادلهٔ (۲۹) را به‌صورت (۳۰) داریم:

$$V(\xi)=b_0+b_1a^{f(\xi)}, \tag{۳۰}$$

که در آن

$$f'(\xi)=\frac{1}{\ln(a)}\left(\alpha a^{-f(\xi)}+\beta+\sigma a^{f(\xi)}\right). \tag{۳۱}$$

$$\frac{dV}{d\xi}=b_1a^{f(\xi)}\left(\alpha a^{-f(\xi)}+\beta+\sigma a^{f(\xi)}\right) \tag{۳۲}$$

حال با جاگذاری رابطهٔ (۳۰) و مشتقات و توان‌های لازم آن در معادلهٔ (۲۹) و مرتب‌سازی معادلات جبری مذکور بر اساس توان‌های مختلف $a^{f(\xi)}$ و مساوی با صفر قرار دادن ضرایب فوق به یک دسته از رابطه‌های جبری می‌رسیم که با حل این عبارات با استفاده از برنامه‌های کاربردی میپل ضرایب مد نظر را بدین‌صورت به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
b_0&=-\frac{\sqrt{2}}{16}\Big(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+\\
&9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^2-10\sqrt{\Lambda}\beta\Big)\Big((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\Big)^{-1},\\
b_1&=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^2p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)},\\
\omega&=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta},\\
\Lambda&=-2\upsilon\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)\times\\
&\left(45p-48p^2+12p^3+32p\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta^2\right)\left(\upsilon p^2-4\upsilon p+4\upsilon\right)\right),\\
\Delta&=(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right).
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

با جاگذاری رابطهٔ (۳۳) در رابطهٔ (۳۰) به همراه جواب‌های معادله خاترز روابط (۲۶)-(۷) به جواب‌های معادلهٔ (۱) را در قالب‌های مختلف بدین‌صورت داریم:

۲-۱. خانواده جواب‌های هایپربولیک

اگر $\beta^2-4\alpha\sigma<0$ و $\sigma\neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned}
q_{3-1-1}(Z,T)&=\Bigg[-\frac{\sqrt{2}}{16}\Big(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+\\
&9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^2-10\sqrt{\Lambda}\beta\Big)\Big((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\Big)^{-1}+\\
&\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^2p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)}\times\\
&\left(\frac{-\beta}{2\sigma}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\tanh\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)\right)\right)\Bigg]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},
\end{aligned}$$

و

$$q_{3-1-2}(Z,T)=\Bigg[-\frac{\sqrt{2}}{16}\Big(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+$$
$$9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^{2}-10\sqrt{\Lambda}\beta\Big)\Big((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\Big)^{-1}+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^{2}p(p-2)\big(8\sigma\alpha p-2\beta^{2}p+3\beta^{2}-12\sigma\alpha\big)}\times$$
$$\left(\frac{-\beta}{2\sigma}-\frac{\sqrt{\beta^{2}-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\coth\left(\frac{\sqrt{\beta^{2}-4\alpha\sigma}}{2}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_{0}\right)\right)\right)\Bigg]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

اگر $\beta^{2}+4\alpha^{2}>0,\ \sigma\neq 0$ و $\sigma=-\alpha$ داریم:

$$q_{3-1-3}(Z,T)=\Bigg[-\frac{\sqrt{2}}{16}\Big(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+$$
$$9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^{2}-10\sqrt{\Lambda}\beta\Big)\Big((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\Big)^{-1}+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^{2}p(p-2)\big(8\sigma\alpha p-2\beta^{2}p+3\beta^{2}-12\sigma\alpha\big)}\times$$
$$\left(\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^{2}+4\alpha\sigma}}{2\alpha}\tanh\left(\frac{\sqrt{\beta^{2}+4\alpha\sigma}}{2}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_{0}\right)\right)\right)\Bigg]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

و

$$q_{3-1-4}(Z,T)=\Bigg[-\frac{\sqrt{2}}{16}\Big(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+$$
$$9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^{2}-10\sqrt{\Lambda}\beta\Big)\Big((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\Big)^{-1}+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^{2}p(p-2)\big(8\sigma\alpha p-2\beta^{2}p+3\beta^{2}-12\sigma\alpha\big)}\times$$
$$\left(\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^{2}+4\alpha\sigma}}{2\alpha}\coth\left(\frac{\sqrt{\beta^{2}+4\alpha\sigma}}{2}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_{0}\right)\right)\right)\Bigg]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

اگر $\alpha\sigma<0,\ \sigma\neq 0$ و $\beta=0$ داریم:

$$q_{3-1-5}(Z,T)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{16}\left(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+\right.\right.$$
$$\left.9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^2-10\sqrt{\Lambda}\beta\right)\left((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\right)^{-1}+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^2 p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2 p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)}\times$$
$$\left.\left(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\sigma}}\tanh\left(\sqrt{-\alpha\sigma}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)\right)\right)\right]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

و

$$q_{3-1-6}(Z,T)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{16}\left(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+\right.\right.$$
$$\left.9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^2-10\sqrt{\Lambda}\beta\right)\left((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\right)^{-1}+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^2 p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2 p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)}\times$$
$$\left.\left(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\sigma}}\coth\left(\sqrt{-\alpha\sigma}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)\right)\right)\right]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

۲-۲. خانوادهٔ جواب‌های مثلثاتی

اگر $\beta^2-4\alpha\sigma<0$ و $\sigma\neq 0$ داریم:

$$q_{3-2-1}(Z,T)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{16}\left(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+\right.\right.$$
$$\left.9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^2-10\sqrt{\Lambda}\beta\right)\left((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\right)^{-1}+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^2 p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2 p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)}\times$$
$$\left.\left(\frac{-\beta}{2\sigma}+\frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2\sigma}\tan\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\sigma)}}{2}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)\right)\right)\right]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

و

$$q_{3-2-2}(Z,T)=\Bigg[-\frac{\sqrt{2}}{16}\Big(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+$$
$$9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^{2}-10\sqrt{\Lambda}\beta\Big)\Big((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\Big)^{-1}+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^{2}p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^{2}p+3\beta^{2}-12\sigma\alpha\right)}\times$$
$$\left(\frac{-\beta}{2\sigma}+\frac{\sqrt{-(\beta^{2}-4\alpha\sigma)}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{-(\beta^{2}-4\alpha\sigma)}}{2}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_{0}\right)\right)\right)\Bigg]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

اگر $\alpha\sigma>0,\sigma\neq 0$ و $\beta=0$ داریم:

$$q_{3-2-3}(Z,T)=\Bigg[-\frac{\sqrt{2}}{16}\Big(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+$$
$$9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^{2}-10\sqrt{\Lambda}\beta\Big)\Big((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\Big)^{-1}+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^{2}p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^{2}p+3\beta^{2}-12\sigma\alpha\right)}\times$$
$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\tan\left(\sqrt{\alpha\sigma}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_{0}\right)\right)\right)\Bigg]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

و

$$q_{3-2-4}(Z,T)=\Bigg[-\frac{\sqrt{2}}{16}\Big(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+$$
$$9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^{2}-10\sqrt{\Lambda}\beta\Big)\Big((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\Big)^{-1}+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^{2}p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^{2}p+3\beta^{2}-12\sigma\alpha\right)}\times$$
$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\cot\left(\sqrt{\alpha\sigma}\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_{0}\right)\right)\right)\Bigg]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

۳-۲. خانوادهٔ جواب‌های نمایی

اگر $\beta=0$ و $\alpha=-\sigma,$ داریم:

$$q_{3-3-1}(Z,T)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{16}\left(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+\right.\right.$$
$$\left.9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^2-10\sqrt{\Lambda}\beta\right)\left((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\right)^{-1}+$$
$$\left.\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^2 p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2 p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)}\times\left(\frac{e^{2\alpha\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)}+1}{e^{2\alpha\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0+\xi_0\right)}-1}\right)\right]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

اگر $\alpha=\sigma=0$ داریم:

$$q_{3-3-2}(Z,T)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{16}\left(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+\right.\right.$$
$$\left.9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^2-10\sqrt{\Lambda}\beta\right)\left((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\right)^{-1}+$$
$$\left.\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^2 p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2 p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)}\times\left(\frac{-(1+e^{2\beta\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)})}{2e^{\beta\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)}}\right)\right]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

اگر $\beta=\upsilon,\sigma=2\upsilon$ و $\alpha=0$ داریم:

$$q_{3-3-3}(Z,T)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{16}\left(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+\right.\right.$$
$$\left.9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^2-10\sqrt{\Lambda}\beta\right)\left((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\right)^{-1}+$$
$$\left.\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^2 p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2 p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)}\times\left(\frac{e^{\upsilon\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)}}{1-e^{\upsilon\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)}}\right)\right]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

اگر $\alpha=0$ داریم:

$$q_{3-3-4}(Z,T)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{16}\left(-5\sqrt{2}\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+2\sqrt{2}\Delta p\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}+\right.\right.$$
$$\left.9\sqrt{\Lambda}\beta p-2\sqrt{\Lambda}\beta p^2-10\sqrt{\Lambda}\beta\right)\left((p-2)\upsilon\Delta\sqrt{p\upsilon(-5+2p)}\right)^{-1}+$$
$$\left.\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sigma\sqrt{p\upsilon\Lambda(-5+2p)}}{\upsilon^2 p(p-2)\left(8\sigma\alpha p-2\beta^2 p+3\beta^2-12\sigma\alpha\right)}\times\left(\frac{\beta e^{\beta\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)}}{2-\sigma e^{\beta\left(\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}Z-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{\upsilon\Delta}T+\xi_0\right)}}\right)\right]^{\frac{1}{2p}}e^{i(\alpha Z+\beta T)},$$

که در آن ξ_0 و C ثابت‌های دلخواه هستند و در همه جواب‌های بالا

$$\Lambda = -2\upsilon\left(8\sigma\alpha p - 2\beta^2 p + 3\beta^2 - 12\sigma\alpha\right)\times$$
$$\left(45p - 48p^2 + 12p^3 + 32p\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2\right)\left(\upsilon p^2 - 4\upsilon p + 4\upsilon\right)\right),$$
$$\Delta = \left(p-2\right)\left(8\sigma\alpha p - 2\beta^2 p + 3\beta^2 - 12\sigma\alpha\right).$$

۴. نتیجه‌گیری

شاید بتوان گفت که وسیع‌ترین گسترهٔ کاربردی معادلات، به معادلهٔ شرودینگر به‌ویژه در فیزیک و شیمی مدرن و الکترونیک کوانتوم مربوط باشد. از این‌رو، در این مقاله سعی شده است تا با استفاده از روش منسوب به خاترز برای یافتن جواب‌های تحلیلی و دقیق از معادله غیرخطی شرودینگر با قانون توان دوگانه غیرخطی استفاده شود. جواب‌های حاصل از این روش دقیق و در مقایسه با جواب‌هایی که تاکنون با روش‌هایی مانند جیپریم جی، روش تانژانت هایپربولیک، روش خدریاشف، روش تابع نمایی و غیره مطرح شده دقت زیادتر و تنوع بیش‌تری دارد. از مزایای این روش می‌توان به تنوع جواب‌های حاصل اشاره کرد که در برگیرنده جواب‌های مطرح شده این گونه معادلات با چندین روش مختلف است.

منابع

1. Liu C., "Exact solutions for the higher-order nonlinear Schrödinger equation in nonlinear optical fibres", Chaos, Solitons Fractals, 23 (2005) 949-955.
2. Xu L., Zhang J., "Exact solutions to two higher order nonlinear Schr¨odinger equations", Chaos, Solitons and Fractals, 31 (2007) 937-942.
3. zis T. O, Yildirim A., "Reliable analysis for obtaining exact soliton solutions of nonlinear Schrodinger (NLS) equation", Chaos, Solitons and Fractals, 38 (2008) 209-212.
4. Yajima T., Wadati M., "Soliton Solution and Its Property of Unstable Nonlinear Schrodinger Equation", Journal of the Physical Society of Japan, 59 (1990) 41-47.
5. Baskonus H. M., Sulaiman T. A., Bulut H., "On the novel wave behaviors to the coupled nonlinear Maccaris system with complex structure", Optik, 131 (2017) 1036-1043.
6. Bulut H., Sulaiman T. A., Baskonus H. M., "Dark, bright and other soliton solutions to the Heisenberg ferromagnetic spin chain equation", Superlattices and Microstructures, IN PRESS, https://doi.org/10.1016/j.spmi.2017.12.009.
7. Wazwaz A. M., "The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations, Chaos", Solitons. Fractals., 31 (2007) 95-104.
8. Wang D. S., Zhang H. Q., "Further improved F-expansion method and new exact solutions of Konopelchenko-Dubrovsky equation, Chaos. Soliton", Fract., 25 (2005) 601-610.
9. Ebadi G., Biswas A., "The (G'/G) method and topological soliton solution of theK(m, n)

equation, Commun", Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 16 (2011) 2377-2382.

10. Zayed E. M. E., "A further improved (G'/G)-expansion method and the extended tanh-method for finding exact solutions of nonlinear PDEs", Wseas Transactions on Mathematics, 10 (2011) 56-64.
11. Fan E. G., "Two new applications of the homogeneous balance method", Phys. Lett. A., 265 (2000) 353-357.
12. Zayed E. M. E., Arnous A. H., "DNA dynamics studied using the homogeneous balance method", Chin. Phys. Lett., 29 (2012) 180-203.
13. Tascan F., Bekir A., "Analytic solutions of the (2+1)-dimensional nonlinear evolution equations using the sine-cosine method", Appl. Math. Comput., 215 (2009) 3134-3139.
14. Mostafa M. A. Khater Aly R., "Seadawy and Dianchen Lu, Elliptic and solitary wave solutions for Bogoyavlenskii equations system, couple Boiti-Leon-Pempinelli equations system and Time-fractional Cahn-Allen equation", Results in Physics 7 (2017) 2325-2333.