

مترهای فینسلری λ -هم‌ارز تصویری و پایاهای تصویری فینسلری

اکبر طیبی^{*}، مراد بهادری، حسن صادقی
دانشگاه قم، دانشکده علوم، گروه ریاضی
دریافت ۹۷/۰۸/۰۹ پذیرش ۹۸/۰۵/۰۱

چکیده

در این مقاله با استفاده از مفهوم مترهای متقارن کروی، مترهای λ -هم‌ارز تصویری را به‌عنوان تعمیمی طبیعی از مترهای هم‌ارز تصویری تعریف می‌کنیم. سپس، مثال‌های غیربدیهی از مترهای λ -هم‌ارز تصویری ارائه می‌کنیم. فرض کنید F و $\bar{F}$ دو متریک λ -هم‌ارز تصویری روی منیفلد M باشند. ابتدا رابطه بین ژئودزی‌های F و $\bar{F}$ را به‌دست می‌آوریم. سپس ثابت می‌کنیم که هر ژئودزی از F مضربی از یک ژئودزی $\bar{F}$ می‌شود و برعکس. در انتها ثابت می‌کنیم که مترهای داگلاس، مترهای ویل و مترهای داگلاس-ویل تعمیم یافته همگی پایاهای λ -هم‌ارز تصویری هستند.

واژه‌های کلیدی: پایای تصویری، متر مسطح تصویری، مترهای هم‌ارز تصویری، متر داگلاس، متر ویل، متر داگلاس-ویل تعمیم یافته.

مقدمه

مسئله چهارم هیلبرت^۱ در حالت هموار این است که مترهای فینسلری روی زیر مجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ را طوری پیدا کرد که ژئودزی‌هایشان خطوط راست باشند. مترهای فینسلری که در این شرط صدق کنند را مترهای مسطح تصویری می‌گویند [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۷]، [۱۹]، [۲۲]. هامل^۲ جواب‌هایی برای مسئله چهارم هیلبرت پیدا کرد [۵]. او دستگاهی از PDEها را معرفی کرد که مترهای فینسلری مسطح تصویری را مشخص می‌کردند. هم‌چنین هامل نشان داد که متر فینسلر $F = F(x, y)$ روی U مسطح تصویری است اگر و فقط اگر ضرایب ژئودزیک G^i آن بدین صورت باشند:

$$G^i(x, y) = P(x, y) y^i,$$

که در آن $P: TU = U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع همگن مثبت از درجه یک نسبت به y است، یعنی $P(x, \lambda y) = \lambda P(x, y)$ ، $\lambda > 0$. تابع $P = P(x, y)$ را عامل تصویری F می‌گویند. دو متر دلخواه F و $\bar{F}$ روی منیفلد M هم‌ارز تصویری نامیده می‌شوند اگر که

$$G^i(x, y) = \bar{G}^i(x, y) + P(x, y) y^i$$

که در آن $G^i = G^i(x, y)$ و $\bar{G}^i = \bar{G}^i(x, y)$ به‌ترتیب ضرایب ژئودزیک F و $\bar{F}$ هستند. در این حالت هر ژئودزیک اولی ژئودزیکی برای دومی است و برعکس.

حال فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر فینسلری روی منیفلد M باشد. آن‌گاه آنها را λ -هم‌ارز تصویری می‌نامیم اگر که ضرایب ژئودزیک آنها در رابطه (۱) صدق کند.

$$G^i(x, y) = \lambda \bar{G}^i(\lambda x, y) + P(x, y) y^i \quad (1)$$

که در آن λ یک عدد ثابت و $P = P(x, y)$ یک تابع همگن مثبت از درجه یک نسبت به y است. در این حالت نشان می‌دهیم که هر ژئودزیک F ضربی از ژئودزیک $\bar{F}$ می‌شود و برعکس. به آسانی می‌توان نشان داد که λ -هم‌ارز تصویری یک رابطه هم ارزی است. اگر $\lambda = 1$ آن‌گاه F و $\bar{F}$ هم‌ارز تصویری هستند. علاوه بر این اگر $\lambda = 0$ آن‌گاه F به یک متر مسطح تصویری^۱ کاهش می‌یابد. در بخش ۳، با استفاده از مفهوم متر متقارن کروی، مثال‌های غیربدیهی از مترهای فینسلری و ریمانی λ -هم‌ارز تصویری ساخته می‌شوند. در هندسه فینسلری متریک‌های مهم و معروف تصویری پایا همانند متر داگلاس^۲، متر ویل^۳ و غیره وجود دارند [۱]، [۲]، [۱۲]، [۱۳]، [۲۱]. متر فینسلری با شرط $D_{jkl}^i = 0$ و $W_j^i = 0$ به ترتیب متر داگلاس و متر ویل نامیده می‌شوند. هم‌چنین یک متر پایای تصویری پیچیده در هندسه فینسلری وجود دارد که تانسور داگلاس آن در رابطه $D_{jkl|m}^i y^m = T_{jkl} y^i$ صدق می‌کند که در آن T_{jkl} تانسور دلخواه و $D_{jkl|m}^i$ نمایش مشتق افقی کواریانت تانسور انحنای داگلاس نسبت به الصاق بروال F است. ثابت می‌شود که این رابطه، معادل با این است که به‌ازای هر سه میدان برداری خطی موازی $u = u(t)$ و $v = v(t)$ و $w = w(t)$ در طول ژئودزیک فینسلری دلخواه $c = c(t)$ تابع $T = T(t)$ چنان وجود دارد که

$$\frac{d}{dt}[D_{\dot{c}}(u, v, w)] = T\dot{c}.$$

برای مفهوم هندسی این موضوع [۱۲] و [۲۲] ملاحظه شود. چنین متریک‌های فینسلری مترهای داگلاس-ویل تعمیم یافته^۴ نامیده می‌شوند. برای منیفلد M فرض کنیم $GDW(M)$ نمایش‌دهنده کلاس مترهای داگلاس-ویل تعمیم یافته باشد. باکچو-پاپ^۵ نشان داد که $GDW(M)$ تحت تبدیلات تصویری یک مجموعه بسته است [۳]. ساکاگوچی^۶ کلاس منیفلدهای فینسلری با انحنای پرچمی اسکالر را بررسی کرده و ثابت کرد که هر متریک ویل یک متریک داگلاس-ویل تعمیم یافته است [۱۵]. در این مقاله ثابت می‌کنیم که کلاس مترهای داگلاس، مترهای ویل و مترهای داگلاس-ویل تعمیم یافته λ -هم‌ارز تصویری است.

قضیه ۱: فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر فینسلری λ -هم‌ارز تصویری روی منیفلد M باشند آن‌گاه داریم:

(i) $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزیک $\bar{F}$ است اگر و فقط اگر $\frac{1}{\lambda}\bar{\sigma}(t) := \sigma(t)$ یک ژئودزی F باشد،

(ii) F یک متر داگلاس است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر داگلاس باشد،

(iii) F یک متر ویل است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر ویل باشد،

(iv) F یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته باشد.

لازم به ذکر است که در این پژوهش از الصاق بروال مربوط به مترهای فینسلری استفاده می‌کنیم و مشتق افقی و عمودی کواریانت تانسورهای فینسلری به ترتیب با نمادهای $"|"$ و $"."$ نشان می‌دهیم.

مفاهیم مقدماتی

فرض کنید (M, F) یک منیفلد فینسلری باشد. یک میدان برداری خاص G وجود دارد که به وسیله F روی کلاف مماسی سفته $TM_0 := TM \setminus \{0\}$ تعریف می‌شود. در یک دستگاه مختصات استاندارد (x^i, y^i) برای TM_0 تعریف می‌کنیم.

1. Projectively flat metric
2. Douglas metric
3. Weyl metric
4. Generalized Douglas-Weyl metric
5. Baco-Pap
6. Sakaguchi

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

که در آن

$$G^i(x, y) := \frac{g^{il}}{4} \left\{ \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^k \partial y^l} y^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^l} \right\}$$

ضرایب ژئودزیک مربوط به F نامیده می‌شوند. میدان برداری G را اسپری مربوط به منیفلد فینسلر (M, F) می‌نامند. در این صورت تصویر یک منحنی انتگرال از G یک ژئودزی M نامیده می‌شود. در مختصات موضعی، یک منحنی $c = c(t)$ یک ژئودزیک از F است اگر و فقط اگر مختصات آن $(c^i(t))$ در معادله $\ddot{c}^i + 2G^i(\dot{c}) = 0$ صدق کند.

انحنای ریمانی $R_y = R_k^i dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} |_x : T_x M \rightarrow T_x M$ یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماسی TM است، که به صورت (۲) تعریف می‌شوند:

$$R_k^i = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^i \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^i \partial y^k} + 2G^i \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k} \quad (2)$$

برای یک بردار $y \in T_x M_0$ انحنای ویل^۱ با $W_y(u) := W_k^i(y) u^k \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$ تعریف می‌شود که در آن

$$W_k^i := A_k^i - \frac{1}{n+1} \frac{\partial A_k^m}{\partial y^m} y^i \quad (3)$$

و

$$A_k^i := R_k^i - R \delta_k^i, \quad R := \frac{1}{n-1} R_m^m$$

اگر $W = 0$ ، آنگاه F را یک متر ویل گویند.

برای بردار ناصفر $y \in T_x M_0$ تانسورهای $E_y : T_x M \otimes T_x M \rightarrow T_x M$ و $B_y : T_x M \otimes T_x M \otimes T_x M \rightarrow T_x M$ را به ترتیب با $E_y(u, v) := E_{ij}(y) u^i v^j$ و $B_y(u, v, w) := B_{jkl}^i(y) u^i v^j w^k \frac{\partial}{\partial x^l} |_x$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$B_{jkl}^i := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}, \quad E_{ij} := \frac{1}{2} B_{ijm}^m,$$

و $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$ ، $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$ و $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$ و E به ترتیب انحنای بروالد^۲ و انحنای میانگین بروالد^۳ مربوط به F نامیده می‌شوند [۱۸]، [۲۰]. اگر $B = 0$ و $E = 0$ آن گاه متر F را به ترتیب یک متر بروالد و متر بروالد ضعیف گویند.

با استفاده از انحنای بروالد و میانگین بروالد می‌توان انحنای داگلاس را به صورت $D_y : T_x M \otimes T_x M \otimes T_x M \rightarrow T_x M$ تعریف کرد که در آن

$$D_{jkl}^i := B_{jkl}^i - \frac{2}{n+1} \{ E_{jk} \delta_l^i + E_{jl} \delta_k^i + E_{kl} \delta_j^i + E_{jk, l} y^i \}.$$

متر فینسلری F که در شرط $D = 0$ صدق کند متر داگلاس نامیده می‌شود [۲]. به‌وضوح هر متر بروالدی یک متر داگلاس نیز هست. ولی مترهای داگلاسی وجود دارند که بروالدی نیستند.

1. Weyl curvature
2. Berwald curvature
3. Mean Berwald curvature

در هندسه فینسلری یک پایای تصویری پیچیده وجود دارد که برای یک $\binom{0}{3}$ -تانسور دلخواه T_{ijk} ، تانسور انحنای داگلاس F در رابطه (۴) صدق می‌کند

$$D_{jkl|m}^i y^m = T_{jkl} y^i. \quad (4)$$

اگر F در رابطه (۴) صدق کند آن‌گاه آن را یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته می‌گوییم. هم‌چنین در این حالت، به‌طور معادل داریم:

$$h_j^i D_{jkl|m}^i y^m = 0.$$

ثابت می‌شود که کلاس مترهای ویل (مترهای فینسلری با انحنای پرچمی اسکالر) و مترهای داگلاس زیر مجموعه کلاس مترهای داگلاس-ویل تعمیم یافته است.

مثال‌هایی از مترهای λ -هم‌ارز تصویری غیر بدیهی

به‌وضوح مترهای هم‌ارز تصویری و مترهای λ -هم‌ارز تصویری هستند. در این فصل با استفاده از مفهوم متر فینسلری متقارن کروی مثال‌های غیربدیهی λ -هم‌ارز تصویری ارائه می‌کنیم.

مثال ۱: به‌منظور ساختن مثال‌های غیربدیهی از مترهای λ -هم‌ارز تصویری، به مفهوم متر فینسلری متقارن کروی نیاز داریم. فرض کنیم $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک دامنه محدب و F یک متر فینسلری تعریف شده روی Ω باشد. اگر تبدیلات متعامد فضای $\mathbb{R}^n$ به‌عنوان ایزومتري‌هایی از (F, Ω) عمل کند آن‌گاه (F, Ω) فضای متقارن کروی^۱ نامیده می‌شود [۲۳]. در این حالت، (F, Ω) تحت هر دوران در $\mathbb{R}^n$ پایا می‌ماند. اخیراً زو نشان داده است که (F, Ω) متقارن کروی است اگر و فقط اگر F به‌صورت $F(x, y) = u \varphi(r, s)$ نوشته شود که در آن

$$s = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|}, \quad r = |x|, \quad u = |y|$$

و نمادهای $|\cdot|$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ به‌ترتیب نمایش‌دهنده نرم اقلیدسی و ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ است. مو-زو^۲ ضرایب اسپری ژئودزیک مربوط به متر فینسلری متقارن کروی $F = u \varphi(r, s)$ را به‌صورت (۵) به‌دست آورد [۱۰]:

$$G^i = u P y^i + u^2 Q x^i \quad (5)$$

که در آن

$$P := -\frac{1}{\phi} [s \phi + (r^2 - s^2) \phi_s] + \frac{1}{2r\phi} (s \phi_r + r \phi_s)$$

$$Q := \frac{-\phi_r + s \phi_{rs} + r \phi_{ss}}{2r[\phi - s \phi_s + (r^2 - s^2) \phi_{ss}]}$$

مترهای راندرز $F(x, y) = u \varphi(x, y)$ و $\bar{F} = u \bar{\varphi}(r, s)$ را با این رابطه‌ها تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(r, s) := \frac{1}{1 + r^2} + p(r)s,$$

$$\bar{\varphi}(r, s) := \frac{1}{1 + \lambda^2 r^2} + q(r)s,$$

1. Spherically symmetric metric
2. Mo-Zhou

که در آن $p := p(r)$ و $q := q(r)$ دو تابع هموار روی $\mathbb{R}^n$ هستند. با استفاده از رابطه (۵)، ضرایب اسپری F و $\bar{F}$ بدین صورت بیان می‌شوند:

$$G^i(x, y) = u p(r, s) y^i + \frac{u^2}{1 + r^2} x^i, \quad \bar{G}^i(x, y) = u q(r, s) y^i + \frac{u^2 \lambda^2}{1 + \lambda^2 r^2} x^i$$

به وضوح F و $\bar{F}$ دو متر λ -هم ارز تصویری است.

مثال ۲: مترهای ریمانی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\alpha(x, y) := u \exp(r^2), \quad \bar{\alpha}(x, y) := u \exp(\lambda^2 r^2),$$

که در آن λ یک عدد ثابت است. با یک محاسبه سرراست، ضرایب اسپری مترهای مذکور بدین صورت بیان می‌شوند:

$$G^i(x, y) = u p(r, s) y^i - u^2 x^i$$

$$\bar{G}^i(x, y) = u \bar{p}(r, s) y^i - \lambda^2 u^2 x^i$$

به وضوح α و $\bar{\alpha}$ دو متر λ -هم ارز تصویری هستند.

اثبات قضیه ۱

در این بخش، قصد داریم قضیه ۱ را ثابت کنیم. برای این کار، ابتدا روابط بین ژئودزیک‌های دومتر فینسلری λ -هم ارز تصویری را پیدا می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر فینسلری λ -هم ارز تصویری باشند. آن گاه $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزیک از $\bar{F}$ است اگر و فقط اگر $\sigma(t) := \frac{1}{\lambda} \bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزیک از F باشد.

اثبات: فرض کنیم $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزی $\bar{F}$ باشد. اسپری $\tilde{G}$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{G} := y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2 \tilde{G}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

که در آن $\tilde{G}^i(x, y) := \lambda \bar{G}^i(\lambda x, y)$ قرار می‌دهیم:

$$\sigma(t) := \frac{1}{\lambda} \bar{\sigma}(t).$$

آن گاه داریم:

$$2 \tilde{G}^i(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) = 2 \lambda \bar{G}^i\left(\bar{\sigma}(t), \frac{1}{\lambda} \dot{\bar{\sigma}}(t)\right) = \frac{2}{\lambda} \bar{G}^i(\bar{\sigma}(t)) \quad (۶)$$

چون $\bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزی $\bar{F}$ است پس داریم:

$$2 \bar{G}^i(\bar{\sigma}(t), \dot{\bar{\sigma}}(t)) + \lambda \ddot{\bar{\sigma}}(t) = 2 \tilde{G}^i(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) + \ddot{\sigma}(t) = 0. \quad (۷)$$

با استفاده از (۶) و (۷) داریم:

$$2 \tilde{G}^i(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) + \ddot{\sigma}(t) = 0$$

بنابراین $\sigma = \sigma(t)$ یک ژئودزیک از $\tilde{G}$ است. به آسانی دیده می‌شود که G و $\tilde{G}$ اسپری‌های هم ارز تصویری هستند (صفحه ۱۷۳، [۱۶]). از این رو، $\sigma = \sigma(t)$ یک ژئودزی F است.

فرض کنیم F و $\bar{F}$ دومتر λ -هم ارز تصویری با عامل تصویری $P = P(x, y)$ باشند. قرار می‌دهیم:

$$\Xi := P^2 - P_{x^k} y^k, \quad T_k := 3(P_{x^k} - P P_{y^k}) + E_{y^k}$$

آن‌گاه داریم:

لم ۲. فرض شود F و $\bar{F}$ دومتر λ -هم‌ارز تصویری روی منیفلد M باشند. آن‌گاه رابطه بین انحناهای ریمانی F و $\bar{F}$ بدین صورت است:

$$R^i_k(x, y) = \lambda^2 \bar{R}^i_k(\lambda x, y) + \Xi(x, y) \delta^i_k + T_k(x, y) y^i. \quad (۸)$$

اثبات: با قرار دادن رابطه (۱) در (۲) به (۸) می‌رسیم.

لم ۳. فرض کنیم F و $\bar{F}$ دومتر λ -هم‌ارز تصویری روی منیفلد n -بعدی M باشند. آن‌گاه F یک متر ویل است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر ویل باشد.

اثبات: با استفاده از لم ۲ داریم:

$$R(x, y) = \lambda^2 \bar{R}(\lambda x, y) + \Xi(x, y)$$

که در آن

$$R(x, y) := \frac{1}{n-1} R^m_m(x, y), \quad \bar{R}(x, y) := \frac{1}{n-1} \bar{R}^m_m(x, y). \quad (۹)$$

از (۳) و (۸) داریم:

$$A^i_k(x, y) = \lambda^2 \bar{A}^i_k(\lambda x, y) + T_k(x, y) y^i \quad (۱۰)$$

که در آن

$$A^i_k := R^i_k + R \delta^i_k \quad \text{و} \quad \bar{A}^i_k := \bar{R}^i_k + \bar{R} \delta^i_k$$

با استفاده از (۱۰) داریم:

$$\frac{\partial A^m_k(x, y)}{\partial y^m} = \lambda^2 \frac{\partial \bar{A}^m_k(\lambda x, y)}{\partial y^m} + (n+1) T_k(x, y) \quad (۱۱)$$

بنابراین از (۳) و (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$W^i_k(x, y) = \lambda^2 \bar{W}^i_k(x, y) \quad (۱۲)$$

طبق رابطه (۱۲)، دیده می‌شود که $W = 0$ اگر و فقط $\bar{W} = 0$.

لم ۴. فرض کنیم F و $\bar{F}$ دومتر λ -هم‌ارز تصویری روی منیفلد n -بعدی M باشند. آن‌گاه F یک متر داگلاس است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر داگلاس باشد.

اثبات: از (۱) نسبت به y^k, y^j و y^l مشتق می‌گیریم:

$$B^i_{jkl}(x, y) = \lambda \bar{B}^i_{jkl}(\lambda x, y) + P_{jkl}(x, y) y^i + P_{jk}(x, y) \delta^i_l + P_{lk}(x, y) \delta^i_j + P_{jl}(x, y) \delta^i_k, \quad (۱۳)$$

که در آن $P_{ij} := P_{y^i y^j}$ و $P_{ijk} := P_{y^i y^j y^k}$. نتیجه می‌شود که

$$2E_{kl}(x, y) = 2\lambda \bar{E}_{kl}(\lambda x, y) + (n+1) P_{kl}(x, y) \quad (۱۴)$$

از (۱۳) و (۱۴) داریم:

$$D^i_{jkl}(x, y) = \lambda D^i_{jkl}(\lambda x, y) \quad (۱۵)$$

طبق رابطه (۱۵)، $D = 0$ اگر و فقط $\bar{D} = 0$.

دو متر فینسلر تصویری F و $\bar{F}$ به‌طور خاص هم‌ارز تصویری هستند اگر عامل تصویری آنها $P = P(x, y)$ و نسبت به y خطی باشد یعنی $P_{y^i y^j} = 0$ ([۱۱] ملاحظه شود). به‌طور متشابه دو متر λ -هم‌ارز تصویری F و $\bar{F}$ را به‌طور خاص λ -هم‌ارز تصویری گوئیم اگر که $P = P(x, y)$ نسبت به y خطی باشد.

با استفاده از (۱۳) و (۱۴) نتیجه ۱ به دست می آید.

نتیجه ۱. فرض شود F و $\bar{F}$ دو متر فینسلری به طور خاص λ -هم ارز تصویری باشند. آن گاه داریم:

(i) متر بروالد است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ متر بروالد باشد.

(ii) متر بروالد ضعیف است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ متر بروالد ضعیف باشد.

کمیت غیرریمانی $H_y = H_{ij} dx^i \otimes dx^j$ به صورت مشتق کواریانت از انحنا میانگین بروالد E در طول ژئودزیک تعریف می شود. یعنی

$$H_{ij} := E_{ij|m} y^m$$

می توان H -انحنا را بدین صورت نوشت:

$$2H_{ij} = y^m \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial x^m} - 2G^m \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial G^m}{\partial y^i} \frac{\partial^3 G^k}{\partial y^j \partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial G^m}{\partial y^j} \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^k \partial y^m}$$

فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر λ -هم ارز تصویری روی منیفلد n -بعدی M باشند و G^i و $\bar{G}^i$ ضرایب ژئودزیک مربوط به F و $\bar{F}$ باشند. قرار می دهید:

$$\frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - 2\bar{G}_j^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - 2G_j^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

آن گاه به دست می آوریم:

$$\bar{H}_{ij} = y^r \frac{\delta}{\delta x^r} \bar{E}_{ij}$$

$$= \left(y^r \frac{\delta}{\delta x^r} - 2P y^r \frac{\delta}{\delta y^r} \right) \left(\lambda E_{ij} + \frac{n+1}{2} P_{ij} \right) - \left(\lambda E_{rj} + \frac{n+1}{2} P_{rj} \right) (G_i^r + P_i y^r + P \delta_i^r) - \left(\lambda E_{ir} + \frac{n+1}{2} P_{ir} \right) (G_j^r + P_j y^r + P \delta_j^r)$$

از رابطه بالا داریم:

$$\bar{H}_{ij} = \lambda H_{ij} \frac{(n+1)}{2} P_{ij|s} y^s \quad (16)$$

با استفاده از (۱۶) نتیجه به دست می آید:

نتیجه ۲. فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر به طور خاص λ -هم ارز تصویری باشند. آن گاه $\bar{H} = 0$ اگر و تنها اگر $H = 0$.

لم ۴. فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر λ -هم ارز تصویری باشند. آن گاه F یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته باشد.

اثبات: فرض شود F یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته باشد آن گاه

$$h_i^r D_{jkl|m}^i y^m = 0. \quad (17)$$

تعریف (۱۷) معادل است با

$$h_i^r(x, y) \left[\frac{\partial D_{jkl}^i}{\partial x^m}(x, y) - D_{jk,t}^i(x, y) G_m^t(x, y) + G_{mt}^i(x, y) D_{jkl}^t(x, y) - G_{mj}^t(x, y) D_{tkl}^i(y, x) - G_{mk}^t(y, x) D_{tlj}^i(x, y) - G_{ml}^t(x, y) D_{tjk}^i(x, y) \right] y^m = 0 \quad (18)$$

که در آن

$$D_{jkl,t}^i := \frac{\partial D_{jkl}^i}{\partial y^t}, \quad G_j^i := \frac{\partial G^i}{\partial y^j}, \quad G_{jk}^i := \frac{\partial G_j^i}{\partial y^k}$$

با استفاده از (۱) به دست می‌آوریم:

$$G_j^i(x, y) = \lambda \bar{G}_j^i(\lambda x, y) + P_j(x, y)y^j + P(x, y)\delta_j^i \quad (19)$$

$$G_{jk}^i(x, y) = \lambda \bar{G}_{jk}^i(\lambda x, y) + P_{jk}(x, y)y^j + P_j(x, y)\delta_k^i + P_k(x, y)\delta_j^i \quad (20)$$

که در آن

$$\bar{G}_j^i := \frac{\partial \bar{G}^i}{\partial y^j}, \quad \bar{G}_{jk}^i := \frac{\partial \bar{G}_j^i}{\partial y^k}, \quad P_i := \frac{\partial P}{\partial y^i}, \quad P_{ij} := \frac{\partial P_i}{\partial y^j}$$

با قرار دادن (۱۹) و (۲۰) در (۱۸) به رابطه (۲۱) می‌رسیم.

$$\begin{aligned} h_i^r(x, y) & \left[\frac{\partial D_{jkl}^i}{\partial x^m}(x, y) - D_{jkl,t}^i(x, y) \{ \lambda \bar{G}_m^t(\lambda x, y) + P_m(x, y)y^t + P(x, y)\delta_m^t \} \right. \\ & + D_{jkl}^t(x, y) \{ \lambda \bar{G}_{mt}^i(\lambda x, y) + P_{mt}(x, y)y^i + P_m(x, y)\delta_t^i + P_t(x, y)\delta_m^i \} \\ & - D_{tkl}^i(x, y) \{ \lambda \bar{G}_{mj}^t(\lambda x, y) + P_{mj}(x, y)y^t + P_m(x, y)\delta_j^t + P_j(x, y)\delta_m^t \} \\ & - D_{tlj}^i(x, y) \{ \lambda \bar{G}_{mk}^t(\lambda x, y) + P_{mk}(x, y)y^t + P_m(x, y)\delta_k^t + P_k(x, y)\delta_m^t \} \\ & \left. - D_{tjk}^i(x, y) \{ \lambda \bar{G}_{ml}^t(\lambda x, y) + P_{ml}(x, y)y^t + P_m(x, y)\delta_l^t + P_l(x, y)\delta_m^t \} \right] y^m = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

با استفاده از رابطه (۲۱) داریم:

$$\frac{\partial D_{jkl}^i}{\partial x^m}(x, y) = \lambda^2 \frac{\partial D_{jkl}^i}{\partial x^m}(\lambda x, y) \quad (22)$$

(۱۵) و (۲۲) را در (۲۱) قرار می‌دهیم. رابطه (۲۳) به دست می‌آید:

$$h_i^r \bar{D}_{jkl|m}^i(\lambda x, y)y^m = 0. \quad (23)$$

چون $\bar{h}_i^l = h_i^r \bar{h}_r^l$ آن گاه با ضرب (۲۳) در $\bar{h}_r^l$ داریم:

$$\bar{h}_i^l \bar{D}_{jkl|m}^i(\lambda x, y)y^m = 0$$

بنابراین $\bar{F}$ یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته می‌شود و اثبات عکس به همین روش انجام می‌شود. اثبات قضیه ۱. با استفاده از لم‌های ۱، ۳، ۴ و ۵، قضیه ۱ اثبات می‌شود.

منابع

1. Akbar-Zadeh H., "Champ de vecteurs projectifs sur le fibre unitaire", J. Math. Pures Appl. 65 (1986) 47-79.
2. Bacso S., Matsumoto M., "On Finsler spaces of Douglas type, A generalization of notion of Berwald space", Publ. Math. Debrecen, 51 (1997) 385-406.
3. Bacso S., Papp I., "A note on a generalized Douglas space", Periodica Math. Hungarica, 48 (2004) 181-184.
4. Balan V., Stojanov J., "Finsler-type estimators for the cancer cell population dynamics", Publ. Inst. Math (Beograd) (N.S) 98 (2015) 53-69.

5. Hamel G., "Über die Geometrien in denen die Geraden die Kuurtzesten sind", Math. Ann. 57 (1903) 231-264.
6. Li B., "On the classification of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature", Adv. Math, 257 (2014) 266-284.
7. Mo X., "On some projectively flat Finsler metrics in terms of hypergeometric functions", Israel. J. Math, 184 (2011) 59-78.
8. Mo X., "An Introduction to Finsler geometry, World Scientific Press (2006).
9. Mo X., Wang X., "On projectively related spherically symmetric Finsler metrics", Publ. Math. Debrecen, 88 (2016) 249-259.
10. Mo X., Zhou L., "The curvatures of spherically symmetric Finsler metrics in R^n ", arXiv, 1202, 4543.
11. Rafie-Rad M., Rezaei B., "On the projective algebra of Randers metrics of constant flag curvature", SIGMA, 7, 085 (2011) 12.
12. Najafi B., Shen Z., Tayebi A., "On a projective class of Finsler metrics", Publ. Publ. Math. Debrecen, 70 (2007) 211-219.
13. Najafi B., Tayebi A., "A new quantity in Finsler geometry", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 349 (2011) 81-83.
14. Najafi B., Tayebi A., "Finsler metrics of scalar flag curvature and projective invariants", Balkan, J. Geom. Appl. 15 (2010) 90-99.
15. Sakaguchi T., "On Finsler spaces of scalar curvature", Tensor N.S, 38 (1982) 211-219.
16. Shen Z., "Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2011).
17. Shen Z., "Projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature", Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003) 1713-1728.
18. Tayebi A., "On the class of generalized Landsberg manifolds", Periodica Math Hungarica, 72 (2016) 29-36.
19. Tayebi A., Alipour A., "On distance functions induces by Finsler metrics", Publ Math. Debrecen, 90 (2017) 333-357.
20. Tayebi A., Barzegari M., "Generalized Berwald spaces with (α, β) -metrics", Insdagatione. Math, 27 (2016) 670-683.
21. Tayebi A., Sadeghi H., "On generalized Douglas-Weyl (α, β) –metrics", Acta Math. Sinica. Engl. Ser, 31 (10) (2015) 1611-1620.

22. Tayebi A., Shahbazi Nia M., "A new class of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature $K=1$ ", Differential Geom. Appl. 41 (2015) 123-133.
23. Zhou L., "The spherically symmetric Finsler metrics with isotropic S-curvature", J. Math. Anal. Appl, 431 (2015) 1008-1021.