توصیف جابه‌جاگر عملگرهای ضربی در فضاهای برگمن روی چندقرصی

علی آبکار
دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، دانشکدهٔ علوم پایه،گروه ریاضی محض

دریافت ۹۷/۱۱/۲۲ پذیرش ۹۸/۰۹/۰۲

چکیده

در این مقاله توصیفی از جابه‌جاگر یک عملگر ضربی خاص روی فضای برگمن وزن دار در چندقرصی مختلط ارایه می‌دهیم. بدین‌ترتیب به تعمیم حکم مشابهی از فضای برگمن وزن‌دار در قرص یکه صفحه مختلط به حالت چندمتغیره مختلط دست می‌یابیم.

واژه‌های کلیدی: فضای برگمن وزن دار. عملگر ضربی. جابه‌جاگر عملگر. چندقرصی مختلط

رده‌بندی موضوعی: 47B38, 46E20 , 30H20, 32A36

مقدمه

یکی از مباحث نظریه عملگرها تعیین و توصیف *جابه‌جاگر*[۱] عملگرهای خطی کراندار است. فرض کنیم T یک عمگر خطی کراندار بر فضای باناخ X باشد. منظور از جابه‌جاگر T عبارت است از مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار چون S که با T جابه‌جا می شوند یعنی

$$\{T\}' = \{S \in B(X): ST = TS\}$$

که در آن $B(X)$ فضای همهٔ عملگرهای خطی کراندار بر X است.

فرض کنیم D قرص یکه باز در صفحه مختلط و X یک فضای تابعی باناخ رویِ D باشد که در این شرایط صدق می‌کند:

۱. X یک زیرفضای برداری فضای تابع های تحلیلی بر قرص یکه باز است،
۲. تابعک خطی مقداریابی $f \mapsto f(a)$ ، به ازای هر $a \in D$ ، بر X کراندار است،
۳. اگر $f \in X$،آن‌گاه $zf \in X$،
۴. اگر $f \in X$ و $f(a) = 0$، آن‌گاه تابع $h \in X$ وجود دارد که $(z-a)h = f$.

با استفاده از سه شرط اول و قضیه نمودار بسته می‌توان نشان داد که عملگر ضربی $f \mapsto zf$ بر X کراندار است [۷].

فرض کنید X یک فضای تابعی باناخ باشد که در شرایط بالا صدق می‌کند. تابع مختلط-مقدار g را یک ضرب‌گر X نامند اگر $gX \subset X$. توجه کنید که چون به‌ازای هر $f \in X$، تابع‌های f و gf تحلیلی‌اند، پس g نیز تحلیلی است. اگر g یک ضرب‌گر باشد، با استفاده از قضیهٔ نمودار بسته ثابت می‌شود که تبدیل خطی زیر کراندار است:

$$M_g: X \to X, \qquad M_g(f) = gf.$$

هر چنین عملگری را یک عملگر ضربی می‌نامند. مجموعه همهٔ ضرب‌گرهای X را با $M(X)$ نشان می‌دهند. مشهور است ([۷] ملاحظه شود.) که $M(X) \subset H^\infty(D)$ که در آن $H^\infty(D)$ فضای تابع‌های تحلیلی کراندار بر قرص یکه‌باز

---

*نویسنده مسئول abkar@sci.ikiu.ac.ir

1. Commutant

است. توجه کنید که $M(X)$ شامل همه چندجمله‌ای‌ها است، و اگر $1 \in X$، آن‌گاه

$$M(X) \subset X \cap H^{\infty}(D).$$

در این مقاله با فضاهای مجرد مانند X سروکار نداریم و توجه خود را منحصرا به فضای برگمن معطوف می‌کنیم، در واقع هدف از بیان مفاهیم بالا آن است که نتایج این مقاله را می‌توان به فضاهای کلی‌تری مانند فضاهای تابعی باناخ، و به‌ویژه به فضاهای تابعی هیلبرت تعمیم داد. مطالب بالا برگرفته از [۷] است.

از این به بعد فرض می‌کنیم که X فضای برگمن روی قرص یکه باز است، یعنی فضای متشکل از همه تابع های تحلیلی f روی قرص یکه باز به‌طوری‌که

$$\int_D |f(z)|^2 dA(z) < \infty$$

که در آن $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$ اندازهٔ مساحتی نرمال شده در قرص یکه است. نرم تابع f در فضای برگمن بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\|f\|^2 = \int_D |f(z)|^2 \, dA(z)$$

فضای برگمن را با نماد $A^2(D)$ نشان می‌دهیم که با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z) \, \overline{g(z)} \, dA(z)$$

(به‌عنوان زیرفضایی بسته از $L^2(D)$) یک فضای هیلبرت است.

یکی از ویژگی‌های مهم فضای برگمن آن است که عملگر خطی مقداریابی بر آن کراندار است. این حکم نتیجه‌ای از نابرابری مهم زیر است (برای اثبات [۲] صفحهٔ ۶، یا [۶] صفحه ۲ ملاحظه شود): به‌ازای هر زیرمجموعه فشرده K از قرص یکه، عدد ثابت C_K وجود دارد که به‌ازای هر $z \in K$ داریم:

$$|f(z)| \leq C_K \, \|f\|. \tag{۱}$$

با استفاده از *قضیهٔ نمودار بسته*[۱] می‌توان نشان داد که M_g بر فضای برگمن عملگری کراندار است: فرض کنید $f_n \to f$ در نرم (f_n دنباله‌ای از عناصر $A^2(D)$ است) و $gf_n \to h$. اکنون از (۱) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ فشرده K از قرص یکه، عدد ثابت C_K وجود دارد که به‌ازای هر $z \in K$ داریم:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq C_K \|f_n - f\|.$$

بنابراین $f_n(z) \to f(z)$ (به‌طور یکنواخت روی K)، به‌ویژه به‌ازای هر $z \in K$ داریم:

$$g(z) f_n(z) \to g(z) f(z).$$

از طرف دیگر، $gf_n \to h$ (در نرم) و در نتیجه $g(z) f_n(z) \to h(z)$. اکنون از یکتایی حد نقطه‌ای نتیجه می‌شود که $h = gf$. بنابراین M_g کراندار است. روشن است که

$$\|M_g\| \leq \|g\|_{\infty} = sup\{|g(z)|: \ z \in D\},$$

به‌واقع، می‌توان نشان داد که برابری برقرار است ([۳] ص ۱۵۴).

اکنون پرسش این است که شکل کلی عضوی از جابه‌جاگر یک عملگر ضربی مفروض روی فضای برگمن چگونه است؟

پاسخ به این پرسش در حالت کلی با پیچیدگی‌هایی همراه است ولی در حالتی که تابع ضرب‌گر به شکل تک‌جمله‌ای باشد پیشرفت‌های ملموسی صورت گرفته است ([۱]، [۴]، [۸]، [۱۰] ملاحظه شود). ساده‌ترین حالت آن است که فرض کنیم $g(z) = z$ تابع همانی است. مشهور است که اگر X فضای برگمن روی قرص یکه باشد،

1. Closed Graph Theorem

جابه‌جاگر عملگر ضربی M_z برابر رده عملگرهایی به‌صورت M_g است که در آن g یک تابع تحلیلی کراندار است ([۸] لم ۶ یا [۳] قضیهٔ ۲۹-۱۴ (آ)، صفحهٔ ۱۵۳). در واقع، نگاشت $g \mapsto M_g$ یک یکریختی طولپای از $H^\infty(D)$ روی $\{M_z\}'$ است ([۳] ص ۱۵۳).

در گام بعدی حالتی را در نظر می‌گیریم که $g(z) = z^2$ است. این مسئله نخست به‌وسیلهٔ ک. ژو[1] برای فضای برگمن استاندارد در[۱۰] و سپس برای فضای برگمن وزن‌دار در [۱] بررسی شد. در این مقاله قصد داریم مسئله را برای عملگر مشابه در فضای برگمن وزن‌دار روی چندقرصی[2] بررسی کنیم.

فضای برگمن وزن‌دار

فرض کنید $-1 < \alpha < \infty$. به تابع

$$w(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha$$

وزن استاندارد فضای برگمن در قرص یکه باز می‌گویند. فضای برگمن وزن‌دار عبارت است از فضای متشکل از همهٔ تابع‌های تحلیلی f روی قرص یکه‌باز به‌طوری‌که

$$\int_D |f(z)|^2 w(z)\, dA(z) < \infty$$

که در آن $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$ اندازه مساحتی نرمال شده در قرص یکه‌باز است. نرم تابع f در فضای برگمن وزن‌دار بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\|f\|^2 = (\alpha+1) \int_D |f(z)|^2\, (1-|z|^2)^\alpha dA(z)$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که فضای برگمن وزن‌دار که آن را با $A^2_\alpha(D)$ نشان می‌دهند یک فضای هیلبرت است که در آن ضرب داخلی بدین‌صورت تعریف می شود:

$$\langle f, g\rangle = (\alpha+1) \int_D f(z)\overline{g(z)}\, (1-|z|^2)^\alpha dA(z).$$

برای محاسبه نرم تابع‌ها در این فضا لازم است رابطهٔ بین تابع‌های گاما و بتا را یادآوری کنیم:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-x}\, dt\,, \qquad x > 0,$$

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\, dt\,, \qquad m,n > 0,$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

حال می‌توان برای محاسبهٔ نرم در فضای برگمن وزن‌دار مبادرت کرد: با محاسبه‌ای معلوم می‌شود که

$$\|z^n\|^2 = (\alpha+1) \iint |z^n|^2 (1-|z|^2)^\alpha dA(z) = \;= 2(\alpha+1)\int_0^1 r^{2n}(1-r^2)^\alpha r dr = (\alpha$$

$$= +1) \int_0^1 t^n (1-t)^\alpha dt = (\alpha+1) B(n+1, \alpha+1)$$

$$= (\alpha+1)\tfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)}$$

1. Kehe Zhu
2. polydisk

$$= \frac{n!\,\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}.$$

در نتیجه اگر $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ آن‌گاه داریم:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)} |a_n|^2.$$

از بحث بالا نتیجه می‌شود که بردارهایی به‌صورت

$$e_n(z) = \left(\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\,\Gamma(\alpha+2)}\right)^{1/2} z^n, \qquad n = 0,1,2, \ldots.$$

یک پایهٔ یکامتعامد برای فضای برگمن وزن‌دار تشکیل می‌دهند (زیرا اگر $\|z^n\|^2 = a_n$ آن‌گاه نرم $\frac{1}{\sqrt{a_n}} z^n$ برابر 1 است. ضمنا تعامد این بردارها هم از محاسبات بالا و رابطهٔ

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta = 0, \qquad m \neq n$$

بدیهی است ([۶] صفحهٔ ۴ ملاحظه شود) با معلوم بودن پایه یکامتعامد، می‌توان هسته بازمولد هر فضای هیلبرت متشکل از تابع‌های تحلیلی را حساب کرد ([۵] صفحهٔ ۱۰). در واقع، هسته بازمولد فضای برگمن وزن‌دار عبارت است از

$$\begin{aligned} K_z(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\,\Gamma(\alpha+2)} (\bar{z}w)^n \\ &= \frac{1}{(1-\bar{z}\,w)^{\alpha+2}}. \end{aligned}$$

برای بررسی بیش‌تر در مورد این فضاهای برگمن و مطالب مفید دیگر، خواننده علاقه‌مند میتوانند به [۵] و [۶] مراجعه کنند.

برای بیان نتیجه اصلی این مقاله در مورد جابه‌جاگر عملگر M_g که در آن $g(z) = z^2$ یادآوری می‌کنیم که هر تابع از فضای برگمن وزن‌دار را می‌توان به‌صورت

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z)$$

نوشت که در آن

$$f_0(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2}$$

تابعی زوج و

$$f_1(z) = \frac{f(z)-f(-z)}{2}$$

تابعی فرد است.

قضیهٔ ۱. [۱]، [۱۰]. عملگر خطی و کراندار $T: A_\alpha^2(D) \to A_\alpha^2(D)$ با عملگر ضربی M_{z^2} جابه‌جا می‌شود اگر و فقط اگر تابع‌های تحلیلی کراندار F , G موجود باشند به‌طوری‌که

$$T(f) = Ff_0 + \frac{Gf_1}{z}, \qquad (f = f_0 + f_1).$$

فضای برگمن روی چندقرصی

حال به بررسی عملگر ضربی روی فضای برگمن وزن‌دار در چندقرصی می‌پردازیم. قصد داریم نتایج قبل را به فضاهای برگمن وزن‌دار روی چندقرصی تعمیم دهیم. برای این منظور از تعریف چندقرصی آغاز می‌کنیم. فرض کنید D نشان‌دهندهٔ قرص یکه‌باز در صفحه مختلط باشد. قرار می‌دهیم:

$$D^n = D \times D \times \cdots \times D$$
$$= \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n : \quad |z_k| < 1\}.$$

مجموعهٔ D^n را چندقرصی می‌نامند. فرض کنید $Hol(D^n)$ فضای همه تابع های تمامریخت بر چندقرصی باشد. فضای برگمن وزن‌دار روی چندقرصی عبارت است از

$$A_\alpha^2(D^n) = Hol\,(D^n) \cap L^2(D^n, dV_\alpha)$$

که در آن

$$dV_\alpha(z) = dA_\alpha(z_1) \cdots dA_\alpha(z_n),$$

و به‌ازای هر k

$$dA_\alpha(z_k) = \frac{(\alpha+1)}{\pi}(1 - |z_k|^2)^\alpha \, dx_k dy_k.$$

بنابراین تابع چند متغیره

$$f(z_1, \dots, z_n) \in Hol\,(D^n)$$

به فضای برگمن $A_\alpha^2(D^n)$ تعلق دارد اگر

$$\|f\|^2 = \int_D |f(z_1, \dots, z_n)|^2 dA_\alpha(z_1) \cdots dA_\alpha(z_n) < \infty.$$

حال چنداندیسی[۱] B را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$

که در آن هر b_k یک عدد صحیح نامنفی است. برای

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in D^n$$

تعریف می‌کنیم

$$z^B = z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n}.$$

مشابه حالت یک متغیره قرار می‌دهیم (توجه کنید که هر b_j یک عدد صحیح نامنفی است)

$$e_B = \frac{z^B}{\gamma_{b_1} \dots \gamma_{b_n}}, \qquad \gamma_n = \left(\frac{n!\,\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+n+2)}\right)^{1/2}.$$

با این نمادگذاری ([۸] ملاحظه شود.) معلوم می‌شود که مجموعه

$$\{e_B : \text{یک چنداندیسی است } B\}$$

پایه‌ای یکامتعامد برای فضای برگمن وزن‌دار روی چندقرصی است: فرض کنید $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, \dots, b_n)$ دو چنداندیسی متمایز باشند. پس عدد صحیح نامنفی $1 \le k \le n$ وجود دارد که $a_k \neq b_k$. بنابراین عامل $\langle z_k^{a_k}, z_k^{b_k} \rangle$ در حاصل‌ضرب داخلی $\langle z^A, z^B \rangle$ برابر صفر است. یکه بودن این بردارها هم بدیهی است، به‌علاوه اگر تابعی بر همهٔ این بردارها عمود باشد، تمام ضرایب سری تیلور آن صفر می‌شوند، یعنی مجموعه متشکل از تمام e_Bها که در آن B چنداندیسی دلخواه است، مجموعه‌ای یکامتعامد و ماکسیمال است.

تابع هسته برگمن متناظر با نقاط

$$z = (z_1, \dots, z_n), \qquad w = (w_1, \dots, w_n)$$

1. Multi-index

از چندقرصی عبارت است از

$$K_z(w) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(1 - w_j \overline{z}_j\right)^{\alpha+2}}$$
$$= k_{z_1}(w_1) \cdots k_{z_n}(w_n).$$

از این‌رو برای هر تابع $f \in A_\alpha^2(D^n)$ و هر نقطه $(z_1, \dots, z_n) \in D^n$ داریم

$$f(z_1, \dots, z_n) =$$
$$\int_{D^n} f(w_1, \dots, w_n)\, \overline{k_{z_1}(w_1)} \cdots \overline{k_{z_n}(w_n)}\ dA_\alpha(w_1) \dots dA_\alpha(w_n).$$

عملگر ضربی روی چندقرصی

اکنون می‌خواهیم عملگر ضربی

$$M_{z_1^2}: A_\alpha^2(D^n) \to A_\alpha^2(D^n)$$

با ضابطهٔ زیر را بررسی کنیم

$$f(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^2 f(z_1, \dots, z_n).$$

برای ساده‌تر شده موضوع فرض می‌کنیم که $n = 2$. پس با ثابت نگه داشتن متغیر دوم یعنی z_2 می‌خواهیم عملگر

$$M_{z_1^2}: A_\alpha^2(D^2) \to A_\alpha^2(D^2)$$

با ضابطهٔ

$$f(z_1, z_2) \mapsto z_1^2 f(z_1, z_2)$$

را بررسی کنیم. روشن است که برای تابع یک متغیره

$$g(z_1) = f(z_1, z_2)$$

داریم

$$f(z_1, z_2) = f_0(z_1, z_2) + f_1(z_1, z_2)$$

که در آن

$$f_0(z_1, z_2) = \frac{f(z_1,z_2) + f(-z_1,z_2)}{2},$$

و

$$f_1(z_1, z_2) = \frac{f(z_1, z_2) - f(-z_1, z_2)}{2},$$

تجزیه f به تابع‌های زوج و فرد بر حسب متغیر اول است.

ثابت می‌کنیم که عملگر $T: A_\alpha^2(D^2) \to A_\alpha^2(D^2)$ با عملگر ضربی

$$M_{z_1^2}: A_\alpha^2(D^2) \to A_\alpha^2(D^2)$$

جابه‌جا می‌شود اگر و فقط اگر تابع‌هایی مانند

$$h_0(z_1, z_2), \qquad h_1(z_1, z_2)$$

در فضای $H^\infty(D^2)$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$Tf(z_1, z_2) = h_0(z_1, z_2) f_0(z_1, z_2) + \frac{h_1(z_1, z_2) f_1(z_1, z_2)}{z_1}.$$

تبصره. فرض $n = 2$ چیزی از کلیت حکم کم نمی‌کند. زیرا اگر قرار دهیم

$$z' = (z_2, \dots, z_n)$$

آن‌گاه داریم

$$f(z_1, \dots, z_n) = f(z_1, z')$$

که در آن z' در بحث ما ثابت است. ضمناً بررسی عملگر

$$f(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_k^2 f(z_1, \dots, z_n)$$

برای k ثابت نیز چیزی از کلیت حکم کم نمی‌کند.

برای نیل به هدف اصلی این مقاله با قضیهٔ ۲ آغاز می‌کنیم.

قضیهٔ ۲. فرض کنید h_0, h_1 تابع‌هایی تحلیلی و کران‌دار در چندقرصی $D \times D$ باشند. در این صورت عملگر

$$T: A_\alpha^2(D^2) \to A_\alpha^2(D^2)$$

با ضابطهٔ

$$Tf = h_0 f_0 + \frac{h_1 f_1}{z_1}, \qquad (f = f_0 + f_1)$$

کراندار است.

برهان. چون h_0, h_1 تابع هایی کراندارند و

$$\| f_0 \| \le \| f \|$$

پس برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم عدد $C > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\| f_1 / z_1 \| \le C \| f \|.$$

برای این منظور فرض کنید $f \in A_\alpha^2(D \times D)$ دارای نمایش سری توانی

$$f(z_1, z_2) = \sum\nolimits_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} z_1^m z_2^n$$

باشد. بنابراین داریم

$$\| f \|^2 = \sum\nolimits_{m,n=0}^{\infty} \frac{m!\, n!\, \Gamma(\alpha+2)^2}{\Gamma(\alpha+m+2)\Gamma(\alpha+n+2)} |a_{m,n}|^2$$

و مشابهاً برای نرم تابع $z_1 f(z_1, z_2)$ داریم

$$\| z_1 f \|^2 = \sum\nolimits_{m,n=0}^{\infty} \frac{(m+1)!\, n!\, \Gamma(\alpha+2)^2}{\Gamma(\alpha+m+3)\Gamma(\alpha+n+2)} |a_{m,n}|.^2$$

چون $\alpha + 2 \ge 1$ داریم

$$1 + \frac{m}{\alpha+2} \le m + 1$$

و یا

$$\alpha + 2 + m \le (\alpha+2)(m+1).$$

در نتیجه داریم

$$\frac{\Gamma(\alpha+m+3)}{\Gamma(\alpha+m+2)} \le (\alpha+2)(m+1).$$

اما این هم‌ارز است با

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+m+2)(\alpha+2)} \le \frac{m+1}{\Gamma(\alpha+m+3)}.$$

از این نابرابری نتیجه می‌شود که

$$\frac{m!\, n!\, \Gamma(\alpha+2)^2}{(\alpha+2)\Gamma(\alpha+m+2)\Gamma(\alpha+n+2)} |a_{m,n}|^2 \le \frac{(m+1)!\, n!\, \Gamma(\alpha+2)^2}{\Gamma(\alpha+m+3)\Gamma(\alpha+n+2)} |a_{m,n}|^2$$

و از آن‌جا

$$\| f \|^2 \le (\alpha+2) \| z_1 f \|^2 .$$

اکنون فرض کنید

$$f(0,z_2)=0$$

و قرار دهید

$$g(z_1,z_2)=\frac{f(z_1,z_2)}{z_1}.$$

یادآوری می‌کنیم که که فضای برگمن $A_\alpha^2(D)$ ویژگی تقسیم دارد یعنی اگر $f(a)=0$ آن‌گاه تابع

$$g(z)=\frac{f(z)}{z-a}$$

به $A_\alpha^2(D)$ تعلق دارد ([۳]، ص ۱۴۸). حال تابع یک متغیره $h(z_1)=f(z_1,z_2)$ را در نظر گرفته و با توجه به این که $h(0)=0$، ویژگی تقسیم را برای تابع h به‌کار می‌بریم. از بحث بالا نتیجه می‌شود که $g(z_1,z_2)$ به فضای برگمن $A_\alpha^2(D^2)$ تعلق دارد و

$$\|g\|\leq(\alpha+2)^{\frac{1}{2}}\|z_1 g\|,$$

به‌ویژه،

$$\|f_1/z_1\|\leq(\alpha+2)^{\frac{1}{2}}\|f\|.$$

که همان حکم مورد نظر است. بدین‌ترتیب اثبات قضیه به اتمام می‌رسد.

اکنون مقدمات لازم برای اثبات قضیهٔ ۳ فراهم است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید

$$T: A_\alpha^2(D\times D)\to A_\alpha^2(D\times D)$$

یک عملگر خطی و کراندار باشد. در این صورت T با عملگر ضربی

$$f(z_1,z_2)\mapsto M(f)=z_1^2 f(z_1,z_2)$$

جابه‌جا می‌شود اگر و فقط اگر تابع‌های تحلیلی و کراندار

$$h_0(z_1,z_2),\quad h_1(z_1,z_2)$$

در چندقرصی $D\times D$ یافت شوند به‌طوری‌که

$$Tf=h_0 f_0+\frac{h_1 f_1}{z_1}$$

که در آن $f=f_0+f_1$ تجزیه f به تابع‌های زوج و فرد است.

برهان. اگر T دارای نمایشی به شکل بالا باشد آن‌گاه با M جابه‌جا می‌شود زیرا

$$\begin{aligned}(TM)f&=TM(f_o+f_1)\\&=T(z_1^2 f_0+z_1^2 f_1)\\&=h_0 z_1^2 f_0+h_1 z_1 f_1\\&=z_1^2\left(h_0 f_0+\frac{h_1 f_1}{z_1}\right)\\&=(MT)f.\end{aligned}$$

برای اثبات طرف دیگر حکم فرض کنیم

$$f(z_1,z_2)=(f_0+f_1)(z_1,z_2).$$

با ثابت نگه داشتن متغیر دوم می‌دانیم که

$$\frac{f_1(z_1,z_2)}{z_1}$$

تابعی تحلیلی در چندقرصی است زیرا مقدار تابع فرد f_1 در $z_1 = 0$ برابر صفر است و از این‌رو، سری ماکلورن آن بدون جمله ثابت است. حال فرض کنید λ عددی مختلط و مخالف صفر باشد. به‌علاوه فرض کنید $1, -1$ ریشه‌های معادلهٔ $z^2 = 1$ باشند. با توجه به لم ۲-۲ از [۱] که برای توابع یک متغیره ثابت شد، هستهٔ عملگر الحاقی $M^*_{\lambda^2 - z^2}$ به‌وسیلهٔ بردارهای k_λ و $k_{-\lambda}$ پدید می‌آید. بنابراین اگر تابع $f(z_1, z_2)$ عضوی از هستهٔ عملگر الحاقی $M^*_{\lambda^2 - z_1^2}$ باشد آن‌گاه می‌توان نوشت

$$f(z_1, z_2) = A(\lambda, z_2) k_\lambda(z_1) + B(\lambda, z_2) k_{-\lambda}(z_1).$$

در نتیجه برای عدد ناصفر λ داریم

$$T^* k_\lambda(.) = \overline{A(\lambda, z_2)} k_\lambda(.) + \overline{B(\lambda, z_2)} k_{-\lambda}(.).$$

با توجه به ویژگی بازتولیدکنندگی تابع هسته برگمن در فضای $A^2_\alpha(D)$ داریم

$$f(z) = \langle f, k_z \rangle = \int_D f(w) \overline{k_z(w)}\, dA(w).$$

پس اگر z_2 ثابت و z_1 ناصفر باشد آن‌گاه با استفاده از برابری بالا داریم (به‌جای f، تابع یک متغیره $Tf(., z_2)$ را در نظر می‌گیریم)

$$\begin{aligned} Tf(z_1, z_2) &= \langle Tf(., z_2), k_{z_1} \rangle = \langle f(., z_2),\, T^* k_{z_1} \rangle \\ &= \langle f(., z_2), \overline{A(z_1, z_2)} k_{z_1} + \overline{B(z_1, z_2)} k_{-z_1} \rangle \\ &= A(z_1, z_2) f(z_1, z_2) + B(z_1, z_2) f(-z_1, z_2). \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید $f(z_1, z_2)$ نسبت به متغیر اول زوج باشد پس داریم

$$Tf(z_1, z_2) = [A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2)] f(z_1, z_2).$$

همین طور اگر $f(z_1, z_2)$ نسبت به متغیر اول فرد باشد آن‌گاه

$$Tf(z_1, z_2) = [A(z_1, z_2) - B(z_1, z_2)] f(z_1, z_2).$$

اکنون برای z_1 های ناصفر تعریف می‌کنیم

$$h_0(z_1, z_2) = A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2),$$

و همین طور

$$h_1(z_1, z_2) = z_1 [A(z_1, z_2) - B(z_1, z_2)].$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Tf(z_1, z_2) &= T(f_0(z_1, z_2) + f_1(z_1, z_2)) \\ &= h_0(z_1, z_2) f_0(z_1, z_2) + h_1(z_1, z_2) f_1(z_1, z_2)/z_1. \end{aligned}$$

توجه کنید که $h_0(z_1, z_2) = T(1)$ و $h_1(z_1, z_2) = T(g)$ که در آن $g(z_1, z_2) = z_1$.

بنابراین این تابع ها در حوزه

$$D \times D - \{(0, z_2):\ \ z_2 \in D\}$$

تحلیلی‌اند. حال قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} h_0(0, z_2) &= T(1)(0, z_2), \\ h_1(0, z_2) &= T(g)(0, z_2). \end{aligned}$$

در نتیجه $h_0,\ h_1$ در سراسر ناحیهٔ $D \times D$ تحلیلی هستند. آخرین نکته‌ای که باید ثابت کنیم این است که این دو تابع کراندار هستند. برای اثبات کرانداری قرار دهید

$$\begin{aligned} E &= \{f \in A^2_\alpha(D \times D):\ f(-z_1, z_2) = f(z_1, z_2)\}, \\ O &= \{f \in A^2_\alpha(D \times D):\ f(-z_1, z_2) = -f(z_1, z_2)\}. \end{aligned}$$

توجه داریم که تابع‌های $h_0,\ h_1$ در واقع ضرب‌گرهایی از زیرفضاهای بالا به‌توی فضای برگمن هستند، چون مثلاً در مورد h_0 می‌دانیم که اگر $f(z_1, z_2)$ عضو E باشد، آن‌گاه $Tf = (A + B) f$ بنا به تعریف T به فضای

$A_\alpha^2(D\times D)$ تعلق دارد، از این‌رو $h_0=A+B$ یک ضربگر از زیرفضای E به‌توی فضای $A_\alpha^2(D\times D)$ است. مشابها می‌توان استدلال کرد که $h_1=A-B$ یک ضرب‌گر از زیرفضای O به‌توی فضای برگمن وزن‌دار روی چندقرصی است.

اکنون برای تابع $f\in E$ داریم

$$\begin{aligned}\left|h_0(z_1,z_2)e_{(z_1,z_2)}f\right| &= |h_0(z_1,z_2)f(z_1,z_2)|\\ &= |e_{(z_1,z_2)}(h_0f)| \le C\left\|e_{(z_1,z_2)}\right\|\|f\|\end{aligned}$$

که در آن C برابر نرم عملگر ضربی $M_{h_0}(f)=h_0f$ و

$$e_{(z_1,z_2)}(f)=f(z_1,z_2)$$

تابعک خطی ارزیابی در نقطه (z_1,z_2) است. ضمناً می‌دانیم که هم عملگر ضربی و هم تابعک خطی ارزیابی کراندار هستند. بنابراین با سوپریمم‌گیری روی

$$\{f\in A_\alpha^2(D\times D):\ \|f\|\le 1\}$$

داریم

$$|h_0(z_1,z_2)|\left\|e_{(z_1,z_2)}\right\|\le C\left\|e_{(z_1,z_2)}\right\|$$

و از آن‌جا با سوپریمم‌گیری روی تمام نقاط چندقرصی می‌رسیم به

$$sup|h_0(z_1,z_2)|\le C,$$

یعنی h_0 کراندار است. مشابهاً ثابت می‌شود که h_1 نیز کراندار است.

منابع

1. Abkar A., "On the commutant of certain operators in the Bergman space", Bull, Malays. Math. Sci. Soc (2) 35 (2A) (2012) 499-502.
2. Conway J. B., "A Course in Functional Analysis, 2nd edition", GTM, 96, Springer-Verlag, NewYork (1990).
3. Conway J. B., "A Course in Operator Theory, Graduate Studies in Mathematics", American Mathematical Society, Vol. 21, Providence, RI. (2000).
4. Dan H., Huang H., "Multiplication operators defined by a class of polynomials on $L_a^2(D^2)$", Integr. Equ. Oper. Theory, 80 (2014) 581-601.
5. Duren P., Schuster A., "Bergman Spaces, Mathematical Surveys and Monographs", American Mathematical Society, Providence, RI. (2004).
6. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K., "Theory of Bergman Spaces", GTM, Springer-Verlag, New York (2000).
7. Richter S., "Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., 304, No.2 (1987) 585-616.
8. Shi Y., Lu Y., "Reducing subspaces for Toeplitz operators on the polydisk", Bull. Korean Math. Soc., 50 (2013) 687-696.
9. Shields A. L., Wallen L. J., "The commutant of certain Hilbert space operators", Indiana Univ. Math. J., Vol 20, no. 9, (1971) 777-788.
10. Zhu K., "Reducing subspaces for a class of multiplication operators", J. London Math. Soc., 62(2000) 553-568.