

رادیكال هونكه‌ای در توپوس Act-S

علی معدنشكاف، زینب خان‌جان‌زاده سرستی

دانشگاه سمنان، گروه ریاضی

پذیرش ۹۸/۰۵/۲۶

دریافت ۹۷/۱۲/۱۲

چکیده

یکی از مفاهیم مهم در نظریه توپوس‌ها، توپولوژی لاویر-تیرنی (ضعیف) است. یک رده از توپولوژی‌های لاویر-تیرنی (ضعیف) روی توپوس Act-S، متشکل از کنش‌های راست روی تکواره ثابت S، توپولوژی ایدالی است که به وسیله نویسندگان در [۱۳] معرفی شده است. در این مقاله قصد داریم مشخصه‌سازی‌هایی از بافه‌ها نسبت به این گونه توپولوژی‌ها ارائه دهیم. در ادامه با استفاده از این توپولوژی، رادیكالی هونكه روی Act-S می‌سازیم. سرانجام، رابطه بین بافه‌های متناظر با عملگر بستاری حاصل از این رادیكال و بافه‌های متناظر با توپولوژی ایدالی را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: S-کنش، عملگر بستاری ایدالی، (پیش)رادیكال هونكه، تاب، توپولوژی ایدالی.

مقدمه و پیش‌نیازها

امروزه کاربردهای فراوانی از توپولوژی‌های لاویر-تیرنی در توپوس‌ها و بافه‌های آنها، در شاخه‌های متفاوت ریاضی مانند نظریه اندازه [۸] و فیزیک کوانتوم [۱۸]، [۱۹] مشاهده شده است. یک رده از توپولوژی‌های لاویر-تیرنی (ضعیف) روی رسته کنش‌های روی یک تکواره ثابت، «توپولوژی ایدالی»، با نمایش I^1 است که به وسیله نویسندگان در [۱۳] معرفی شده و در [۱۰]، [۱۲] به طور دقیق بررسی شده‌اند. به عنوان کاربردی از توپولوژی ایدالی، در [۱۲] مشاهده شده است که تعدادی از رسته‌های مشهور متشکل از کنش‌های جداشده^۱ روی یک تکواره، در حقیقت حالت‌های خاصی از رسته کنش‌های I^1 -جداشده هستند. از این منظر مایلیم در اینجا توپولوژی ایدالی و اشیای جداشده نسبت به آن را روی توپوس Act-S مطالعه کنیم. در حالت خاص، می‌خواهیم I^1 -بافه‌های روی تکواره‌های به شکل $S = G \dot{\cup} I$ ، که در آن G یک گروه و I ایدالی دوطرفه از S است، را بررسی کنیم. در [۵]، [۶] نشان داده شده است که برای کنش‌ها روی این نوع تکواره‌ها، S-کنش A هموار است اگر آن به عنوان یک I^1 -کنش چپین باشد. در اینجا قصد داریم رابطه بین I^1 -بافه‌ها در توپوس‌های Act-S و Act- I^1 را بیابیم.

در سراسر این مقاله، تکواره S با عضو همانی 1 را ثابت می‌گیریم. هم‌چنین در همه جا که ذکر نشده است، I ایدال چپی از S است. اکنون محتوای بخش‌های دیگر را به طور خلاصه بیان می‌کنیم: در بخش دوم، مشخصه‌سازی‌هایی از I^1 -بافه‌ها در Act-S را ارائه می‌دهیم. هم‌چنین احکامی برای تکواره‌های به شکل $S = G \dot{\cup} I$ ،

*نویسنده مسئول amadanshekaf@semnan.ac.ir

1. Separated

که در آن G یک گروه و I ایدآلی دوطرفه از S است را به دست می‌آوریم. در بخش سوم، برای یک ایدآل چپ خودتوان I از S نشان می‌دهیم رسته $Act-S$ توسیعی رادیکالی از رسته $(Act-S)_I$ ، متشکل از همه S -کنش‌های I -جداشده، است یعنی رادیکالی روی $Act-S$ موجود است که رده بی‌تاب^۱ آن $(Act-S)_I$ است. هم‌چنین نشان می‌دهیم این رادیکال، یک تاب (یا به بیان دقیق‌تر رادیکال موروثی) روی $Act-S$ است. در نهایت، عملگر بستاری متناظر با این رادیکال را ساخته و نشان می‌دهیم هر I -بافه، یک بافه نسبت به این عملگر بستاری نیز هست.

در این مقاله، نمادگذاری‌ها و مفاهیم زیر را استفاده می‌کنیم که تعدادی از آنها را از مراجع [۱۴]، [۲۰] یادآوری می‌کنیم. یک « S -کنش (راست)» مجموعه A (با امکان تهی بودن) همراه با نگاشت $\mu: A \times S \rightarrow A$ ، $(a, s) \mapsto \mu(a, s)$ را به صورت as نشان می‌دهیم، با نام «کنش» روی A ، است به قسمی که برای هر $a \in A$ و $s, t \in S$ ، داریم $a \cdot st = (a \cdot s) \cdot t$ و $a(st) = (as)t$. یک «نگاشت حافظ کنش» $f: A \rightarrow B$ از یک S -کنش A به S -کنش دیگر B نگاشتی است که $f(as) = f(a)s$ برای هر $a \in A$ و $s \in S$. برای هر دو S -کنش A و B مجموعه تمام نگاشت‌های حافظ کنش از A به B ، را به صورت $Hom_S(A, B)$ نشان می‌دهیم. رسته همه S -کنش‌ها و نگاشت‌های حافظ کنش بین آنها را به صورت $Act-S$ نمایش می‌دهیم. از [۱۵] می‌دانیم این رسته یکرخت است با $Sets^{S^{op}}$ ، توپوس پیش‌بافه‌های روی S که در آن تکواره S را به عنوان رسته‌ای با تنها یک شی در نظر می‌گیریم.

یک «پیش رادیکال»^۲ (که ممکن است یک «پیش رادیکال نرمال» نیز نامیده شود) نگارنده $r: A \mapsto r(A)$ است که به هر $A \in Act-S$ هم‌نهستی $r(A) \in Con(A)$ را چنان نظیر می‌کند که هر نگاشت حافظ کنش $f: A \rightarrow B$ نگاشت حافظ کنش $r(f): r(A) \rightarrow r(B)$ را القا می‌کند، بدین معنی که برای هر نگاشت حافظ کنش $f: A \rightarrow B$ ، داشته باشیم $(f(a), f(a')) \in r(B)$ هرگاه $(a, a') \in r(A)$. توجه کنید که $r(A)$ و $r(B)$ ، به ترتیب، زیرکنش‌هایی از $A \times A$ و $B \times B$ هستند، زیرا $r(A) \in Con(A)$ و $r(B) \in Con(B)$. یک پیش رادیکال r یک «رادیکال» (یا یک «رادیکال هونکه»^۳ در [۲۰]) است اگر برای هر S -کنش A ، $r(A/r(A)) = \Delta_{A/r(A)}$. متذکر می‌شویم برای رسته‌های نرمال، تعاریف از مرجع [۲] اقتباس می‌شوند. رادیکال r در $Act-S$ را یک «تاب» (به شکل دقیق‌تر، «نگارنده تابی موروثی»^۴) می‌نامیم اگر r موروثی باشد، یعنی r برای همه زیرکنش‌های B از هر S -کنش A ، دارای خاصیت $r(B) = r(A) \cap \nabla_B$ باشد. (همچنین، مرجع [۲۰] را مشاهده کنید.)

در ادامه به صورت کوتاه، مفهوم توپولوژی ایدآلی و مفاهیم مرتبط با آن را ذکر می‌کنیم. برای اطلاعات بیش‌تر در مورد توپولوژی‌ها روی $Act-S$ و خواص آنها، به [۱۲] رجوع شود. در ابتدا عملگر بستاری $C = (C_A)_{A \in Act-S}$ را یک «عملگر بستاری موجه»^۵ روی $Act-S$ می‌نامیم هرگاه برای همه زیرکنش‌های B ، B_1 و B_2 از A ، این خواص را دارا باشد:

$$B \subseteq C_A(B). \quad ۱.$$

1. Torsion-free
2. Preradical
3. Hoehnke
4. Hereditary
5. Modal

۲. $B_1 \subseteq B_2$ نتیجه دهد $C_A(B_1) \subseteq C_A(B_2)$ (یکنوایی)،

۳. برای هر نگاشت حافظ کنش $f: E \rightarrow F$ ، داشته باشیم $C_E(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(C_F(U))$ برای هر زیرکنش U از F (پیوستگی)،

۴. برای هر نگاشت حافظ کنش $f: E \rightarrow F$ ، داشته باشیم $C_E(f^{-1}(U)) = f^{-1}(C_F(U))$ برای هر زیرکنش U از F (موجه).

متذکر می‌شویم C یک «عملگر بستاری» است هرگاه تنها در شرایط (۱)، (۲) و (۳) صدق کند. همچنین گوییم عملگر بستاری C «خودتوان» است هرگاه برای هر زیرکنش $B \subseteq A$ ، داشته باشیم $C_A(C_A(B)) = C_A(B)$. برای اطلاعات بیش‌تر در مورد عملگرهای بستاری روی رسته‌های کلی‌تر و خواص آنها به [۳] مراجعه کنید. می‌دانیم مجموعه همه ایدآل‌های راست K از تکواره S همراه با کنش

$$K \cdot s = \{t \in S \mid st \in K\} \quad (۱)$$

یک S -کنش است که آن را به‌صورت $\text{RIdl}(S)$ نمایش می‌دهیم. حال، نگاشت حافظ کنش $j: \text{RIdl}(S) \rightarrow \text{RIdl}(S)$ یک «توپولوژی (لاویر-تیرنی) ضعیف» روی Act-S نامیده می‌شود هرگاه این شرایط پیش آید:

الف) $j(S) = S$ ؛

ب) $j(K_1 \cap K_2) \subseteq j(K_1) \cap j(K_2)$ ، برای همه ایدآل‌های راست K_1 و K_2 از S .

علاوه براین، j «حاصل ضربی» است هرگاه در شرط (ب) به‌جای $\subseteq$ ، تساوی برقرار باشد. یک توپولوژی ضعیف خودتوان روی Act-S یک «توپولوژی» روی Act-S نامیده می‌شود.

از [۱۲] می‌دانیم عملگرهای بستاری موجه روی Act-S در تناظر دوسویی با توپولوژی‌های لاویر-تیرنی ضعیف (با به‌اختصار توپولوژی‌های ضعیف) روی توپوس Act-S هستند. فرض می‌کنیم j یک توپولوژی (ضعیف) روی Act-S و $(\cdot)$ عملگر بستاری موجه متناظر با j باشد. همچنین، فرض کنیم $B \subseteq A$ یک زیرکنش باشد. گوییم B در A ، « j -بسته» است اگر $\bar{B} = B$ ، و در A « j -چگال» است اگر $\bar{B} = A$. می‌توان فرض کرد در Act-S (در حد یکرختی) هر تکریم یک نگاشت شمول است. این فرض به ما اجازه می‌دهد یک j -بافه در Act-S را با شکل کمی متفاوت از [۱۵] تعریف کنیم، به این‌صورت که، S -کنش C یک « j -بافه» نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرکنش j -چگال $B \subseteq A$ ، هر نگاشت حافظ کنش $h: B \rightarrow C$ را بتوان به یک نگاشت حافظ کنش یکتای $g: A \rightarrow C$ توسعه داد. گوییم C « j -جداشده» است اگر ریخت g در صورت وجود، یکتا باشد.

اکنون گیریم I ایدآل چپی از S باشد. در این صورت عملگر بستاری ایدآلی نسبت به I ، معرفی شده در [۴]، با ضابطه

$$C_A^I(B) = \{a \in A \mid \forall t \in I, at \in B\}, \quad (۲)$$

برای هر زیرکنش $B \subseteq A$ است، به‌آسانی دیده می‌شود $C \wedge I = C$ یک عملگر بستاری موجه روی توپوس Act-S است. حال، توپولوژی ضعیف متناظر با C^I روی Act-S ، معرفی شده در [۱۳]، نگاشت حافظ کنش $j^I: \text{RIdl}(S) \rightarrow \text{RIdl}(S)$ با ضابطه

$$j^I(K) = \{s \in S \mid \forall t \in I, st \in K\}, \quad (۳)$$

برای هر $K \in \text{Ridl}(S)$ ، است. همچنین متذکر می‌شویم که برای یک ایدآل (چپ) I از S ، I^I یک توپولوژی روی Act-S است اگر و تنها اگر $I^2 = I$ و $(IS)^2 = IS$. در ضمن، زیرکنش $B \subseteq A$ ، I^I -چگال است هرگاه $AI \subseteq B$.

مشخصه‌سازی‌هایی از I^I -بافه‌ها

در این بخش، قصد داریم I^I -بافه‌ها را در توپوس Act-S مشخصه‌سازی کنیم. سپس، I^I -بافه‌ها را برای تکواریهایی به شکل $S = G \cup I$ بررسی می‌کنیم که در آن G یک گروه و I ایدآل دوطرفه‌ای از S است که کنش‌های روی این گونه از تکواریها به وسیله برخی از ریاضیدانان، به‌طور مثال در [۵]، [۱۷]، بررسی شده‌اند. در ابتدا از [۱۲] یادآوری می‌کنیم که برای ایدآل چپ I از تکواری S ، S -کنش A را « I -جداشده» می‌نامیم هرگاه برای همه $a, b \in A$ داشته باشیم

$$(\forall s \in I, as = bs) \Rightarrow a = b. \quad (۴)$$

حال نتیجه مهم و پایه‌ای زیر را از [۱۲] بیان می‌کنیم.

گزاره ۱. برای ایدآل چپ I از S ، یک S -کنش A ، I -جداشده است اگر و تنها اگر آن I^I -جداشده باشد. از این‌جا به بعد، طبق گزاره فوق، به‌جای مفهوم I^I -جداشده از مفهوم « I -جداشده» استفاده خواهیم کرد. حال تعریف می‌کنیم:

تعریف ۲. فرض می‌کنیم I ایدآلی راست از تکواری S است. S -کنش A را «به‌طور یکتا I -کامل» می‌نامیم هرگاه برای هر نگاشت حافظ کنش $f: I \rightarrow A$ عضو (یکتای) $a \in A$ موجود باشد به‌قسمی که $f = \lambda_a|_I$ ، یعنی، برای هر $s \in I$ داشته باشیم $f(s) = \lambda_a(s) = as$.

در حقیقت، منظور از یک کنش « I -کامل» A ، کنش «دنباله‌ای کامل (یا به‌طور خلاصه s -کامل)» A نسبت به زیر نیم‌گروه I از تکواری S است، که در [۱۶]، تعریف ۶.۲ معرفی شده است.

اکنون داریم:

لم ۳. فرض می‌کنیم I ایدآلی دوطرفه از تکواری S است. در این صورت، S -کنش A به‌طور یکتا I -کامل است اگر و تنها اگر آن، I -کامل و I -جداشده باشد. اثبات. اثبات سراسر است.

قضیه ۴ مشخصه‌سازی‌های مهمی از I^I -بافه‌ها به‌دست می‌دهد.

قضیه ۴. فرض می‌کنیم I ایدآلی دوطرفه از تکواری S است. برای S -کنش A ، احکام زیر معادلند:

(الف) A یک I^I -بافه است.

(ب) هر نگاشت حافظ کنش $f: I \rightarrow A$ را می‌توان به‌طور یکتا به یک نگاشت حافظ کنش $\bar{f}: S \rightarrow A$ توسعه داد.

(پ) A به‌طور یکتا I -کامل است.

(ت) نگاشت $\lambda: A \rightarrow \text{Hom}_S(I, A)$ با ضابطه $\lambda(a) = \lambda_a$ برای هر $a \in A$ دوسویی است.

اثبات. (ب) $\Rightarrow$ (الف) از آن‌جاکه I در S چگال است، طبق (الف) نگاشت حافظ کنش یکتای $\bar{f}: S \rightarrow A$ موجود است به‌قسمی که $\bar{f}|_I = f$.

(پ) $\Rightarrow$ (ب) برای $f: I \rightarrow A$ مفروض، طبق (ب) نگاشت حافظ کنش یکتای $\bar{f}: S \rightarrow A$ موجود است به قسمی که $\bar{f}|_I = f$.

اکنون با در نظر گرفتن $a = \bar{f}(1)$ ، داریم $\bar{f} = \lambda_a$ و در نتیجه $f = \lambda_a|_I$. بنابراین، A ، I -کامل است. علاوه بر این، A ، I -جدا شده است. زیرا برای هر $a, b \in A$ که داشته باشیم $at = bt$ ، برای هر $t \in I$ ، دو نگاشت انتقال چپ $\lambda_a, \lambda_b: I \rightarrow A$ مساویند. بنابراین طبق (ب)، دو توسیع آنها، که طبق یکتایی ریخت‌های $\bar{\lambda}_a, \bar{\lambda}_b: S \rightarrow A$ به‌ترتیب با ضابطه‌های $\bar{\lambda}_a(s) = as$ و $\bar{\lambda}_b(s) = bs$ هستند، نیز مساویند. از این‌رو، $a = \bar{\lambda}_a(1) = \bar{\lambda}_b(1) = b$. از این‌که A ، I -جدا شده است، طبق لم ۳، نتیجه می‌شود که A به‌طور یکتا I -کامل است.

(الف) $\Rightarrow$ (پ) با استفاده از مرجع [۱۱]، کافی است نشان دهیم A درون‌بر مطلق یکتا^۱ است. برای انجام این کار، توسیع I -چگال B از A را در نظر بگیرید. برای هر $b \in B$ ، $\lambda_b: I \rightarrow A$ نگاشتی حافظ کنش از I به A است که چون A به‌طور یکتا I -کامل است، به‌صورت λ_{a_b} ، برای عضو یکتای $a_b \in A$ است. اکنون نگارنده $b \mapsto a_b$ درون‌بری مورد نیاز را به‌دست می‌دهد. بنابراین A ، درون‌بر مطلق و از این‌رو I -انژکتیو است. اکنون، نشان می‌دهیم A ، I -جدا شده نیز هست. برای این منظور، عناصر $a, b \in A$ را چنان اختیار کنید که برای هر $n \in I$ ، $an = bn$. بنابراین، $\lambda_a = \lambda_b$ و طبق (پ)، $a = b$.

(ت) $\Rightarrow$ (پ) اثبات سراسر است.

در این‌جا نتیجه‌ای مانند محک بئر-اسخورنیاخف^۲ را برای I -بافه‌ها بیان می‌کنیم.

نتیجه ۵. فرض می‌کنیم I ایدآلی دوطرفه از تکواره S است. برای S -کنش A ، احکام زیر معادلند:

(الف) A ، I -بافه است.

(ب) برای هر نگاشت I -چگال $h: B \rightarrow cS$ به یک کنش دوری و هر نگاشت حافظ کنش $f: B \rightarrow A$ نگاشت حافظ کنش یکتای $g: cS \rightarrow A$ موجود است به‌طوری‌که $gh = f$.

(پ) برای هر $c \in S$ ، هر نگاشت حافظ کنش $f: cI \rightarrow A$ می‌تواند به‌طور یکتا به نگاشت حافظ کنش $\bar{f}: cS \rightarrow A$ توسعه داده شود.

اثبات. (ب) $\Rightarrow$ (الف) واضح است.

(پ) $\Rightarrow$ (ب) در (ب)، قرار دهید $B = cI$. از آن‌جا که I ایدآل چپی از S است، بنابراین $cSI \subseteq cI$ ، از این‌رو، $cI \subseteq cS$ ، I -چگال است.

(الف) $\Rightarrow$ (پ) با قرار دادن $c = 1$ ، (پ) دقیقاً بند (ب) از قضیه ۴ است که معادل با تعریف یک I -بافه است.

از [۱۴] یادآوری می‌کنیم که نیم‌گروه S «به‌طور یک‌به‌یک» روی S -کنش A عمل می‌کند هرگاه $as = bs$ به‌ازای یک عنصر $s \in S$ نتیجه دهد $a = b$. گزاره زیر مشخصه‌سازی دیگری از I -بافه‌ها به‌دست می‌دهد.

گزاره ۶. گیریم ایدآل دوطرفه I از تکواره S ، به‌عنوان یک نیم‌گروه، به‌طور یک‌به‌یک روی A عمل کند. در این صورت A ، I -بافه است اگر و تنها اگر برای هر نگاشت حافظ کنش $f: S \rightarrow A$ و هر ایدآل راست متناهی مولد K از I (به‌عنوان یک نیم‌گروه)، عضو یکتای $a \in A$ موجود باشد طوری‌که $f|_K = \lambda_a|_K$.

1. Unique absolute retract
2. Baer-Skornjakov

اثبات. برای اثبات جهت نابدیهی، گیریم $f: I \rightarrow A$ نگاشتی حافظ کنش باشد. عنصر $s \in I$ را اختیار کنید. از آن‌جاکه sS ایدال راستی از I است بنابراین $f|_S: sS \rightarrow A$ نگاشتی حافظ کنش است که طبق فرض، برای عضو یکتای $a_s \in A$ دارای شکل λ_a است. همچنین برای $s \neq t \in I$ ، عضو یکتای $c \in A$ موجود است به‌طوری‌که $f|_{\{s, t\}S} = \lambda_c$. اکنون، داریم $a_s = cs$ و بنابراین $a_s = c$ ، چون I به‌طور یک‌به‌یک روی A عمل می‌کند. به‌طور مشابه $a_t = c$ ، از این‌رو، $a_s = a_t$. در نتیجه همه a_s ها یکسانند و برای عضو یکتای $a \in A$ ، داریم $f = \lambda_a|_I$. اکنون حکم از قضیه ۴ نتیجه می‌شود.

گزاره ۷. فرض کنیم M تکه‌های باشد که عضو معکوس‌پذیر راست و چپ (نابدیهی) نداشته باشد، یعنی $S = M \setminus \{1\}$ ایدالی دو طرفه از M باشد. اگر هر ایدال دوطرفه M درون‌بری از M باشد، آن‌گاه یک M -کنش A ، J -انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر ایدال دو طرفه I از M ، A ، J -انژکتیو باشد.

اثبات: برای اثبات جهت نابدیهی، گیریم $f: I \rightarrow A$ نگاشت کنشی از یک ایدال دوطرفه I از M باشد. طبق فرض، درون‌بری $g: M \rightarrow I$ موجود است که $g|_I = id$. از این‌رو، نگاشت تحدید $fg|_S: S \rightarrow A$ حافظ کنش است و طبق J -انژکتیو بودن A ، $a \in A$ چنان موجود است که $fg|_S = \lambda_a|_S$. بنابراین، f نیز به‌صورت λ_a است. زیرا اگر $s \in I$ را در نظر بگیرید آن‌گاه $g(s) = s$ و سپس $f(s) = fg(s) = as$

گزاره ۸ خاصیت دیگری از J -بافه‌ها به‌دست می‌دهد. اثبات آن مشابه قضیه ۲.۳ از [۱۶] است.

گزاره ۸. فرض می‌کنیم I ایدال دوطرفه از تکه‌واره S و $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ خانواده‌ای از S -کنش‌ها باشد. اگر هم حاصل ضرب این خانواده J -بافه باشد آن‌گاه هر A_α نیز چنین است.

بیش از این، با در نظر گرفتن ایدال دوطرفه I به‌جای نیم گروه S در [۱۶]، نتایج دیگری از این مرجع را می‌توان دقیقاً برای J -بافه‌ها بیان کرد مانند گزاره ۱۵.۲، قضیه ۴.۳ و نتیجه ۵.۳.

در ادامه این بخش، تکه‌واره‌های به‌صورت $S = G \cup I$ ، که در آن یک گروه G و ایدال دوطرفه‌ای از S است، را بررسی می‌کنیم. در ابتدا، از [۱۴، گزاره III. ۲.۳]، تعریف (معادل) یک کنش انژکتیو ضعیف (اصلی) را یادآوری می‌کنیم:

تعریف ۹. S -کنش A «انژکتیو ضعیف (اصلی)»^۱ نامیده می‌شود هرگاه برای هر ایدال راست (اصلی) J از S و برای هر نگاشت حافظ کنش $f: J \rightarrow A$ عضو $a \in A$ موجود باشد به‌قسمی که $f = \lambda_a|_J$ ، یعنی برای هر $s \in J$ داشته باشیم $f(s) = as$.

اکنون، تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۰. S -کنش A را «بافه ضعیف (اصلی)» می‌نامیم هرگاه برای هر ایدال دوطرفه (اصلی) J از S ، انژکتیو ضعیف (اصلی) و J -جداشده باشد.

حال داریم:

1. (principally) weakly injective

قضیه ۱۱. فرض کنیم $S = G \cup I$ تکواره‌ای باشد که در آن G یک گروه و I ایدال دوطرفه‌ای از S بوده است و A نیز یک S -کنش باشد. آن‌گاه، A به‌عنوان یک S -کنش، بافه ضعیف (اصلی) است هرگاه به‌عنوان یک I^1 -کنش چنین باشد.

اثبات. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که برای هر ایدال دوطرفه J از S ، داریم $J = S$ یا J ایدالی از I^1 است. سپس فوراً نتیجه می‌شود که برای هر ایدال دوطرفه J از S ، A به‌عنوان یک I^1 -کنش، J -جداشده است اگر و تنها اگر به‌عنوان یک S -کنش، J -جداشده باشد. اکنون تعریف ۱۰ و قضیه‌های ۱.۲ و ۲.۲ از [۱۷] حکم را ثابت می‌کنند.

قضیه ۱۲. رابطه بین I^1 -بافته‌ها در توپوس‌های Act-S و Act- I^1 را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۳. فرض کنید $S = G \cup I$ یک تکواره است و هم‌ریختی نیم گروهی نابدیهی $I^1 : S \rightarrow h$ با خاصیت $h(\gamma) = 1$ را اختیار کنید. در این صورت، A در توپوس Act- I^1 یک I^1 -بافته است اگر و تنها اگر A در توپوس Act-S، I^1 -بافته باشد.

اثبات. به‌آسانی دیده می‌شود S -کنش A در توپوس Act- I^1 ، I -جداشده است اگر و تنها اگر در توپوس Act-S چنین باشد. حال قضیه ۶.۳ از [۱۷] حکم را ثابت می‌کنند.

توسیع رادیکالی از S -کنش‌های جداشده

در این بخش، نشان می‌دهیم توپوس Act-S توسیع رادیکالی از رسته $(Act-S)$ برای یک ایدال چپ خودتوان I از S است یعنی رادیکالی روی Act-S موجود است که رده بی‌تاب آن $(Act-S)$ است؛ به‌عنوان مثالی از این نوع ایدال‌ها، ایدال $\mathbb{N}$ از اعداد طبیعی از تکواره $\mathbb{N}^\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ همراه با عمل کمینه را در نظر بگیرید. در ابتدا، از [۱۲] نتیجه ۱.۳ را می‌آوریم. با این وجود برای راحتی خواننده طرحی از اثبات را در این‌جا ذکر می‌کنیم.

گزاره ۱۳. برای یک ایدال (چپ) I از S با خاصیت $I^2 = I$ ، $(IS)^2 = IS$ ، تابعون شمول $i : Sep_{I^1}(Act-S) \rightarrow Act-S$ الحاقی چپ $L : Act-S \rightarrow Sep_{I^1}(Act-S)$ با ضابطه $L(A) = A/\sigma_A$ (روی اشیاء) را دارد که در آن σ_A هم‌نهشتی S -کنشی (δ) روی A است

$$\sigma_A = \{(a, b) \in A \times A \mid \forall t \in I, at = bt\}. \quad (\delta)$$

اثبات. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که نگارنده

$$\alpha : id_{Act-S} \rightarrow L \circ i; \quad \alpha_A = \pi_A : A \rightarrow A/\sigma_A,$$

برای هر S -کنش A ، که در آن π_A نگاشت کانونی است، یک تبدیل طبیعی است که در آن id_{Act-S} تابعون همانی روی Act-S است. علاوه بر این، α خاصیت جهانی یکه الحاق چپ L به i را دارد (برای اطلاعات بیشتر، نتیجه ۶.۳.V از [۱۵] را ملاحظه کنید).

تابعون $L : Act-S \rightarrow Sep_{I^1}(Act-S)$ معرفی شده در گزاره مذکور، به رادیکالی در رسته Act-S به‌صورت

قضیه ۱۴ بالا می‌رود. متذکر می‌شویم در قضیه ۱۴، I می‌تواند صرفاً ایدال چپی از S باشد.

قضیه ۱۴. گیریم I ایدال چپی از S باشد. آن‌گاه نگارنده $I_I : A \mapsto \sigma_A$ ، که در آن σ_A (۵) معرفی شده است، پیش رادیکالی در Act-S است. علاوه بر این، I_I رادیکالی در Act-S است هرگاه I خودتوان باشد، یعنی $I^2 = I$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم Γ_I پیش رادیکال است. برای انجام آن، گیریم $f: A \rightarrow B$ نگاشتی حافظ کنش باشد. باید رابطه شمول $f(\sigma_A) \subseteq \sigma_B$ را ثابت کنیم. عضو دلخواه $(f(a), f(b)) \in f(\sigma_A)$ را اختیار کنید. از آن جاکه $(a, b) \in \sigma_A$ ، برای هر $t \in I$ داریم $at = bt$. این که f حافظ کنش است نتیجه می‌دهد برای هر $t \in I$ $f(a)t = f(b)t$. پس $(f(a), f(b)) \in \sigma_B$. اکنون فرض کنیم I خودتوان نیز باشد. سپس، برای هر S -کنش A ، تساوی $\Gamma_I(A/\sigma_A) = \Delta_{A/\sigma_A}$ را ثابت می‌کنیم. برای هر زوج $(a/\sigma_A, b/\sigma_A) \in \Gamma_I(A/\sigma_A)$ ، داریم $as/\sigma_A = bs/\sigma_A$ ، برای هر $s \in I$. اما، طبق (۵)، تساوی $ast = bst$ برای هر $s, t \in I$ برقرار است. بنابراین، $a \sigma_A b$ ، از این‌رو، $a/\sigma_A = b/\sigma_A$ ، زیرا I خودتوان است. پس، $\Gamma_I(A/\sigma_A)$ مساوی با Δ_{A/σ_A} است.

نتیجه ۱۵ زیر نشان می‌دهد، رده S -کنش‌های I -جداشده رده بی‌تاب از یک رادیکال است. گزاره ۱۵. اگر I ایدآل چپ خودتوانی از S باشد آن‌گاه رده متشکل از همه S -کنش‌های I -جداشده، دقیقاً رده بی‌تاب متناظر با رادیکال Γ_I است.

اثبات. از [۲۰] می‌دانیم رده بی‌تاب متناظر با رادیکال Γ_I رده همه S -کنش‌های A است به‌قسمی که $\sigma_A = \Delta_A$. اما داریم $\sigma_A = \Delta_A$ است اگر و تنها اگر A یک S -کنش I -جداشده باشد. رادیکال معرفی شده در قضیه ۱۴ خاصیت بیش‌تری برای S -کنش‌ها دارد.

گزاره ۱۶. اگر I ایدآل چپ خودتوانی از S باشد، آن‌گاه نگارنده $\Gamma_I: A \mapsto \sigma_A$ معرفی شده در (۵)، تابی در $\mathbf{Act-S}$ است.

اثبات. ابتدا، طبق قضیه ۱۴ می‌دانیم Γ_I یک رادیکال است. علاوه بر این، برای هر S -کنش A و هر زیرکنش B از آن بی‌درنگ مشاهده می‌شود $\sigma_B = \sigma_A \cap \nabla_B$. از این‌رو، Γ_I رادیکالی موروثی است، از این‌رو، یک تاب است.

فرض کنیم B یک زیرکنش از S -کنش دلخواه A و r یک پیش‌رادیکال در رسته $\mathbf{Act-S}$ باشد. در این صورت کلاس عضو B از S -کنش ریس A/B تحت هم‌نهشتی $r(A/B)$ را با $[B]_{\Gamma_I(A/B)}$ نشان می‌دهیم. در واقع داریم

$$[B]_{\Gamma_I(A/B)} = \{a/B \in A/B \mid (a/B, B) \in r(A/B)\}.$$

حال قصد داریم به هر پیش‌رادیکال در $\mathbf{Act-S}$ یک عملگر بستاری نظیر کنیم (هم‌چنین [۳] و [۷] ملاحظه شود). لم ۱۷. متناظر با هر پیش‌رادیکال r در $\mathbf{Act-S}$ ، با در نظر گرفتن هم‌ریختی طبیعی $\pi: A \rightarrow A/B$ ، عملگر بستاری C^r با ضابطه $C_A^r(B) = \pi^{-1}([B]_{\Gamma_I(A/B)})$ ، برای هر S -کنش A و زیرکنش B از A موجود است.

هم‌چنین، زیرکنش B از A ، C^r -چگال است اگر و تنها اگر $\nabla_{A/B} = r(A/B)$.

اثبات. می‌توان مشاهده کرد که در واقع برای هر S -کنش A و هر زیر S -کنش B از A ، داریم

$$C_A^r(B) = \{a \in A \mid \exists b \in B; (a/B, b/B) \in r(A/B)\}. \quad (۶)$$

افزون بر این به آسانی می‌توان مشاهده کرد عملگر C^r در $\mathbf{Act-S}$ توسیعی و یکنوا است. هم‌چنین، خاصیت تعدی هم‌نهشتی $r(A/B)$ نتیجه می‌دهد زیرکنش $B \subseteq A$ ، C^r -چگال است اگر و تنها اگر $r(A/B) = \nabla_{A/B}$. حال ثابت می‌کنیم C^r پیوسته است. یعنی برای هر نگاشت حافظ کنش $f: A \rightarrow B$ و هر زیرکنش D از B ، نشان می‌دهیم که داریم $C_A^r(f^{-1}(D)) \subseteq f^{-1}(C_B^r(D))$. اما بنا بر (۶) داریم

$$C_A^r(f^{-1}(D)) = \{a \in A \mid \exists b \in f^{-1}(D); (a/f^{-1}(D), b/f^{-1}(D)) \in r(A/f^{-1}(D))\} \quad (۷)$$

۹

$$f^{-1}(C_B^r(D)) = \{a \in A \mid \exists d \in D; (f(a)/D, d/D) \in r(B/D)\}. \quad (۸)$$

اکنون عضو دلخواه $a \in C_A^r(f^{-1}(D))$ را در نظر بگیرید. بنا بر رابطه (۷)، عضو $b \in f^{-1}(D)$ موجود است به‌قسمی که $(a/f^{-1}(D), b/f^{-1}(D)) \in r(A/f^{-1}(D))$. حال به‌سادگی مشاهده می‌کنیم که نگاشت $\varphi_f: A/f^{-1}(D) \rightarrow B/D$ با ضابطه $\varphi_f(a/f^{-1}(D)) = f(a)/D$ حافظ کنش است. از آن‌جاکه r پیش رادیكال است، از این‌رو، نگاشت حافظ کنش $r(\varphi_f): r(A/f^{-1}(D)) \rightarrow r(B/D)$ موجود است. حال $(a/f^{-1}(D), b/f^{-1}(D)) \in r(A/f^{-1}(D))$ ، نتیجه می‌دهد $(\varphi_f(a/f^{-1}(D)), \varphi_f(b/f^{-1}(D))) \in r(B/D)$ ، از این‌رو، $(f(a)/D, f(b)/D) \in r(B/D)$. اکنون، از آن‌جاکه $f(b) \in D$ بنا بر (۸)، $a \in f^{-1}(C_B^r(D))$.

اکنون، طبق (۵)، لم ۱۷ و قضیه ۱۴، متناظر با هر پیش رادیكال I_I (برای هر ایدال چپ I از S) در Act-S یک عملگر بستاری C^{I_I} با ضابطه

$$C_A^{I_I}(B) = \{a \in A \mid \exists b \in B; \forall t \in I, at = bt\} \quad (۹)$$

را داریم.

گزاره ۱۸ رابطه بین عملگرهای بستاری C^{I_I} و C^I را نشان می‌دهد.

گزاره ۱۸. گیریم I ایدال چپی از S باشد. آن‌گاه $C^{I_I} \subseteq C^I$. عکس شمول برقرار است اگر I همانی چپ داشته باشد.

اثبات. طبق روابط (۲) و (۹)، قسمت اول گزاره برقرار است. برای اثبات قسمت دوم، زیرکنش $B \subseteq A$ و عضو $a \in C_A^I(B)$ را در نظر بگیرید. هم‌چنین عضو همانی چپ I را با e نمایش می‌دهیم. طبق (۲)، برای هر $t \in I$ داریم $at \in B$. بنابراین، هم‌چنین $ae \in B$. اکنون برای هر $t \in I$ داریم $at = aet$. اکنون طبق (۹) حکم برقرار است.

به آسانی می‌توان مشاهده کرد که زیرکنش $B \subseteq A$ ، C^{I_I} -چگال است هرگاه برای هر عضو $a \in A$ ، عضو $b \in B$ موجود باشد طوری که برای هر $t \in I$ ، تساوی $at = bt$ برقرار باشد. علاوه براین، در [۱]، بافه‌ها نسبت به عملگرهای بستاری روی یک رسته با حدهای متناهی تعریف شده‌اند. به‌طور مشابه، در این‌جا نیز می‌توانیم S -کنش C را یک « C^{I_I} -بافه» بنامیم هرگاه برای هر زیرکنش C^{I_I} -چگال $B \subseteq A$ ، هر نگاشت حافظ کنش $h: B \rightarrow C$ را بتوان به یک نگاشت حافظ کنش یکتای $g: A \rightarrow C$ توسعه داد، یعنی $g|_B = h$. حال قضیه ۱۹ که فوراً از گزاره ۱۸ به‌دست می‌آید، ویژگی دیگری از I -بافه‌ها در Act-S را به‌دست می‌دهد.

قضیه ۱۹. گیریم I ایدال چپی از S باشد. در این صورت، اگر زیرکنش $B \subseteq A$ ، C^{I_I} -چگال باشد آن‌گاه I -چگال نیز هست. در ضمن، هر I -بافه یک C^{I_I} -بافه نیز هست.

منابع

1. Carboni A., Mantovani S., "An Elementary Characterization of Categories of Separated Objects", J. Pure and Appl. Alg., 89 (1993) 63-92.
2. Clementino M. M., Dikranjan D., Tholen W., "Torsion Theories and Radicals in Normal Categories", J. Algebra 305 (2006) 98-129.

3. Dikranjan D., Tholen W., "Categorical Structure of Closure Operators. Kluwer", Netherlands, (1995).
4. Ebrahimi M. M., "On Ideal Closure Operators of M -Sets", Southeast Asian Bull. of Math., 30 (2006) 439-444.
5. Golchin A., Renshow J., "Periodic Monoids over which all Flat Cyclic Right Acts Satisfy Condition (P)", Semigroup Forum, 54 (2) (1997) 261-263.
6. Golchin A., "On Flatness of Acts", Semigroup Forum, 67 (2003) 262-270.
7. Haddadi M., Sheykholslamia S. M. N., "Radical-Injectivity in the Category $S\text{-Act}$ ", arXiv:1806.07077v1.
8. Jackson M., "A Sheaf Theoretic Approach to Measure Theory", PhD Thesis, University of Pittsburgh (2006).
9. Kashu A. I., "On Preradicals Associated to Principal Functors of Module Categories", I, Bul. A. S. R. M., Matematica, 2 (60) (2009) 62-72.
10. Khanjanzadeh Z., "Topologies on Topos $M\text{-Act}$ and on Some Models of SDG", Ph.D. Thesis, Semnan University, March (2017).
11. Khanjanzadeh Z., Madanshekaf A., "Lawvere-Tierney Sheaves, Factorization Systems, Sections and j -essential Monomorphisms in a Topos", Italian J. Pure Appl. Math., 39 (2018) 55-72.
12. Khanjanzadeh Z., Madanshekaf A., "Weak Ideal Topology in the Topos of Right Acts over a Monoid", Comm. Alg., 46 (5) (2018) 1868-1888.
13. Khanjanzadeh Z., Madanshekaf A., "Weak Topologies on Toposes", Bull. Iran. Math. Soc. (2020). <https://doi.org/10.1007/s41980-020-00393-7>.
14. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A., "Monoids, Acts and Categories", Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2000).
15. Mac Lane S., Moerdijk I., "Sheaves in Geometry and Logic", Springer-Verlag, New York, (1992).
16. Mahmoudi M., Shahbaz L., "Characterizing Semigroups by Sequentially Dense Injective Acts", Semigroup Forum, 75 (2007) 116-128.
17. Moghaddasi Gh., Haddadi M., Delavari S., "On Injectivity of Acts", U.P.B. Sci. Bull., Series A, 79 (4) (2017) 189-198.
18. Nakayama K., "Topologies on Quantum Topoi Induced by Quantization", J. Math. Phys., 54 (2013) 072102.
19. Nakayama K., "Topos Quantum Theory on Quantization-Induced Sheaves", J. Math. Phys., 55 (2014) 102103.
20. Wiegandt R., "Radical and Torsion Theory for Acts", Semigroup Forum, 72 (2006) 312-328.