بررسی پایداری طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی خطی از مرتبه کسری

مریم عرب‌عامری*، احسان میرمحرابی؛ دانشگاه سیستان وبلوچستان، گروه ریاضی

دریافت ۹۲/٤/۱۲ پذیرش ۹۳/۸/۱۰

چکیده

عمل‌گرهای مشتق و انتگرال کسری مفهوم جدیدی از مشتق و انتگرال از مرتبهٔ دل‌خواه است. معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات نسبی (PDE[1]) که مشتقات موجود در آن بتوانند از مرتبه کسری باشند معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات نسبی کسری (FPDE[2]) گفته می شود. امروزه این معادلات به‌دلیل کاربرد زیاد توجه ویژه‌ای را به خود معطوف داشته‌اند. در این مقاله حالت نسبتاً کلی از یک FPDE مطرح می شود، برای به‌دست آوردن طرحی عددی، مشتقات کسری موجود در معادله با استفاده یکی از تعاریف متداول گرانوالد- لتنیکوف[3]، ریمان- لیوویل[4] و کاپتو[5] جای‌گزین می‌شوند و برای بهبود جواب عددی، مشتقات نسبی موجود در معادله با استفاده از طرح‌های تفاضلی غیراستاندارد (NSFD[6]) گسسته‌سازی می شوند. سپس پایداری طرح عددی حاصل بررسی می گردد و ثابت می‌شود روش معرفی شده غیرمشروط پایدار است. در پایان با هدف تأیید نتایج تئوری، تکنیک معرفی شده برای حل معادله موج با مرتبهٔ کسری که در فیزیک و شاخه‌های آن کاربرد فراوانی دارد به‌کار می رود. نتایج عددی مؤید یافته‌های تئوری است و نشان از کارایی این تکنیک دارد.

واژه‌های کلیدی: مشتقات کسری، معادله دیفرانسیل مرتبه کسری، طرح تفاضلات متناهی غیر استاندارد، پایداری.

مقدمه

تقریباً بیش‌تر قضیه‌های کاربردی در زمینهٔ حسابان کسری را نیوتن[7] و لایب نیتز[8] حدود سال‌های ۱۶۸۴-۱۶۶۷ مطرح کردند [۱] . تا این که فردی به نام آبل[9] در سال ۱۸۶۸برای حل مسئله‌ای فیزیکی، معادله خود را به معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ کسری تبدیل و سپس آن را حل کرد. طی صد سال اخیر کاربرد وسیعی از معادلات مرتبهٔ کسری در مهندسی و علوم کاربردی بررسی شده است. از خصوصیات مشتقات کسری این است که روی دامنه‌های ناهموار تعریف‌پذیر است، که در بعضی موارد مشتقات معمولی در این نواحی تعریف‌پذیر نیست.

*نویسنده مسئول arabameri@math.usb.ac.ir

1. Partial Differential Equation
2. Fractional Partial Differential Equation
3. Grundwald-Letnikov
4. Riemann-Liouville
5.Caputo
6. Non-Standard Finite Difference
7. Newton
8. Leibniz
9. Abel

میکنز[1] در سال ۱۹۹۴ طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد را برای حل دقیق‌تر معادلات دیفرانسیل مطرح کرد [۲] و مومانی[2] در سال ۲۰۱۱ طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد را برای معادلات با مشتقات نسبی به‌کار گرفت [۳]. در این مقاله نیز ابتدا روش عددی مبتنی بر تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای حل معادلات دیفرانسیل نسبی کسری مطرح و سپس پایداری این طرح بررسی می‌شود.

طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد

میکنز در سال ۱۹۹۴، اصول اولیهٔ طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد را معرفی کرد [۲]. ابتدا اصول اولیه این طرح را برای معادلهٔ دیفرانسیل معمولی (ODE[3]) شرح می‌دهیم، گسسته‌سازی غیراستاندارد برای PDE به‌طور مشابه انجام می‌شود. ODE بدین‌صورت را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

در طرح NSFD، $\frac{dy}{dt}$ بدین‌صورت گسسته‌سازی می شود:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\phi(h)}$$

که ϕ تابعی از طول گام $h = \Delta t$ است و مادامی که $h \to 0$ در خاصیت $\phi(h) = h + O(h^2)$ صدق می‌کند.

همچنین میکنز برای $\phi(h)$ توابع $sin(h), sinh(h), e^h - 1$ و h را در نظر گرفته است [۲]، [۳].

به‌راحتی می توان این نوع گسسته‌سازی را برای مشتقات نسبی تعمیم داد. به‌عنوان مثال برای $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ می‌توان این روابط را در نظر گرفت:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{u_{m+1}^k - u_{m-1}^k}{\phi(\Delta x)},$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{u_m^{k+1} - 2u_m^k - u_m^{k-1}}{\phi(\Delta t^2)},$$

که

$$\phi(\Delta x) = \Delta x + O(\Delta x^2),\ \phi(\Delta t) = \Delta t^2 + O(\Delta t^4).$$

حسابان کسری

در این قسمت عملگر D را برای مشتق از مرتبه هر عدد حقیقی تعمیم می‌دهیم. یکی از تعاریف مشتق کسری تعریف گرانوالد- لتنیکوف است [۱]. گرانوالد- لتنیکوف فرمول کلی موجود برای مشتق را بدین‌صورت تعمیم داد:

$$D^\alpha u(x) = \lim_{h\to 0, m\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(x - kh)}{h^\alpha},\ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

در این تعریف باید به دو نکته توجه کرد، نخست این که کران بالای مجموع، یعنی m، باید به‌سمت بی نهایت برود و از آن‌جا که لزومی ندارد که α صحیح باشد، جملات مجموع برای kهای مختلف صفر نمی‌شود.

1. Mickens
2. Mommani
3. Ordinary Differential Equation

همچنین مفهوم انتگرال نیز از تعریف مذکور نتیجه می شود. به‌عنوان مثال برای $\alpha = -1$ داریم:

$$D^{-1}u(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ m\to\infty}} \frac{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1)} u(x-kh)}{h^{(-1)}},$$

$$D^{-1}u(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ m\to\infty}} h\sum_{k=0}^{m} u(x-kh),$$

رابطهٔ مذکور تعریف انتگرال ریمان است. به‌طورکلی برای هر عدد حقیقی α، مشتق و یا انتگرال از مرتبهٔ α با تعریف گرانوالد- لتنیکوف بدین‌صورت است:

$${}_cD_x^{\alpha}u(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ mh=cx}} \frac{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{\alpha}{k}u(x-kh)}{h^{\alpha}},$$

که c کران پایین انتگرال ریمان است.

تعاریف دیگری را برای مشتقات کسری افرادی مانند ریمان- لیوویل و کاپتو معرفی کردند که مشتقات کسری ریمان- لیوویل از مرتبه غیرطبیعی α برای تابع $u(x,t)$ در بازهٔ $[a,b]$ بدین‌صورت تعریف می شود[۱]:

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^x \frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}}d\xi, \qquad n=[\alpha].$$

و همین طور مشتقات کسری کاپتو از مرتبهٔ γ $(m-1<\gamma<m)$ نسبت به t برای تابع $u(x,t)$ در بازهٔ $[0,T]$ بدین‌صورت تعریف می شود[۱]:

$$\frac{\partial^{\gamma}u(x,t)}{\partial t^{\gamma}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\displaystyle\int_0^t \frac{u^{(m)}(\eta)}{(t-\eta)^{\gamma+1-m}}d\eta, & m-1<\gamma<m,\\ \dfrac{d^m}{dt^m}u(t), & \gamma = m\epsilon\mathbb{N}. \end{cases}$$

قضیه ۱. دو تعریف مشتق کسری ریمان- لیوویل و گرانوالد- لتنیکوف معادل یک‌دیگرند.

اثبات. به [۱] مراجعه شود .

همچنین برای $0<\gamma<1$ مشتقات کسری روی بازه $[0,L]$ در نقطهٔ ابتدا و انتهای بازه بدین‌صورت تعریف می‌شوند [۴]:

$${}_0D_x^{\gamma}u(x) = \frac{u(0)x^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^x \frac{u'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{\gamma}}, \qquad (۱)$$

$${}_xD_L^{\gamma}u(x) = \frac{u(L)(l-x)^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_x^L \frac{u'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{\gamma}}. \qquad (۲)$$

با استفاده از قضیه ۱، جمله دوم سمت راست رابطه (۱) را می‌توان با در نظر گرفتن $h = L/N$ و $x_l = lh, 0 \le l \le N$، بدین‌صورت تقریب زد:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^x \frac{u'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{\gamma}} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^x \frac{u'(x-\xi)d\xi}{\xi^{\gamma}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\sum_{j=0}^{l-1}\int_{jh}^{(j+1)h} \frac{u'(x-\xi)d\xi}{\xi^{\gamma}}$$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{u(x-jh)-u(x-(j+1)h)}{h}\int_{jh}^{(j+1)h}\frac{d\xi}{\xi^{\gamma}}$$

$$= \frac{h^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{l-1} (u_{l-j} - u_{l-j-1})[(j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}].$$

بنا بر این تقریب مشتق برای نقطهٔ ابتدای بازه به‌ازای $0 < \gamma < 1$ بدین‌صورت نمایش داده می شود:

$$ {}_0D_x^{\gamma} u(x_l) = \frac{h^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \left\{ \frac{(1-\gamma)u_0}{l^{\gamma}} + \sum_{j=0}^{l-1} (u_{l-j} - u_{l-j-1})[(j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}] \right\}. \qquad (۳)$$

به‌طور مشابه از رابطهٔ (۲) می توان تقریبی برای مشتق کسری در نقطه انتهای بازه بدین‌صورت به‌دست آورد:

$$ {}_xD_L^{\gamma} u(x_l) = \frac{h^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \left\{ \frac{(1-\gamma)u_N}{(N-l)^{\gamma}} + \sum_{j=0}^{N-l-1} (u_{l+j} - u_{l+j+1})[(j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}] \right\}.$$

مشتقات مرتبهٔ کسری اغلب به‌طور تحلیلی به‌سختی قابل محاسبه هستند. به‌همین دلیل در بیش‌تر موارد به‌طور عددی محاسبه می شوند. یکی از ساده‌ترین محاسبه‌ها با تعریف گرانوالد-لتنیکوف صورت می‌گیرد به‌این ترتیب که با توجه به تعریف گرانوالد- لتنیکوف برای مشتق مرتبهٔ کسری، این رابطه برای محاسبه تقریبی مشتق مرتبهٔ کسری به‌کار می‌رود:

$$ {}_cD_x^{\alpha} u(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\frac{x-c}{h}\right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(x-kh)}{h^{\alpha}},$$

حالت ساده‌تر رابطهٔ مذکور بدین‌صورت نوشته می‌شود:

$$ {}_cD_x^{\alpha} u(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-c}{h}\right]} c_k^{\alpha} u(x-kh),$$

که در آن h طول گام، [.] تابع جزء صحیح و c_k^{α} ضرایب گرانوالد- لتنیکوف هستند که بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$c_k^{\alpha} = h^{-\alpha}(-1)^k \binom{\alpha}{k}, \ k = 0,1,2,3 \ldots.$$

ضرایب c_k^{α} به‌طور بازگشتی بدین‌صورت قابل محاسبه هستند:

$$c_0^{\alpha} = h^{-\alpha}, c_k^{\alpha} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{k}\right) c_{k-1}^{\alpha}, \ k = 1,2,3, \ldots.$$

گسسته‌سازی FPDE با روش تفاضلات متناهی غیر استاندارد

FPDE خطی زیر را با شرایط اولیه و مرزی داده شده در نظر بگیرید،

$$\beta_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^{\gamma} u(x,t)}{\partial t^{\gamma}} + \beta_3 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta_4 \frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} = f(x,t),$$

$$a < x < b, 0 < \gamma \le 2, 1 < \alpha \le 2 \qquad (٤)$$

$$u(a,t) = \psi_1(t), \ u(b,t) = \psi_2(t), \quad 0 \le t < T,$$

$$u(x,0) = \xi_0(x), \qquad a \le x \le b,$$

که به‌ازای $i = 1,2,3,4$ ، $\beta_i > 0$.

با استفاده تقریب مشتق کاپتو برای گسسته‌سازی مشتق زمان و تعریف ریمان- لیوویل برای گسسته‌سازی مشتق مکان و با در نظر گرفتن $\Delta x = \Delta t = h$ این رابطه حاصل می شود:

$$\frac{\partial^{\gamma}u(x_i,t_{k+1})}{\partial t^{\gamma}}=\frac{(h)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k}b_j^{\gamma}\left[u\left(x_i,t_{k+1-j}\right)-u\left(x_i,t_{k-j}\right)\right],$$

که

$$b_j^{\gamma}=(j+1)^{1-\gamma}-j^{1-\gamma},\quad (j=0,1,2,\dots,n).$$

و

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x_i,t_{k+1})}{\partial x^{\alpha}}=\sum_{j=0}^{i+1}c_j^{\alpha}u\left(x_{i+1-j},t_{k+1}\right),$$

و با پیاده‌سازی طرح NSFD برای گسسته‌سازی $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ داریم:

$$\frac{\partial u(x_i,t_{k+1})}{\partial t}=\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_k)}{\phi_1(h)},$$

$$\frac{\partial u(x_i,t_{k+1})}{\partial x}=\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_{i-1},t_{k+1})}{\phi_2(h)},$$

که توابع ϕ_1 و ϕ_2 در این رابطه صدق می کنند:

$$\phi_1(h)=\phi_2(h)=h+O(h^2),$$

طرح NSFD برای گسسته‌سازی $\frac{\partial^{\alpha}u(x_i,t_{k+1})}{\partial x^{\alpha}}$، بدین‌صورت است که اولین ضریب مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف به‌جای $c_{\cdot}^{\alpha}=h^{-\alpha}$، $c_0^{\alpha}=\phi_3^{-\alpha}(h)$ در نظر گرفته می شود، همچنین برای گسسته‌سازی $\frac{\partial^{\gamma}u(x_i,t_{k+1})}{\partial t^{\gamma}}$، $\phi_4^{-\gamma}(h)$ جای‌گزین $h^{-\gamma}$ می‌شود که توابع ϕ_3 و ϕ_4 در این رابطه صدق می کنند:

$$\phi_3(h)=\phi_4(h)=h^2+O(h^4).$$

با جای‌گذاری روابط مذکور در رابطهٔ (۴) و با در نظر گرفتن $\phi_1=\phi_2$ و $\phi_3=\phi_4$ این معادله به‌دست می‌آید:

$$\beta_1\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_k)}{\phi_1(h)}+\beta_2\frac{\phi_3^{-\gamma}(h)}{\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k}b_j^{\gamma}\left[u\left(x_i,t_{k+1-j}\right)-u\left(x_i,t_{k-j}\right)\right]=-\beta_3\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_{i-1},t_{k+1})}{\phi_1(h)}-\beta_4\sum_{j=0}^{i+1}c_j^{\alpha}u\left(x_{i+1-j},t_{k+1}\right)+f_i^{k+1},$$

بعد از انجام عملیات ریاضی داریم:

$$\beta_1\frac{u_i^{k+1}-u_i^{k}}{\phi_1(h)}+\beta_2\frac{\phi_3^{-\gamma}(h)}{\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k}b_j^{\gamma}\left[u_i^{k+1-j}-u_i^{k-j}\right]=-\beta_3\frac{u_i^{k+1}-u_{i-1}^{k+1}}{\phi_1(h)}-\beta_4\sum_{j=0}^{i+1}c_j^{\alpha}u_{i+1-j}^{k+1}+f_i^{k+1},$$

یا

$$au_i^{k+1}-a_2u_{i-1}^{k+1}+a_3\Big(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{i+1}c_j^{\alpha}u_{i+1-j}^{k+1}\Big)=\beta_1u_i^{k}+\beta_2a_1\Big[b_k^{\gamma}u_i^{0}+\sum_{j=0}^{k-1}\left(b_j^{\gamma}-b_{j+1}^{\gamma}\right)u_i^{k-j}+\phi_1(h)f_i^{k+1},\qquad (۵)$$

که

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\phi_3^{-\gamma}(h)\phi_1(h)}{\Gamma(2-\gamma)}, \\ a_2 = \beta_3\,, \\ a_3 = -\beta_4\phi_1(h), \\ a = \beta_1 + \beta_2 a_1 + a_2 + \alpha a_3. \end{cases}$$

و با در نظر گرفتن $b_j^\gamma = (j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}$ در رابطهٔ (۳) داریم:

$$\begin{cases} b_0^\gamma = 1, b_j^\gamma > 0, \quad j = 1,2,\dots \\ b_j^\gamma > b_{j+1}^\gamma, \qquad j = 0,1,2,.. \end{cases} \tag{٦}$$

اگر بردار مجهولات به‌صورت $\mathbf{u}^{(k)} = \left[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_{m-1}^{(k)}\right]$ و شرایط مرزی به‌صورت $u_0^{(k)} = \psi_1(k\Delta t)$ و $u_m^{(k)} = \psi_2(k\Delta t)$ در نظر گرفته شوند، رابطهٔ (۵) به یک دستگاه معادلات خطی بر حسب بردار مجهولات $\mathbf{u}$ تبدیل می شود که ماتریس ضرایب آن عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} a & a_3 & 0\dots.0 & & & \\ -a_2 & a & a_3 & 0\dots 0 & & \\ & & \cdot & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & \cdot & & & \\ 0\dots 0 & & -a_2 & a & a_3 \\ 0\dots 0 & & & -a_2 & a \end{bmatrix}$$

چنان‌که ملاحظه می‌شود ماتریس ضرایب دستگاه (۵) یک ماتریس قالب قطری اکید با درایه‌های قطری مثبت و غیرقطری منفی است [۵] از این رو این ماتریس معکوس‌پذیر و دستگاه (۵) جواب یکتا دارد.

بررسی پایداری

در این بخش لم‌هایی را در راستای بررسی پایداری FPDE مطرح و اثبات می‌کنیم.

تعریف پایداری: فرض کنید u_i^k جواب تقریبی و U_i^k جواب دقیق معادله در i-امین گره شبکه در سطر زمانی k-ام باشد، قرار دهید $\varepsilon_i^k = U_i^k - u_i^k$ و $\mathbf{E}^k = U^k - u^k$ ، همچنین فرض کنید $\|\mathbf{E}^k\|_\infty = \max_{1\le i\le m-1}|\varepsilon_i^k|$. در این‌صورت طرح تفاضلی پایدار است اگر و فقط اگر $\|\mathbf{E}^k\|_\infty$ کراندار باشد.

لم ۱. فرض کنید u_i^k به ازای $i = 1,2,\dots,m-1$ و $k = 1,2,\dots,n$، i-امین مؤلفه بردار جواب در سطر زمانی k-ام باشد، اگر $\|\mathbf{u}^{k+1}\|_\infty = \max_{1\le i\le m-1}|u_i^{k+1}| = |u_M^{k+1}|$ ، آن‌گاه نامساوی زیر برقرار است:

$$(\beta_1 + \beta_2 a_1)\|\mathbf{u}^{k+1}\|_\infty \le \left|\beta_1 u_M^k + \beta_2 a_1[b_k^\gamma u_M^0 + \sum_{j=0}^{k-1}\left(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma\right)u_M^{k-j}] + \phi_1(h)\, f_M^{k+1}\right|.$$

اثبات. طبق فرض $\|\mathbf{u}^{k+1}\|_\infty = |u_M^{k+1}|$، داریم:

$$(\beta_1 + \beta_2 a_1)\|\mathbf{u}^{k+1}\|_\infty = |(\beta_1 + \beta_2 a_1)u_M^{k+1}|$$

حال با توجه به رابطهٔ (۵)، می‌توان نوشت:

$$|(\beta_1 + \beta_2 a_1)u_M^{k+1}| \le (\,a - a_2 + a_3 \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne 1}}^{i+1} c_j^\alpha)|u_M^{k+1}|$$

و از این که $\sum_{j=0}^{i+1} c_j^\alpha < 0$ و $a_3 < 0$، با استفاده از نامساوی مثلث این نتیجه به‌دست می‌آید:

$$(a-a_2+a_3\sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{i+1}c_j^{\alpha})\left|u_M^{k+1}\right| \le a\left|u_M^{k+1}\right|-a_2\left|u_{M-1}^{k+1}\right|+a_3\sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{i+1}c_j^{\alpha}\left|u_{M+1-j}^{k+1}\right|$$

$$\le \left|au_M^{k+1}-a_2u_{M-1}^{k+1}+a_3\sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{i+1}c_j^{\alpha}u_{M+1-j}^{k+1}\right|,$$

حال با قدر مطلق گرفتن از طرفین رابطهٔ (۵)،

$$\left|au_M^{k+1}-a_2u_{M-1}^{k+1}+a_3\sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{i+1}c_j^{\alpha}u_{M+1-j}^{k+1}\right|$$

$$=\left|\beta_1u_M^k+\beta_2a_1[b_k^{\gamma}u_M^0+\sum_{j=0}^{k-1}\left(b_j^{\gamma}-b_{j+1}^{\gamma}\right)u_M^{k-j}+\phi_1(h)\,f_M^{k+1}\right|.$$

از ترکیب روابط فوق، لم اثبات می‌شود.

لم۲. فرض کنید u_i^k جواب عددی رابطهٔ (۵) برای $k=1,2,\dots,n$ و $i=1,2,\dots,m-1$ باشد، اگر $\beta_1\neq 0$ آن‌گاه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(\beta_1+\beta_2a_1)\max_{1\le j\le k}\|\mathbf{u}^k\|_\infty \le (\beta_1+\beta_2a_1)\|\mathbf{u}^0\|_\infty+k\phi_1(h)\|\mathbf{f}\|.$$

اثبات. مجدداً فرض کنید $\|\mathbf{u}^{k+1}\|_\infty=\max_{1\le i\le m-1}\left|u_i^{k+1}\right|=\left|u_M^{k+1}\right|$، طبق لم (۱) داریم:

$$\left|(\beta_1+\beta_2a_1)u_M^{k+1}\right| \le \left|\beta_1u_M^k+\beta_2a_1[b_k^{\gamma}u_M^0+\sum_{j=0}^{k-1}\left(b_j^{\gamma}-b_{j+1}^{\gamma}\right)u_M^{k-j}+\phi_1(h)\,f_M^{k+1}\right|$$

$$\le\left\{\beta_1+\beta_2a_1[b_k^{\gamma}+\sum_{j=0}^{k-1}\left(b_j^{\gamma}-b_{j+1}^{\gamma}\right)\right\}\max_{1\le j\le k}\|\mathbf{u}^j\|_\infty+\phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty$$

$$=(\beta_1+\beta_2a_1)\max_{1\le j\le k}\|\mathbf{u}^j\|_\infty+\phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty$$

به‌عبارت دیگر

$$(\beta_1+\beta_2a_1)\max_{1\le j\le k+1}\|\mathbf{u}^j\|_\infty \le (\beta_1+\beta_2a_1)\max_{1\le j\le k}\|\mathbf{u}^j\|_\infty+\phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty$$

$$\le (\beta_1+\beta_2a_1)\max_{1\le j\le k-1}\|\mathbf{u}^j\|_\infty+2\phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty$$

$$\vdots$$

$$\le (\beta_1+\beta_2a_1)\max_{1\le j\le 1}\|\mathbf{u}^j\|_\infty+k\phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty,$$

یا

$$(\beta_1+\beta_2a_1)\max_{1\le j\le k+1}\|\mathbf{u}^j\|_\infty \le (\beta_1+\beta_2a_1)\|\mathbf{u}^0\|_\infty+(k+1)\phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty.$$

لم ۳. در رابطهٔ (۵) اگر $\beta_1=0$ و $\beta_2\neq 0$ در نظر گرفته شود آن‌گاه برای هر k=1,2,…,n، این نامساوی برقرار است:

$$\|\mathbf{u}^j\|_\infty \le \|u^0\|_\infty+\left(b_{j-1}^{\gamma}\beta_2a_1\right)^{-1}\phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty,\quad j=1,2,\dots,n. \qquad (۷)$$

اثبات. درستی رابطهٔ مذکور را با استقراء روی j نشان می‌دهیم. از لم (۲) برای j=1 داریم:

$$\left|\beta_2 a_1 u_M^1\right| \le \left|\left(\beta_2 a_1 b_0^\gamma\right) u_M^0 + \phi_1(h) f_M^1\right| \le \beta_2 a_1 \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty$$

بنا بر این

$$\left\|\beta_2 a_1 \mathbf{u}^1\right\|_\infty \le \beta_2 a_1 b_0^\gamma \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty$$

و از رابطهٔ (٦) داریم $b_0^\gamma = 1$، از این رو،

$$\|\mathbf{u}^1\|_\infty \le \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \left(\beta_2 a_1\right)^{-1} \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty$$

حال فرض کنید رابطهٔ (۷) برای j=k برقرار باشد، درستی رابطهٔ (۷) برای j=k+1 بررسی می‌شود، از روابط موجود در لم (۲)، می‌توان نوشت:

$$\left|\beta_2 a_1 u_M^{k+1}\right| \le \left|\beta_2 a_1 [b_k^\gamma u_M^0 + \sum_{j=0}^{k-1} \left(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma\right) u_M^{k-j}] + \phi_1(h)\, f_M^{k+1}\right|$$

بنا بر این

$$\beta_2 a_1 \left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|_\infty \le \beta_2 a_1 [b_k^\gamma \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \sum_{j=0}^{k-1} \left(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma\right) \left\|\mathbf{u}^{k-j}\right\|_\infty] + \phi_1(h)\, \|\mathbf{f}\|_\infty$$

طبق برقراری فرض استقرا و با استفاده از رابطهٔ (۶) می‌توان نوشت:

$$\beta_2 a_1 \left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|_\infty \le \beta_2 a_1 [b_k^\gamma \sum_{j=0}^{k-1} \left(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma\right)] \|\mathbf{u}^0\|_\infty$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \left(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma\right) \left(b_k^\gamma \beta_2 a_1\right)^{-1} \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty + \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty, \qquad (۸)$$

حال با تقسیم طرفین رابطه (۸) به $\beta_2 a_1$ این نتیجه به‌دست می‌آید:

$$\left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|_\infty \le \left[b_k^\gamma \sum_{j=0}^{k-1} \left(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma\right)\right] \|\mathbf{u}^0\|_\infty$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \left(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma\right) \left(b_k^\gamma \beta_2 a_1\right)^{-1} \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty + \left(b_k^\gamma \beta_2 a_1\right)^{-1} \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty$$

به‌عبارت دیگر

$$\left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|_\infty \le \|\mathbf{u}^0\|_\infty + [b_k^\gamma + \sum_{j=0}^{k-1} \left(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma\right)] \left(b_k^\gamma \beta_2 a_1\right)^{-1} \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty$$
$$= \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \left(b_k^\gamma \beta_2 a_1\right)^{-1} \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty\,,$$

بنا بر این

$$\left\|\mathbf{u}^j\right\|_\infty \le \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \left(b_{j-1}^\gamma \beta_2 a_1\right)^{-1} \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty,\ j = 1,2,\dots,n. \qquad (۹)$$

همچنین از رابطهٔ (۶) می‌توان به‌راحتی نشان داد:

$$\left(b_k^\gamma\right)^{-1} \le \rho k^\gamma, \qquad k = 1,2,\dots (0 < \gamma \le 1),$$

بنا بر این رابطهٔ (۹) را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$\left\|\mathbf{u}^j\right\|_\infty \le \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \omega \left(j\phi_1(h)\right)^\gamma \phi_1(h)\|\mathbf{f}\|_\infty, \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

که $\omega = \rho \beta_2^{-1} \Gamma(2-\gamma)$.

قضیه ۲. طرح تفاضلی (۵) با شرایط مرزی دیریکله مفروض به‌صورت غیرمشروط پایدار است.

اثبات. به‌ازای $i = 1,2,\dots,m-1$ و $k = 1,2,\dots,n$ قرار دهید $\varepsilon_i^k = U_i^k - u_i^k$، که u_i^k جواب تقریبی و U_i^k جواب دقیق معادلهٔ (۴) در i-امین گره شبکه سطر زمانی k-ام باشد. همچنین فرض کنید $\|\mathbf{E}^k\|_\infty = \max_{1\le i\le m-1}|\varepsilon_i^k|$، به‌راحتی از لم‌های ۲ و ۳ می‌توان نتیجه گرفت $\|\mathbf{E}^k\|_\infty \le \|\mathbf{E}^0\|_\infty$ ، بنا بر این طرح تفاضلی (۵) به‌صورت غیرمشروط پایدار است.

نتایج عددی

مثال (۱): برای اثبات کارایی روش NSFD، این روش را برای معادلهٔ موج کسری به این شکل به‌کار می‌بریم:

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial u}{\partial x} = g(x,t), \quad t > 0,\ 0 < \gamma \le 1,\ 0 \le x \le 0.5, \qquad (۱۰)$$

$$g(x,t) = \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}\sin x + t\cos x,$$

شرایط اولیه و مرزی بدین‌صورت در نظر گرفته می‌شوند:

$$u(x,0) = 0,$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(0.5,t) = 0.47943t.$$

جواب دقیق این معادله، عبارت است از [۶] :

$$u(x,t) = t\sin x.$$

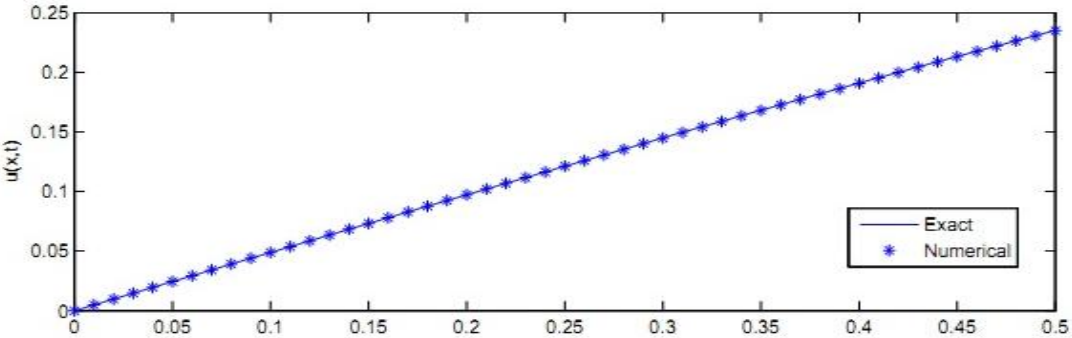
واضح است که معادله (۱۰) با در نظر گرفتن $\beta_4 = \beta_1 = 0$ و $\beta_2 = \beta_3 = 1$ در رابطهG (۴)، به‌دست می‌آید، بنا بر این معادله تفاضلی به این شکل حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_m^{k-n} + \frac{u_m^k - u_{m-1}^k}{\phi_1(\Delta x)} = g_m^k,\ \Delta x = \Delta t = h.$$

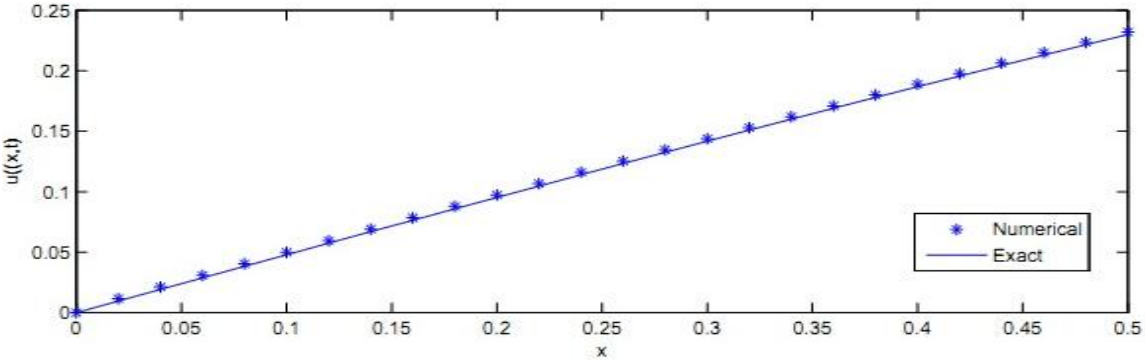
$$u_{m+1}^k = 2\left(g_m^k - c_0 u_m^k + \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_m^{k-n}\right)\phi_1(h) + u_{m-1}^k,$$

که $c_0 = \frac{1}{2}\phi_1(h)^{-\gamma}$ وتابع $\phi_1(h)$ را می‌توان به‌صورت $\phi_1(h) = e^h - 1$ در نظر گرفت [۱].

از پیاده‌سازی طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد روی معادلهٔ موج از مرتبهٔ کسری، در بازهٔ مکانی [۰,۰/۵] با $\gamma = 0.9$ و hهای مختلف جواب عددی با دقت قابل قبول حاصل می‌شود. در شکل‌های (۱) و (۲) جواب‌های دقیق و عددی حاصل شده با طول گام‌های متفاوت h= ۰/۰۱ و h= ۰/۰۲ مقایسه می‌شوند.



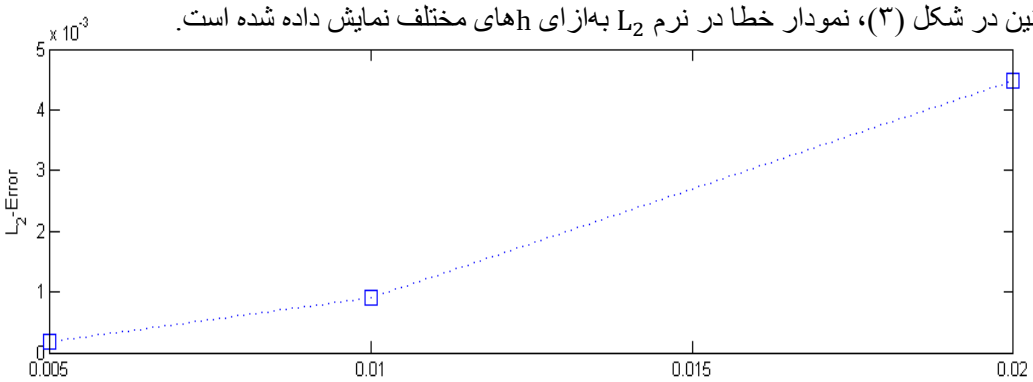
شکل ۱. مقایسهٔ جواب دقیق با جواب به‌دست آمده از طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد به‌ازای m=50 در t=0.5



شکل۲. مقایسه جواب دقیق با جواب به‌دست آمده از طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد به‌ازای m=25 در t=0.5

شکل‌های (۱) و (۲) نمایش نمودار مقایسهٔ جواب حاصل از طرح NSFD با جواب دقیق مسئله هستند که به‌ترتیب به‌ازای۵۰ و ۲۵ نقطهٔ گره که به‌طور یکنواخت در بازهٔ [۰,۰/۵] توزیع شده‌اند نتیجه شده است.

همچنین در شکل (۳)، نمودار خطا در نرم L_2 به‌ازای hهای مختلف نمایش داده شده است.



شکل ۳. نمودار خطای به‌دست آمده با hهای مختلف

در جدول (۱) مرتبه طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای معادله موج کسری محاسبه و ارائه شده است.

جدول ۱. مرتبه طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای معادله موج کسری

طول گام	خطا در نرم L_2	مرتبهٔ همگرایی
h =۰/۰۲	۰/۰۰۴۴۷۲۲۱	-
h = ۰/۰۱	۰/۰۰۰۸۹۴۴	۲/۳۲۲
h= ۰/۰۰۵	۰/۰۰۰۱۷	۲/۳۹۵

مثال (۲): معادلهٔ برگر کسری زیر با شرایط اولیه و مرزی داده شده را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=q(x,t),\qquad t\geq 0,\ \ 0<\gamma\leq 1,$$

$$q(x,t)=\frac{2t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)}+2x-2,$$

$$u(x,0)=x^2,\qquad 0<x<0.5,$$

$$u(0,t)=t^2,\qquad u(0.5,t)=t^2+0.25.$$

که جواب دقیق آن عبارت است از [۷]:

$$u(x,t)=x^2+t^2,$$

با پیاده‌سازی طرح NSFD روی معادله برگر کسری این نتیجه به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_m^{k-n} + \frac{u_{m+1}^k - u_{m-1}^k}{\phi_2(\Delta x)} + \frac{u_m^{k+1} + 2u_m^k - u_m^{k-1}}{\phi_3(\Delta t)} = q_m^k,\ \Delta x = \Delta t = h.$$

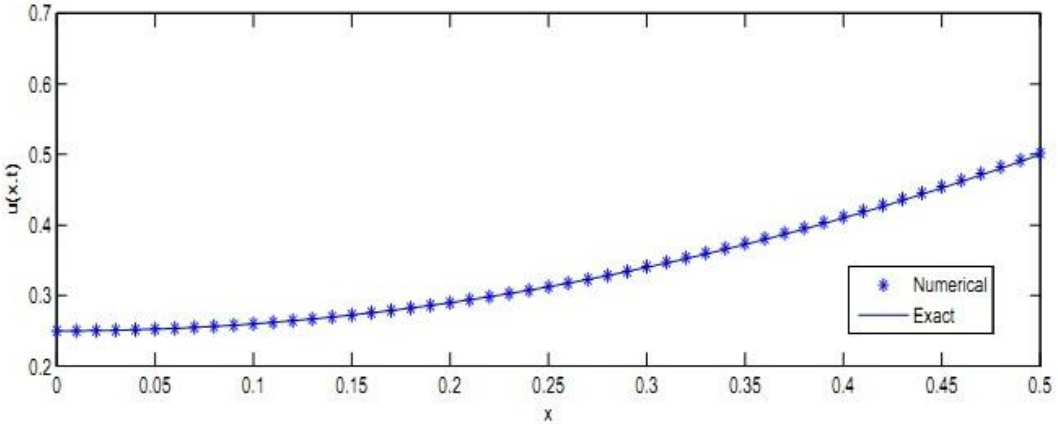
که توابع ϕ_2 و ϕ_3 بدین‌صورت است:

$$\phi_2 = 4\sin^2\frac{h}{2},$$

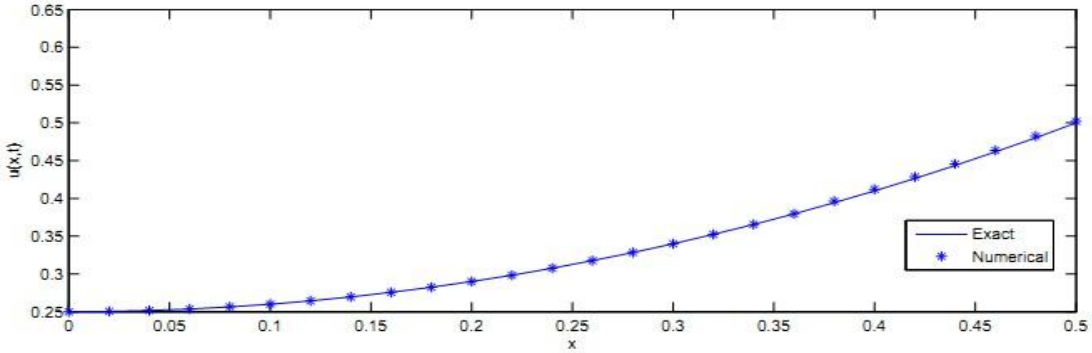
$$\phi_3 = 2\sin h,$$

و همچنین $c_0 = (\frac{1}{2}\phi_3(h))^{-\alpha}$ در نظر گرفته شود[۱].

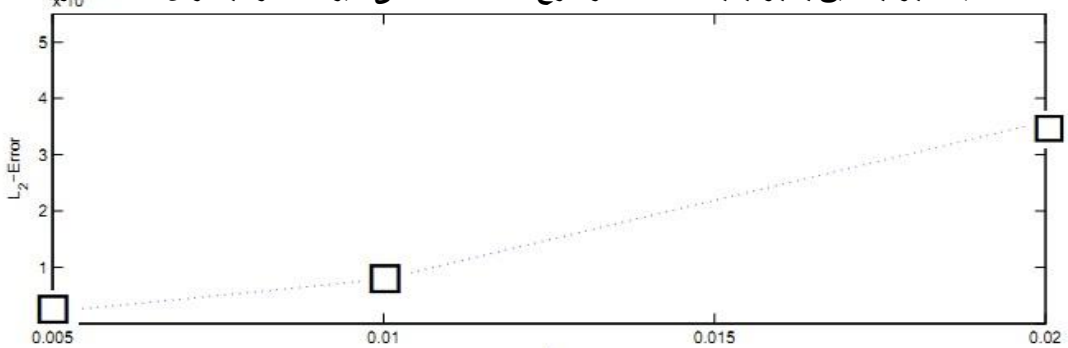
از پیاده‌سازی طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد روی معادلهٔ برگر از مرتبهٔ کسری، در بازهٔ مکانی [۰,۰/۵] با $\gamma = 0.7$ و hهای مختلف جواب عددی با دقت قابل قبول حاصل می‌شود. در شکل‌های ۴ و ۵ جواب‌های دقیق و عددی حاصل شده با طول گام های متفاوت h= ۰/۰۱ و h= ۰/۰۲ مقایسه می شوند.



شکل ۴. مقایسهٔ جواب دقیق با جواب به‌دست آمده از طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد به‌ازای m=50 در t=0.5



شکل ۵. مقایسهٔ جواب دقیق با جواب به‌دست آمده از طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد به ازای m=25 در t=0.5



شکل ۶. نمودار خطای به‌دست آمده با hهای مختلف

شکل‌های ۴ و ۵ نمایش نمودار مقایسهٔ جواب به‌دست آمده از طرح NSFD با جواب دقیق مسئله است که به‌ترتیب به‌ازای۵۰ و ۲۵ نقطه گره که به‌طور یکنواخت در بازهٔ [۰,۰/۵] توزیع شده‌اند نتیجه شده است. هم‌چنین در شکل ۶، نمودار خطا در نرم L_2 به‌ازای hهای مختلف نمایش داده شده است.

در جدول ۲ مرتبهٔ روش محاسبه و ارائه شده است.

جدول ۲. مرتبهٔ طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای معادله برگر کسری

طول گام	خطا در نرم L_2	مرتبه همگرایی
h =۰/۰۲	۰/۰۰۳۵۹۰۱	-
h = ۰/۰۱	۰/۰۰۰۷۸۸	۲/۱۳۷۶۶
h=۰/۰۰۵	۰/۰۰۰۲۰۷۳۲	۱/۹۲۶۱۳

نتیجه‌گیری

نتایج عددی به‌دست آمده از حل PDE از مرتبهٔ کسری با طرح NSFD نشان از توافق خوب این تکنیک با تکنیک‌هایی که در گذشته برای حل این دسته از معادلات به‌کار رفته، دارند؛ و بررسی‌های دقیق‌تر مؤید این مطلب است که روش غیراستاندارد روشی قدرتمند و کارا برای حل این دسته از معادلات است. هم‌چنین می‌توان پایداری این دسته از معادلات دیفرانسیل نسبی که به‌صورت ضمنی گسسته‌سازی می‌شوند را نتیجه گرفت [۳]. انتظار می‌رود ایدهٔ مطرح شده در این مقاله، برای PDEهای خطی وغیرخطی از مرتبهٔ کسری دیگر هم نتایج مشابهی ارائه کند.

منابع

1. Podlubny I., "Fractional differential equations", Academic Press, New York (1999).
2. Mickens R.E., "Nonstandard finite difference models of differential equation", World Scientific, Singapore (1994).
3. Moaddy K., Mommani S., Hashim I., "The non-standard finite difference for linear fractional PDEs in fluid mechanics", Comput. Math. Appl., 61 (2011) 1209-1216.
4. Oldham K.B., Spanier J., "The fractional calculus", Academic Press, New York (1974).
5. Gene H. Golub, Cherles F., Van Loan, "Matrix computations" Johns Hopkins university press, London (1996).
6. Odibat Z., Momani S., "The variational iteration method an efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics", Comput. Math. Appl., 58 (2009) 2199-2208.
7. Mickens R.E., "Applications of nonstandard finite difference schemes", Singapore (2000).