وجود و یگانگی جواب‌های مثبت نوعی از مسئلۀ مقدار مرزی شامل معادلۀ دیفرانسیل مرتبۀ کسری

اصغر احمدخانلو؛ دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دریافت ۹۵/۹/۲۵ پذیرش ۹۶/۴/۱۲

چکیده

در این مقاله نوعی مسئلۀ مقدار مرزی شامل یک معادلۀ دیفرانسیل مرتبۀ کسری را بررسی می‌کنیم. مسئلۀ

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t)\big), & 0 < t < 1, \\ x(0) = 0, & D_0^{\alpha/2}\, x(1) = 0, \end{cases}$$

را از لحاظ وجود و یگانگی جواب‌های مثبت بررسی می‌کنیم که در آن $D_{0^+}^{\alpha}$ مشتق مرتبۀ کسری از نوع ریمان- لیوویل است. ابتدا تابع گرین محاسبه می‌شود سپس ثابت می‌شود تابع گرین مثبت است و با تعیین سوپریمم انتگرال تابع گرین روی بازه جواب و با استفاده از برخی تعمیم‌هایی که اخیراً برای نگاشت‌های $\alpha - \varphi$-انقباضی ارائه شده است، شرایط لازم و کافی را برای وجود و یگانگی جواب مثبت این مسئله تعیین می‌کیم. بدین‌منظور که ابتدا با استفاده از وجود جواب پایینی برای مسئلۀ مذکور و استفاده از تعمیم نگاشت‌های $\alpha - \varphi$-انقباضی روی فضای مرتب، وجود ویگانگی جواب مثبت ثابت می‌شود سپس با استفاده از تعمیم دیگری از نگاشت‌های $\alpha - \varphi$-انقباضی روی فضای مرتب وجود و یگانگی جواب مثبت مسئله ثابت می‌شود. هم‌چنین مثالی برای تشریح نتایج ثابت شده ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مسائل مقدار مرزی، معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، مشتق کسری ریمان- لیوویل، قضیه نقطه ثابت.

مقدمه

در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل مرتبۀ کسری هم از لحاظ نظری و هم کاربردی توجه بسیاری از دانشمندان و ریاضی‌دانان را به خود جلب کرده است. برخی کاربردهای این معادلات را می‌توان در مدل‌سازی و فرایندهای فیزیکی و شیمیایی و مهندسی ملاحظه کرد [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]. بررسی وجود و یگانگی جواب‌های مسائل مقدار مرزی و اولیه شامل معادلات دیفرانسیل مرتبۀ کسری نیز با توجه به‌وسعت کاربرد حساب دیفرانسیل کسری اهمیت ویژه‌ای دارد و اخیراً چندین مقاله در این زمینه چاپ شده است که از تکنیک‌های متفاوتی مانند قضایای نقطه ثابت، نظریه لرای[1]-شاودر[2] و روش تجزیه آدومیان[3] در آن‌ها استفاده شده است. نمونه‌هایی از آن‌ها را می‌توان در [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱] ملاحظه کرد.

بای[4] و لو[5] [۹] مسئلۀ مقدار مرزی

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t)\big), & 0 < t < 1, \\ x(0) = 0, & x(1) = 0, \end{cases}$$

---

*نویسندۀ مسئول ahmadkhanlu@azaruniv.ac.ir

1. Leray
2. Schauder
3. Adomian
4. Bai
5. Lü

را که در آن $1 < \alpha \le 2$ و $D_{0^+}^{\alpha}$ مشتق کسری ریمان-لیوویل است را بررسی کرده و وجود جواب‌های مثبت را با استفاده از قضایای نقطه ثابت لگت[1]-ویلیامز[2] و کراسنوسلسکی[3] ثابت کرده‌اند.

ژانگ[4] [۷] با قضایای نقطه ثابت لگت-ویلیامزو کراسنوسلسکی وجود جواب‌های مثبت چندگانه را برای مسئلهٔ مقدار مرزی غیرخطی

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0^+}^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad 0 < t < 1, 1 < \alpha \le 2, \\ x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) + x'(1) = 0, \end{cases}$$

ثابت کرد. در این مسئله ${}^{c}D_{0^+}^{\alpha}$ مشتق کسری کاپوتو[5] و f تابعی پیوسته است.

کوفمن[6] و امبومی[7] [۱۰] با تکنیک‌های یاد شده مسئلهٔ مقدار مرزی

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}x(t) + a(t)f\big(x(t)\big), \ \ 0 < t < 1, \\ x(0) = 0, \qquad\qquad x'(1) = 0, \end{cases}$$

را بررسی کردند که در آن $1 < \alpha \le 2$ و $D_{0^+}^{\alpha}$ مشتق کسری ریمان- لیوویل است.

با توجه به کارهای انجام شده در این مقاله مسئلهٔ مقدار مرزی

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t)\big), \ \ 0 < t < 1, \\ x(0) = 0, \qquad\qquad D_{0}^{\alpha/2}\, x(1) = 0, \end{cases} \tag{۱}$$

را بررسی می‌کنیم. که در آن $1 < \alpha \le 2$ و $D_{0^+}^{\alpha}$ مشتق کسری ریمان- لیوویل است. با استفاده از جواب پایینی[8] و برخی تعمیم‌ها برای نگاشت‌های $\alpha - \psi-$انقباضی، وجود و یگانگی جواب مثبت را برای مسئلهٔ مقدار مرزی (۱) با بیان دو قضیه ثابت می‌کنیم. این مقاله به‌صورت زیر تنظیم شده است. در بخش بعدی برخی پیش‌نیازها و تعاریف لازم می‌شود سپس نتایج اصلی بیان و ثابت می‌شود و سرانجام یک مثال برای تشریح قضایای اثبات شده بیان می‌شود.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱. انتگرال *ریمان- لیوویل* از مرتبهٔ α برای تابع $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$I_{0^+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds \tag{۲}$$

مشروط بر این که انتگرال مذکور موجود باشد [۱۲]، [۱۳].

تعریف ۲. مشتق کسری از مرتبهٔ α برای *تابع* $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$D_{0^+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds \tag{۳}$$

که در آن $n - 1 < \alpha \le n$، مشروط بر اینکه انتگرال فوق موجود باشد[۱۲]، [۱۳].

لم ۱. [۱۲] فرض کنید $Re(\alpha+\beta) > 0$، $Re(\beta) > 0$ و $\varphi \in L^1(0,1]$. در این صورت

$$I_{0^+}^{\alpha}I_{0^+}^{\beta}\varphi = I_{0^+}^{\alpha+\beta}\varphi \ .$$

.1 Leggett
2. Williams
3. Krasnoselskii
4. Zhang
5. Caputo
6. Kaufmann
7. Mboumi
8. Lower Solution

لم ۲. [۱۲] فرض کنید $n-1<\alpha\le n$، $x\in C^0(0,1)\cap L^1(0,1)$ در این صورت برای هر $C_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\dots,n$ داریم.

$$I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}x(t)=x(t)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+\cdots+C_nt^{\alpha-n} \qquad (۴)$$

اخیراً برخی تعمیم‌ها برای نگاشت‌های $\alpha-\psi-$انقباضی داده شده است [۲]، [۱۴]. برخی مفاهیم اولیه و آن‌چه را که در طول این مقاله مورد نیاز است یادآوری می‌کنیم [۱۵]، [۱۶]، [۱۷].

فرض کنید Ψ رده توابعی مانند $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ باشد که در این شرایط صدق کنند:

۱. ψ غیرنزولی است؛
۲. ψ *زیر جمعی است، یعنی* $\psi(s+t)=\psi(s)+\psi(t)$؛
۳. ψ *پیوسته است؛*
۴. $\psi(t)=0\Leftrightarrow t=0$.

هم‌چنین فرض کنید Φ رده تمام توابعی مانند $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ باشد که:

۱. φ صعودی است؛
۲. برای هر $x>0$، $\varphi(x)<x$؛
۳. $\beta(x)=\frac{\varphi(x)}{x}\in\mathcal{B}$

که در آن $\mathcal{B}$ رده تمام توابعی مانند $\beta:[0,\infty)\to[0,1)$ است که

$$lim_{n\to\infty}\beta(t_n)=1\Longrightarrow lim_{n\to\infty}(t_n)=0. \qquad (۵)$$

قضیه ۱. فرض کنید $(X,\preccurlyeq)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی باشد که به متریک d مجهز شده است به‌طوری‌که (X,d) یک فضای متریک کامل است. فرض کنید

الف) $T:X\to X$ یک نگاشت صعودی باشد که عنصری مانند $x_0\in X$ با شرط $x_0\preccurlyeq T(x_0)$ وجود دارد.

ب) $\beta\in\mathcal{B}$ چنان وجود دارد که برای هر $x,y\in X$ با شرط $x\succcurlyeq y$،

$$d(Tx,Ty)\preccurlyeq\beta\big(d(x,y)\big)d(x,y) \qquad (۶)$$

پ) T پیوسته است و یا برای هر دنباله صعودی مانند $\{x_n\}\in X$، که $x_n\to x$ در X آن‌گاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n\le x$.

ت) برای هر $x,y\in X$ عنصری مانند $z\in X$ وجود دارد که با x,y قابل مقایسه است.

در این صورت T دارای نقطه ثابت یکتا است.

برهان. به [۲] مراجعه شود.

قضیه ۲. فرض کنید $(X,\preccurlyeq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد که به متریک d مجهز شده است به‌طوری‌که (X,d) یک فضای متریک کامل است.

فرض کنید:

الف) برای هر دنباله صعودی مانند $\{x_n\}\in X$، که $x_n\to x$ در X آن‌گاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n\preccurlyeq x$

ب) $\mathrm{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ نگاشت صعودی است و

$$d(Tx,Ty) \preccurlyeq d(x,y) - \psi\big(d(x,y)\big), \quad \forall x \geq y \tag{۷}$$

که در آن $\psi \in \Psi$.

ج) برای هر $x, y \in X$ عضوی مانند $z \in X$ وجود دارد که با x و y قابل مقایسه است.

در این صورت T دارای نقطه ثابت یکتا است.

برهان. به [۱۶] مراجعه شود.

نتایج اصلی

لم ۳. فرض کنید $1 < \text{alpha} \leq 2$ و $h(t) \in C([0,1])$. در این‌صورت جواب مسئلهٔ مقدار مرزی

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\alpha} x(t) = h(t), & 0 < t < 1 \\ x(0) = 0, & D_0^{\alpha/2} x(1) = 0 \end{cases} \tag{۸}$$

برابر است با:

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) h(s) ds, \tag{۹}$$

که در آن

$$\Gamma(\alpha) G(t,s) = \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha/2-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & s < t, \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha/2-1}, & s \geq t. \end{cases}$$

برهان. **لم** ۲ را برای تبدیل مسئلهٔ مذکور به یک معادله انتگرال هم‌ارز با آن به‌کار می‌بریم، از این رو،

$$x(t) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2}.$$

از آن‌جا که باید $x(t)$ در مبدأ متناهی باشد پس باید $C_2 = 0$. از طرف دیگر با مشتق‌گیری از مرتبهٔ $\alpha/2$ از $x(t)$ داریم:

$$D^{\alpha/2} x(t) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha/2-1} h(s) ds + C_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha/2)} t^{\alpha/2}.$$

در نتیجه

$$D^{\alpha/2} x(1) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha/2-1} h(s) ds + C_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha/2)} = 0.$$

از این رو

$$C_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha/2-1} h(s) ds.$$

بنا براین

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha/2-1} h(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha/2-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right] h(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 \left[t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha/2-1} \right] h(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t,s) h(s) ds. \end{aligned}$$

و برهان تمام است.

لم ۴. فرض کنید $1 < \alpha \leq 2$ در این صورت برای هر $t, s \in [0,1]$، $G(t,s) \geq 0$.

برهان کافی است نشان دهیم $t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha/2-1} - (t-s)^{\alpha-1} \geq 0$. از آن‌جاکه $s \leq s/t$ پس $(1-s) \geq (1-s/t)$ و چون $-1/2 \leq \alpha/2 - 1 \leq \alpha - 1 \leq 1$ پس $(1-s)^{\alpha/2-1} \geq (1-s/t)^{\alpha-1}$. در نتیجه $t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha/2-1} \geq (t-s)^{\alpha-1}$ و برهان تمام است.

لم ۵. $G(t,s)$ در رابطهٔ (۱۰) صدق می‌کند.

$$sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds = \frac{2(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha \Gamma(\alpha+1)}. \tag{۱۰}$$

برهان. برای $t \in [0,1]$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 G(t,s)ds &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha/2-1}ds \\ &= \frac{(t-s)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\Big|_0^t - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(1-s)^{\alpha/2}}{\alpha/2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{-t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از رابطهٔ مذکور داریم:

$$\Gamma(\alpha+1)\rho'(t) = 2(\alpha-1)t^{\alpha-2} - \alpha t^{\alpha-1} = t^{\alpha-2}(2\alpha - 2 - \alpha t) = 0$$

از این رو، عبارت مذکور بیش‌ترین مقدار خود را در $t = \frac{2(\alpha-1)}{\alpha}$ اختیار می‌کند**.** محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که

$$sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds = \frac{2(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha \Gamma(\alpha+1)}. \tag{۱۱}$$

تعریف ۳. تابع γ را جواب پایینی مسئلهٔ مقدار مرزی (۱) گوییم هرگاه $\gamma \in C([0,1])$ و $\gamma(t)$ در این شرایط صدق کند:

$$\begin{cases} -D_{0^+}^\alpha \gamma(t) \leq f(t,\gamma(t)), & 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2 \\ \gamma(0) \leq 0, & D_0^{\alpha/2} x(1) \leq 0, \end{cases}$$

که در آن $f(t) \in C([0,1] \times (0,\infty), \mathbb{R}^+)$.

لم ۶. اگر x یک جواب مثبت مسئلهٔ مقدار مرزی (۱) باشد آن گاه ثابت های r و R وجود دارند که $r\rho(t) \leq x(t) \leq R\rho(t)$، که در آن $\rho(t) = \int_0^1 G(t,s)ds$.

برهان. از آن‌جاکه $x \in C([0,1])$ پس عدد مثبتی مانند M وجود دارد که برای هر $t \in [0,1]$، $|x(t)| \leq M$. با قرار دادن

$$r = \min_{t\in[0,1], u\in[0,M]} f(t,u), \quad R = \max_{t\in[0,1], u\in[0,M]} f(t,u)$$

با استفاده از لم ۳ به‌دست می‌آوریم:

$$r\int_0^1 G(t,s)ds \leq x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds \leq R\int_0^1 G(t,s)ds.$$

کافی است قرار دهیم $\rho(t) = \int_0^1 G(t,s)ds$.

حال می‌توانیم نتایج اصلی را بیان کنیم.

قضیه ۳. فرض کنید شرایط زیر باشند:

الف) فرض کنید $f \in C([0,1] \times (0,\infty), \mathbb{R}^+)$ نسبت به مؤلفهٔ دوم غیرنزولی است،

ب) برای هر $t \in (0,1)$، $f(t,\rho(t)) \not\equiv 0$،

ت) عدد حقیقی مثبت $\mu < 1$ چنان وجود دارد که $0 \le k \le 1$، $k^{\mu} f(t,x) \le f(t,kx)$،

پ) $0 \le \lambda \le \frac{\alpha^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2(\alpha-1)^{\alpha-1}}$ چنان وجود دارد که $f(t,x) - f(t,y) \le \lambda\varphi(x-y)$ که در آن $\varphi \in \Phi$.

در این‌صورت وجود جواب پایینی برای مسئلهٔ (۱) وجود و یگانگی جواب مثبت را برای مسئلهٔ (۱) تضمین می‌کند.

برهان. مخروط $P = \{x \in C([0,1]): x(t) \ge 0\}$ را در نظر می‌گیریم. مسلماً، P زیرمجموعه‌ای بسته از $C([0,1])$ است، بنا براین، P یک فضای متریک کامل با متریک $d(x,y) = sup_{t\in[0,1]}\{|x(t) - y(t)|\}$ است. هم‌چنین می‌توان P را با رابطهٔ جزئی زیر به‌صورت یک مجموعهٔ مرتب جزئی در نظر گرفت:

$$x, y \in P, x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \forall t \in [0,1], x(t) \le y(t).$$

حال با توجه به لم ۳، $x \in C^2([0,1])$ جواب مسئلهٔ مقدار مرزی (۱) است اگر جوابی از معادلهٔ انتگرال

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s, x(s)\big) ds, \quad t \in [0,1], \tag{۱۲}$$

باشد. نگاشت $T: C([0,1]) \to C([0,1])$ را به‌صورت:

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s, x(s)\big) ds, \quad t \in [0,1], \tag{۱۳}$$

تعریف می‌کنیم. از این رو، حل مسئلهٔ مقدار مرزی (۱) تبدیل می‌شود به یافتن نقاط ثابت نگاشت T.

نگاشت T صعودی است، در واقع با توجه به شرط آ. برای $x \ge y$، برای هر $t \in [0,1]$، $f(t,x) > f(t,y)$. با توجه به **لم** ۴ و این که برای هر $t,s \in [0,1]$، $G(t,s) \ge 0$، به‌دست می‌آوریم:

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s, x(s)\big) ds \ge \int_0^1 G(t,s) f\big(s, y(s)\big) ds = Ty(t).$$

به‌علاوه برای $x \ge y$ داریم:

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= \sup_{t\in[0,1]} [Tx(t) - Ty(t)] \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\big[f\big(s,x(s)\big) - f\big(s,y(s)\big)\big] ds \\ &\le \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) \lambda\varphi\big(x(s) - y(s)\big) ds. \end{aligned}$$

از آن‌جاکه $\varphi(x)$ تابعی صعودی است پس برای $x \ge y$، $\varphi(x(s) - y(s)) \le \varphi(d(x.y))$. بنا براین

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\le \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) \lambda\varphi\big(x(s) - y(s)\big) ds \\ &\le \lambda\varphi\big(d(x,y)\big) \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) ds \\ &\le \lambda\varphi\big(d(x,y)\big) \frac{2(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

با توجه به شرط ت. و این که $0 \le \lambda \le \frac{\alpha^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2(\alpha-1)^{\alpha-1}}$، داریم:

$$d(Tx,Ty) \le \varphi\big(d(x,y)\big) = \frac{\varphi\big(d(x,y)\big)}{d(x,y)} d(x,y) = \beta\big(d(x,y)\big) d(x,y).$$

بنا براین برای $x \le y$، $d(Tx,Ty) \le \beta\big(d(x,y)\big) d(x,y)$.

سرانجام نشان می‌دهیم مسئلهٔ مقدار مرزی(۱) دارای جواب پایینی است. بدین‌منظورتابع $\gamma(t) = kg(t)$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که در آن $\{\frac{1}{a_2}, a_1^{\mu/1-\mu}\}$ $k < \min$، $a_1 = \min \{1, \inf_{t\in[0,1]} f(t,\rho(t))\}$، $a_2 = \max \{1, \max_{t\in[0,1]} f(t,\rho(t))\}$ و $g(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,\rho(s)) ds$. با استفاده از **لم** ۳ می‌دانیم که $g(t)$ یک جواب پایینی برای مسئلهٔ

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\alpha} g(t) = f(t,\rho(t)), 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2, \\ g(0) = 0, \qquad D_0^{\alpha/2} g(1) = 0, \end{cases}$$

است. با استفاده از نتیجهٔ **لم** ۳ در می‌یابیم که:

$$a_1\rho(t) \leq g(t) \leq a_2\rho(t). \tag{۱۴}$$

بنا براین با استفاده از مفروضات مذکور داریم:

$$ka_1\rho(t) \leq kg(t) \leq ka_2\rho(t). \tag{۱۵}$$

پس

$$ka_1 \leq \frac{\gamma(t)}{\rho(t)} \leq ka_2 \leq 1. \tag{۱۶}$$

حال با استفاده از شرط ب قضیه داریم:

$$k \leq a_1^{\mu/1-\mu} \Rightarrow ka_1 \leq a_1^{\mu/1-\mu} a_1 = a_1^{\mu/1-\mu}. \tag{۱۷}$$

در نتیجه

$$(ka_1)^{\mu} \geq a_1^{\mu/1-\mu} \geq k. \tag{۱۸}$$

بنا براین

$$f(t,\gamma(t)) = f\left(t, \frac{\gamma(t)}{\rho(t)}\rho(t)\right) \geq \left(\frac{\gamma(t)}{\rho(t)}\right)^{\mu} f(t,\rho(t))$$
$$\geq (ka_1)^{\mu} f(t,\rho(t)) \geq kf(t,\rho(t)).$$

در نتیجه

$$-D_{0^+}^{\alpha}\gamma(t) = kf(t,\rho(t)) \leq f(t,\gamma(t)), \quad 0 < t < 1, 1 \leq \alpha \leq 2.$$

بدون شک $\gamma(t) = kg(t)$ در شرایط مرزی مسئلهٔ (۱) صدق می‌کند. بنا براین $\gamma(t) = kg(t)$ یک جواب پایینی برای مسئلهٔ (۱) است.

حال با به کار بردن قضیه ۱ در می‌یابیم که T دارای نقطهٔ ثابت یکتا در $C([0,1])$ است که همان جواب مسئلهٔ (۱) است.

قضیه ۴. فرض کنید شرایط زیر برقرار باشد:

الف) *فرض کنید* $f \in C([0,1] \times (0,\infty), \mathbb{R}^{\geq 0})$ نسبت به مؤلفهٔ دوم غیرنزولی است،

ب) $t_0 \in [0,1]$ چنان وجود دارد که $f(t_0, 0) > 0$،

ج) $0 \leq \lambda \leq \frac{\alpha^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2(\alpha-1)^{\alpha-1}}$ چنان وجود دارد که $f(t,x) - f(t,y) \leq \lambda\psi(x-y)$ که در آن $\psi \in \Psi$.

در ان صورت مسئلهٔ مقدار مرزی (۱) دارای جواب مثبت یگانه است.

برهان. فرض کنیم مخروط P و نگاشت T همانند برهان قضیه باشند و به‌طور مشابه T نگاشت غیرنزولی است. حال نشان می‌دهیم T، در شرایط انقباضی قضیه ۲ صدق می‌کند. در واقع با توجه به شرط ج برای $x, y \in P$ داریم:

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= \sup_{t\in[0,1]} \{Tx(t) - Ty(t)\} \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\left(f\big(s,x(s)\big) - f\big(s,y(s)\big)\right) ds \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\lambda.\psi\big(x(s)-y(s)\big)ds. \end{aligned}$$

از آن‌جاکه $\psi \in \Psi$ و ψ یک نگاشت غیرنزولی است با توجه به لم ۳ از نامساوی مذکور درمی‌یابیم:

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\leq \lambda.\psi(d(x,y) \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds \\ &\leq \lambda.\psi(d(x,y))\frac{2(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

با توجه به این واقعیت که $\lambda \leq \frac{\alpha^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{2(\alpha-1)^{\alpha-1}}$ *داریم:*

$$d(Tx,Ty) \leq \psi(d(x,y)) = (d(x,y) - (d(x,y) - \psi(d(x,y))).$$

قرار می‌دهیم $\varphi(x) = x - \psi(x)$ از آن‌جاکه $\psi \in \Psi$ می‌توان نتیجه گرفت که $\varphi \in \Phi$. از این رو، با توجه به قضیه ۲ نتیجه می‌گیریم T یک نگاشت انقباضی است.

سرانجام، با توجه به‌این‌که $G(t,s) \geq 0$ (لم ۴) و این‌که $f \geq 0$ (شرط آ.) داریم:

$$T0(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,0)ds \geq 0, \tag{۱۹}$$

که در آن 0 نشان‌گر تابع صفر است. حال قضیه ۲ نشان می‌دهد که مسئلهٔ (۱) دارای جواب یکتا نامنفی است. نشان می‌دهیم که تابع صفر نمی‌تواند جواب مسئله باشد. فرض کنیم مسئله دارای جواب بدیهی صفر باشد، در این صورت:

$$0 = \int_0^1 G(t,s)f(s,0)ds, \quad t \in [0,1]. \tag{۲۰}$$

با توجه به نامنفی بودن G و f از نامساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که تقریباً برای همهٔ sها

$$G(t,s)f(s,0) = 0, \ \ t \in [0,1]. \tag{۲۱}$$

حال از آن‌جاکه تقریباً برای همهٔ sها، $t \in [0,1]$، $G(t,s) \neq 0$، نتیجه می‌گیریم:

$$f(s,0) = 0 \quad a.e\ (s). \tag{۲۲}$$

بنا به شرط ب $t_0 \in [0,1]$ای وجود دارد که $f(t_0,0) > 0$. با توجه به پیوستگی f می‌توان مجموعه‌ای مانند $A \subseteq [0,1]$ چنان یافت که $t_0 \in A$ و $\mu(A) > 0$، که درآن μ اندازهٔ لبگ است و برای $t \in A$، $f(t,0) > 0$، و این با (۳-۱۵) در تناقض است.

حال نشان می‌دهیم جواب $x(t)$ مثبت است. فرض کنیم نقطه‌ای مانند $t_1 \in (0,1)$ وجود دارد که $x(t_1) = 0$، چون x نقطه ثابت نگاشت T است از این رو،

$$x(t_1) = \int_0^1 G(t_1,s)f\big(s,x(s)\big)ds = 0.$$

و از آن‌جا $x \in P$ پس $x \geq 0$ و با استفاده از این واقعیت که f نسبت به مؤلفهٔ دوم نانزولی است و $G(t,s) \geq 0$ است می‌توان نتیجه گرفت که:

$$0 = x(t_1) = \int_0^1 G(t_1, s) f\big(s, x(s)\big) ds \geq \int_0^1 G(t_1, s) f(s, 0) \geq 0,$$

و این نامساوی یعنی

$$x(t_1) = \int_0^1 G(t_1, s) f(s, 0) ds = 0.$$

مجدداً با استدلالی مشابه به تناقض می‌رسیم. و اثبات تمام است.

مثال

مسئلهٔ مقدار مرزی

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{3/2} x(t) = (sin^2 \pi t + 1)\, ln\big(2 + x(t)\big), & 0 < t < 1, \\ x(0) = 0, & D_0^{3/4} x(1) = 0, \end{cases} \qquad (۲۳)$$

را در نظر می‌گیریم. در این‌جا $f(t,x) = (\sin^2 \pi t + 1) \ln\big(2 + x(t)\big)$، برای $(t,x) \in [0,1] \times [0,\infty)$ تابعی پیوسته است و $f(t,0) = (\sin^2 \pi t + 1) \ln(2) > 0$ به‌ازای هر $t \in [0,1]$. از آن‌جاکه $\partial f/_{\partial x} = (\sin^2 \pi t + 1)\big(1/_{2 + x}\big) > 0$ به‌ازای هر $x \in [0,\infty)$، پس f تابعی نانزولی نسبت به متغیر دوم است. از طرفی برای $x \geq y$ داریم:

$$\begin{aligned} f(t,x) - f(t,y) &= (\sin^2 \pi t + 1)\,\big(\ln\big(2 + x(t)\big) - \ln\big(2 + y(t)\big)\big) \\ &= (\sin^2 \pi t + 1)\left(\ln \frac{2 + y + x - y}{2 + y}\right) \\ &= (\sin^2 \pi t + 1)\left(\ln\,(1 + \frac{x - y}{2 + y})\right) \\ &\leq (\sin^2 \pi t + 1)(\ln\big(1 + (x - y)\big) \\ &\leq 2(\ln\big(1 + (x - y)\big). \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\psi(x) = ln(1 + x)$. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که $\psi \in \Psi$. به‌علاوه با قرار دادن $\lambda = 2$ و $\alpha = 3/_2$ داریم:

$$\frac{\alpha^\alpha \Gamma(1 + \alpha)}{2(\alpha - 1)^{\alpha - 1}} = \frac{\big(3/_2\big)^{3/_2}}{2\big(1/_2\big)^{1/_2}} \Gamma\big(5/_2\big) = \frac{3}{4}\sqrt{3}\Gamma\big(5/_2\big) = \frac{9}{16}\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 3.0592 > 2 = \lambda.$$

از این رو، با استفاده از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌گیریم که مسئلهٔ (۲۳) دارای جواب مثبت یکتا است.

منابع

1. Agarwal, Ravi P., "Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems," J. Math. Anal. Appl ،(2002) 368-379.
2. Harandi, Amini A., Emami H., "A fixed point theorem for contraction type maps in partially orderd metric spaces and application to ordinary differential equations," Non. Anal., 72 (2010) 2238-2242.

3. Miller, Kenneth S., Ross, Bertram, "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation", Wiley ,NewYork (1993).
4. Oldham, Keith B., Spanier, Jerome, " The Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order", Academic Press,New York (1974).
5. Samko, Stefan G., Kilbas, Anatoly A., Marichev, Oleg I., "Fractional Integral and Derivative: Theory and Applications", Gordon & Breach,Yverdon (1993).
6. Delbosco D., Rodino L., "Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equations", J. Math. Anal. Appl. 204 (1996) 609-625.
7. Zhang S., "The existence of a positive solution for nonlinear fractional differential equation", J. Math. Anal. Appl., 252 (2000) 804-812.
8. Jafari H., Daftardar V. Gejji, "Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomian decomposition method," Appl. Math. Comput., 180 (2006) 700-706.
9. Bai, Zhanbing; Lü, Haishen, "Positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equation", J. Math. Anal. and App., 311 (2005) 495-505.
10. Kaufmann E. R., Emboumi E., "The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation", J. Qual. Theory Differ. Equ., 3 (2008) 1-11.
11. Liu, Y., "Positive solutions for Singular FDES", U. P. B. Sci. Bull., Series A, 73 (2011) 89-100.
12. Kilbas A. A., Srivastava H. H., Trujillo J. J., "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Elsevier, Amsterdam (2006).
13. Podlubny, Igor, "Fractional Differential Equations", Academic Press,New York (1999).
14. Karapinar E., "α-ψ-Geraghty contraction type mappings and some related fixed point results," Filomat, 28 (1) (2014) 37-48.
15. Geraghty M., "On contraction mappings", Pros. Amer. Math. Soc. ,40 (1973) 604-608.
16. Harjani J., Sadarangani K., "Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially orderd sets", Nonlinear Analysis:Theory method and applications, 71 (7) (2009) 3403-3410.
17. Nieto J. J., Lopez R., Rodriguez, "Contractive mapping theorems in partially orderd sets and application to ordinary differential equations", Order, 22 (3)(2005) 223-239