(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

# شبکهٔ z-ایدآل‌های پایه‌ای

علی طاهری فر
دانشگاه یاسوج، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۰۳/۰۸ پذیرش ۹۸/۰۷/۲۳

## چکیده

برای f-حلقهٔ R با خاصیت معکوس کران‌دار، ابتدا نشان می‌دهیم $BZ(R)$، مجموعهٔ z-ایدآل‌های پایه‌ای R، همرا با رابطهٔ جزئا مرتب شدهٔ شمول، شبکه کران‌دار و شرکت‌پذیر است. هم‌چنین وقتی f-حلقهٔ R یک حلقهٔ نیم‌اولیه است، $BZ^0(R)$، مجموعهٔ $z^0$-ایدآل‌های پایه‌ای R، همرا با رابطهٔ جزئا مرتب شدهٔ شمول، شبکه کران‌دار و شرکت‌پذیر است. سپس برای f-حلقهٔ R با خاصیت معکوس کران‌دار، ثابت کرده‌ایم $BZ(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است و $R$ حلقهٔ نیم‌اولیه است اگر و تنها اگر $R$ حلقهٔ منظم باشد اگر و تنها اگر $BZ^0(R)$ شبکهٔ متمم‌دار و $R$ حلقهٔ کاهش‌یافته باشد اگر و تنها اگر عناصر پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در فضای توپولوژی $Max(R)$ باز هستند و $R$ حلقهٔ نیم‌اولیه است اگر و تنها اگر عناصر پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در فضای توپولوژی $Min(R)$ باز هستند و $R$ حلقهٔ کاهش یافته است. به‌عنوان یک نتیجه، هنگامی‌که $R = C(X)$ (حلقهٔ توابع پیوسته) در نظر بگیریم. داریم، $BZ(C(X))$ شبکهٔ متمم‌دار است اگر و تنها اگر $BZ^0(C(X))$ شبکهٔ متمم‌دار است اگر و تنها اگر $X$ یک $P$-فضا باشد.

**واژه‌های کلیدی:** f-حلقه، شبکه، زاریسکی توپولوژی، حلقهٔ نیم‌اولیه، حلقهٔ کاهش‌یافته.

## مقدمه

در این مقاله همهٔ حلقه‌ها یکدار و جابه‌جایی هستند. حلقهٔ $R$ همراه با رابطهٔ جزئا مرتب $\leq$ یک حلقهٔ جزئا مرتب گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $x \in R$، $a \geq b$ نتیجه دهد $a + x \geq b + x$.

۲. $a \geq 0$ و $b \geq 0$ نتیجه دهد $ab \geq 0$.

هرگاه $R$ حلقهٔ جزئاً مرتب باشد و به‌ازای هر $a, b \in R$ کوچک‌ترین کران بالای $\{a, b\}$ در $R$ $(a \vee b)$ وجود داشته باشد، می‌گوییم $R$ حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب است. در حلقهٔ شبکه‌ای جزئاً مرتب $|a|$ همان $a \vee (-a)$ است که همواره $|a| \geq 0$. حلقهٔ شبکه‌ای مرتب شده $R$ را $f$-حلقه گوییم اگر برای هر $a, b \in R$ و هر $c \geq 0$ در $R$ داشته باشیم، $(a \wedge b)c = (ac) \wedge (bc)$. f-حلقه دارای خاصیت معکوس کران‌دار است اگر هر $a \geq 1$ در $R$ معکوس‌پذیر باشد (حلقهٔ توابع پیوسته، f-حلقه‌ای با خاصیت معکوس کران‌دار است). برای جزییات بیش‌تر در مورد این‌گونه حلقه‌ها به [۸] مراجعه کنید. اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال حلقهٔ $R$ را با $J(R)$ نشان می‌دهیم. حلقهٔ $R$ را نیم‌اولیه گوییم، هرگاه $J(R) = 0$. حلقهٔ $R$ را کاهش‌یافته گوییم، هرگاه عضو پوچ‌توان غیر صفر نداشته باشد، به‌عبارت دیگر اشتراک همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال صفر است $(N(R) = 0)$.

*نویسنده مسئول ataherifar@yu.ac.ir

به‌طورکلی مجموعه ایدآل‌های ماکسیمال حلقهٔ $R$ را با $Max(R)$ نشان می‌دهیم. $Max(R)$ را به‌عنوان فضای توپولوژی همراه با زاریسکی توپولوژی در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر $a \in R$ و هر $A \subseteq R$ قرار می‌دهیم،

$$M(a) = \{M \in Max(R) : a \in M\} \text{ و } M(A) = \{M \in Max(R) : A \subseteq M\}.$$

در نتیجه داریم:

$$D(a) = \{M \in Max(R) : a \notin M\} \text{ و } D(A) = \{M \in Max(R) : M \nsubseteq A\}.$$

بنابراین داریم:

$$D(a) = Max(R) \setminus M(a) \text{ و } D(A) = Max(R) \setminus M(A).$$

خانوادهٔ $\{M(a) : a \in R\}$، پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در زاریسکی توپولوژی روی $Max(R)$ است. هم‌چنین $Min(R)$ را با زاریسکی توپولوژی در نظر می‌گیریم. بدین‌صورت‌که به‌ازای هر $a \in R$ و هر $A \subseteq R$ قرار می‌دهیم،

$$P(a) = \{P \in Min(R) : a \in P\} \text{ و } P(A) = \{P \in Min(R) : A \subseteq P\}.$$

به‌سادگی دیده می‌شود خانوادهٔ $\{P(a) : a \in R\}$، پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در زاریسکی توپولوژی روی $Min(R)$ است. ایدآل $I$ از حلقهٔ $R$ را z ($z^0$)-ایدآل گوییم هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$، اگر

$$M(a) = M(b) \quad (P(a) = P(b))$$

و $a \in I$ نتیجه شود $b \in I$ یا به‌طور معادل به‌ازای هر $a \in I$ داشته باشیم $M_a \subseteq I$ $(P_a \subseteq I)$. در این‌جا $M_a$ $(P_a)$ اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال (همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال) شامل $a$ است. به‌طور بدیهی ما داریم $M_a \subseteq M_b$ $(P_a \subseteq P_b)$ اگر و تنها اگر $M(b) \subseteq M(a)$ $(P(b) \subseteq P(a))$. برای جزئیات بیش‌تر در مورد z-ایدآل‌ها [۴] و [۶] را می‌توانید ببینید.

## شبکهٔ z-ایدآل‌های پایه‌ای در f-حلقه‌ها

در این بخش به نتایج اصلی مقاله اشاره می‌کنیم. ایدآل $I$ از حلقه $R$ را $l$-ایدآل گوییم، هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$ صادق در نامساوی $|a| \leq |b|$، $b \in I$ نتیجه دهد $a \in I$. در منبع [۸] نشان داده شد اگر $R$ یک $f$-حلقه با خاصیت معکوس کران‌دار باشد آن‌گاه هر $z$-ایدآل در $R$ یک $l$-ایدآل است. در واقع $f$-حلقه دارای خاصیت معکوس کران‌دار است اگر و تنها اگر هر $z$-ایدآل در $R$ یک $l$-ایدآل باشد. بنابراین در این حالت از حلقهٔ $R$ هر ایدآل ماکسیما ل، $l$-ایدآل است. هنگامی‌که $J(R) = 0$ آن‌گاه هر ایدآل اول مینیمال از $R$ یک $z$-ایدآل است و بنابراین، $l$-ایدآل است.

**قضیهٔ ۱.** فرض کنیم $R$ یک f-حلقه با خاصیت معکوس کران‌دار باشد. این موارد برقرارند:

۱. $BZ(R) = \{M_a : a \in R\}$ شبکهٔ کران‌دار شرکت‌پذیر با ترتیب جزئی شمول است.
۲. اگر $R$ حلقهٔ نیم‌اولیه باشد، و هرگاه $BZ^0(R) = \{P_a : a \in R\}$، آن‌گاه $BZ^0(R)$ شبکهٔ کران‌دار شرکت‌پذیر با ترتیب جزئی شمول است.

**اثبات** ۱. برای شبکه بودن $BZ(R)$ نشان می‌دهیم به‌ازای هر $a, b \in R$، $M_a \vee M_b$ و $M_a \wedge M_b$ وجود دارند. ابتدا ادعا می‌کنیم $M_a \vee M_b = M_{(a^2+b^2)}$. چون همواره $0 \leq a^2 \leq a^2 + b^2$ و باتوجه به توضیحات قبل از قضیه، $M$ یک $l$-ایدآل است، پس داریم:

$$M_a = M_{a^2} \subseteq M_{(a^2+b^2)} \text{ و } M_b = M_{b^2} \subseteq M_{(a^2+b^2)}.$$

در نتیجه $M_{(a^2+b^2)}$ کران بالا برای مجموعهٔ $\{M_a, M_b\}$ است. اکنون فرض کنیم

$$M_a \subseteq M_c \text{ و } \mathrm{M_b} \subseteq M_c.$$

آن‌گاه $M(c) \subseteq M(a)$ و $M(c) \subseteq M(b)$. از آن‌جایی‌که هر ایدآل ماکسیمال، $l$-ایدآل است، بنابراین داریم:

$$M(a) \cap M(b) = M(a^2 + b^2).$$

در نتیجه $M(c) \subseteq M(a^2 + b^2)$. این نتیجه می‌دهد $M_{(a^2+b^2)} \subseteq M_c$ .

اکنون به سادگی دیده می‌شود:

$$M_a \wedge M_b = M_a \cap M_b = M_{ab}.$$

تساوی مذکور در قسمت ۱ از لم ۳,۱ از منبع [۳] نیز اثبات شد.

برای شرکت‌پذیری $BZ(R)$، $a, b, c \in R$ را در نظر می‌گیریم. آن‌گاه داریم:

$$M_a \vee (M_b \wedge M_c) = M_a \vee M_{bc} = M_{a^2+(bc)^2}. \tag{۱}$$

هم‌چنین داریم:

$$(M_a \vee M_b) \wedge (M_a \vee M_c) = M_{(a^2+b^2)} \wedge M_{(a^2+c^2)} = M_{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}. \tag{۲}$$

از طرف دیگر، چون همواره داریم، $a^2 \leq a^2 + (bc)^2$ و $(bc)^2 \leq (bc)^2 + a^2$.

پس ایدآل ماکسیمال $M$ شامل $a^2 + (bc)^2$ است اگر و تنها اگر شامل $b$ و $a$ یا شامل $c$ و $a$ باشد اگر و تنها اگر شامل $(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)$ باشد. این نشان می‌دهد سمت راست تساوی‌های (۱) و (۲) برابرند. بنابراین شرکت‌پذیری $BZ(R)$ ثابت شده است.

عناصر $M_0 = J(R)$ و $M_1 = R$ به‌ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عناصر $BZ(R)$ هستند. بنابراین $BZ(R)$ شبکهٔ کران‌دار است.

**اثبات** ۲. مشابه اثبات (۱) عمل می‌کنیم. زیرا $R$ حلقهٔ نیم‌اولیه است، بنابراین هر $z^0$-ایدآل یک z-ایدآل است و در نتیجه با توجه به توضیحات قبل از قضیه، $l$-ایدآل است. بنابراین با استفاده از دو نامساوی،

$$0 \leq a^2 \leq a^2 + b^2 \text{ و } 0 \leq b^2 \leq a^2 + b^2,$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد:

$$P_a = P_{a^2} \subseteq P_{(a^2+b^2)} \text{ و } P_b = P_{b^2} \subseteq P_{(a^2+b^2)}.$$

بنابراین $P_{(a^2+b^2)}$ کران بالا برای مجموعهٔ $\{P_a, P_b\}$ است. اکنون فرض کنیم $P_a \subseteq P_c$ و $\mathrm{P_b} \subseteq P_c$. آن‌گاه $P(c) \subseteq P(a)$ و $P(c) \subseteq P(b)$. از طرفی چون هر ایدآل اول مینیمال، $z^0$-ایدآل است، پس $l$-ایدآل است و داریم:

$$P(a) \cap P(b) = P(a^2 + b^2).$$

در نتیجه $P(c) \subseteq P(a^2 + b^2)$. این نتیجه می‌دهد $P_{(a^2+b^2)} \subseteq P_c$ .

هم‌چنین به سادگی دیده می‌شود:

$$P_a \wedge P_b = P_a \cap P_b = P_{ab}.$$

بنابراین مشابه اثبات (۱)، با بکار بردن تساوی مذکور به‌ازای هر $a, b \in R$، می‌توان نشان داد:

$$P_a \vee (P_b \wedge P_c) = (P_a \vee P_b) \wedge (P_a \vee P_c).$$

بنابراین $BZ^0(R)$ شبکهٔ شرکت‌پذیر است. همچنین $P_0 = N(R) = 0$ و $P_1 = R$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عناصر $BZ^0(R)$ هستند. بنابراین $BZ^0(R)$ شبکهٔ کران‌دار است. □

شبکهٔ $L$ را متمم‌دار گوییم، هرگاه هر عضو آن دارای متمم باشد. به‌عبارت دیگر به ازای هر $a \in L$ یک $b \in L$ به قسمی وجود داشته باشد که $a \vee b = 1$ و $a \wedge b = 0$ که $1$ و $0$ به‌ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عناصر $L$ هستند.

**قضیهٔ ۲**. برای f-حلقهٔ $R$ با خاصیت معکوس کران‌دار این موارد معادلند:

۱. $BZ(R)$ شبکهٔ متمم‌دار و حلقهٔ $R$ نیم‌اولیه است.

۲. $R$ حلقهٔ منظم است.

۳. $BZ^0(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است و حلقهٔ $R$ کاهش‌یافته است.

۴. عناصر پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در فضای $Max(R)$ باز هستند و $R$ نیم‌اولیه است.

۵. عناصر پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در فضای $Min(R)$ باز هستند و $R$ کاهش‌یافته است.

**اثبات**: **(۱)** ⇐ **(۲)** فرض کنیم $a \in R$. با توجه به فرض وجود دارد $b \in R$ به‌طوری‌که $M_a \vee M_b = M_1 = R$ و $M_a \wedge M_b = M_0 = 0$. این دو تساوی نشان می‌دهند $M_{a^2+b^2} = R$ و $M_{ab} = 0$. بنابراین $a^2 + b^2$ عضو یکهٔ $R$ است و $ab = 0$. بنابراین وجود دارد $c \in R$ به‌طوری‌که:

$$(a^2 + b^2)c = 1 \Rightarrow a = a^3c + ab^2c = a^2(ac).$$

این تساوی نشان می‌دهد $R$ حلقهٔ منظم است.

**(۲)** ⇐ **(۱)** به‌طور بدیهی منظم بودن $R$ نتیجه می‌دهد $J(R) = 0$. اکنون فرض کنیم $a \in R$. آن‌گاه با توجه به فرض منظم بودن $R$ وجود دارد $b \in R$ به‌طوری‌که $a = a^2b$. بنابراین $a(1 - ab) = 0$. این نشان می‌دهد،

$$M_a \wedge M_{1-ab} = M_{a(1-ab)} = M_0 = 0. \quad (۱)$$

با توجه به این‌که $R$ داری خاصیت معکوس کران‌دار است، هر ایدآل ماکسیمال آن یک $l$-ایدآل است پس هیچ ایدآل ماکسیمالی شامل $a^2 + (1 - ab)^2$ نیست. زیرا یک ایدآل ماکسیمال شامل $a^2 + (1 - ab)^2$ است اگر و تنها اگر شامل $a$ و $(1 - ab)$ باشد که یک تناقض است.

بنابراین داریم:

$$M_a \vee M_{1-ab} = M_{a^2+(1-ab)^2} = M_1. \quad (۲)$$

تساوی‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند به‌ازای هر $a \in R$، $M_a$ دارای متمم است. بنابراین $BZ(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

**(۲)** ⇐ **(۳)** منظم بودن $R$ نتیجه می‌دهد $J(R) = 0$. بنابراین $R$ حلقهٔ کاهش‌یافته است. با استفاده از قضیهٔ ۱ داریم $BZ^0(R)$ یک شبکه است. اکنون شبیه اثبات (۲) ⇐ (۱) و با توجه این‌که $P_0 = 0$، به‌ازای هر $a \in R$ یک $b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که،

$$P_a \vee P_{1-ab} = P_1 \text{ و } P_a \wedge P_{1-ab} = P_0.$$

این یعنی، $BZ^0(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

**(۳) ⇐ (۲)** فرض کنیم $a \in R$. با توجه به فرض، $b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که،

$$P_a \vee P_b = P_1,\ P_a \wedge P_b = P_0 = 0.$$

بنابراین $P_{ab} = 0$ و $P_{a^2+b^2} = R$. این دو تساوی نشان می‌دهند $a^2 + b^2$ عضو یکهٔ $R$ است و $ab = 0$. بنابراین وجود دارد $c \in R$ به‌طوری‌که:

$$(a^2 + b^2)c = 1 \Rightarrow a = a^3c + ab^2c = a^2(ac).$$

این تساوی نشان می‌دهد $R$ حلقهٔ منظم است.

**(۲) ⇐ (۴)** حلقهٔ $R$ حلقهٔ منظم است، بنابراین $J(R) = 0$. با توجه به فرض به‌ازای هر $a \in R$ یک $b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $a = a^2b$. بنابراین $a(1 - ab) = 0$. در نتیجه داریم:

$$M(a) \cup M(1 - ab) = Max(R) \text{ و } M(a) \cap M(1 - ab) = \emptyset.$$

بنابراین، $M(a) = Max(R) \setminus M(1 - ab)$ باز است.

**(۴) ⇐ (۲)** فرض کنیم $a \in R$. $M(a)$ یک مجموعهٔ باز-بسته در $Max(R)$ است و $J(R) = 0$. با توجه به قضیهٔ ۳,۸ از مرجع [۹] یک خودتوان $e \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $M(a) = D(e)$. در نتیجه داریم:

$$M(ae) = M(a) \cup M(e) = Max(R) \Rightarrow ae \in J(R) = 0.$$

از طرف دیگر داریم:

$$M(a^2 + e^2) = M(a) \cap M(e) = D(e) \cap M(e) = \emptyset.$$

این یعنی، $a^2 + e^2 = a^2 + e$ عضو یکهٔ حلقهٔ $R$ است. بنابراین $c \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$c(a^2 + e) = 1 \Rightarrow ca^2 + ce = 1 \Rightarrow ca^3 + cea = a.$$

از آن‌جاکه $ae = 0$، داریم $a = a^2(ca)$. این یعنی، $R$ حلقهٔ منظم است.

**(۲) ⇔ (۵)** اثبات، گام به گام شبیه اثبات **(۲) ⇔ (۴)** است.

با استفاده از قضیهٔ ۲ نتایج زیر به‌طور بدیهی حاصل می‌شوند.

**نتیجهٔ ۱.** فرض کنیم $R$ یک f-حلقهٔ نیم‌اولیه با خاصیت معکوس کران‌دار باشد. آن‌گاه این موارد معادلند:

۱. $BZ(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۲. $R$ حلقهٔ منظم است.

۳. $BZ^0(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۴. عضوهای پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در $Max(R)$ باز هستند.

۵. عضوهای پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در $Min(R)$ باز هستند.

یادآوری می‌کنیم، $C(X)$ حلقهٔ توابع پیوسته روی فضای کاملاً منظم و هاسدورف $X$ است. با توجه به منبع [۶]، $C(X)$، f- حلقهٔ نیم‌اولیه است. هم‌چنین $C(X)$ حلقهٔ منظم است اگر و تنها اگر $X$ یک $P$-فضا باشد.

بنابراین با توجه به نتیجهٔ ۱ نتیجهٔ ۲ حاصل می‌شود.

**نتیجهٔ ۲.** برای فضای کاملاً منظم و هاسدورف $X$ این موارد معادلند:

۱. $BZ(C(X))$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۲. $BZ^0(C(X))$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۳. $X$ یک $P$-فضا است.

فرض می‌کنیم $L$ یک قاب کاملاً منظم است. حلقهٔ توابع پیوسته حقیقی مقدار روی قاب $L$ را با $\mathcal{R}L$ نشان می‌دهیم. این حلقه به‌عنوان نسخه توپولوژی بدون نقطه از حلقهٔ $C(X)$ معرفی شده است (برای جزئیات بیش‌تر، [۱]، [۲] ملاحظه شود). در منبع [۲] ثابت شده، حلقهٔ $\mathcal{R}L$، f-حلقه‌ی‌کاهش‌یافته و دارای خاصیت معکوس کران‌دار است. در گزارهٔ ۹٫۳ از منبع [۵] ثابت شده است که قاب $L$ یک $P$-قاب است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}L$ یک حلقهٔ منظم باشد. بنابراین مشابه نتیجه قبلی را با استفاده از نتیجهٔ ۱ برای حلقهٔ توابع پیوسته حقیقی مقدار روی قاب $L$ بدین‌صورت داریم.

**نتیجهٔ ۳.** برای قاب کاملاً منظم $L$ این موارد معادلند:

۱. $BZ(\mathcal{R}L)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۲. $BZ^0(\mathcal{R}L)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۳. $L$ یک $P$-قاب است.

## قدردانی

از داوران عزیز که با راهنمایی‌های ایشان و اصلاحاتی که فرمودند باعث بهتر شدن این مقاله شدند کمال تشکر را داریم. لازم به ذکر است که **نتیجهٔ ۳** مربوط به راهنمایی داوران محترم است.

## منابع

1. Ball R. N, "Walters-Wayland, J., C- and C∗-quotients in pointfree topology", Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 412 (2002) 1-62.
2. Banaschewski B., "The real numbers in pointfree topology", Textos de Mathem´atica (S´eries B) No. 12, Departamento de Mathem´atica da Universidade de Coimbra, Coimbra (1997).
3. Dube T., "A note on lattice of z-ideals of f-rings", New York J. Math, 22 (2016) 351-361.
4. Dube T., Ighedo O., "On z-ideals of point free function rings", Bull. Iran. Math. Soc, 40 (2014) 655-673.
5. Dube T., "Concerning P-frames, essential P-frames and strongly zerodimensional frames", Algebra Universalis, 69 (2009) 115-138.
6. Gillman L., Jerison M., "Ring of Continuous Functions", Springer (1976).
7. Mason G., "z-ideals and prime ideals", J. Algebra, 26 (1973) 280-297.
8. Suzanne L., "A characterization of f-rings in which the sum of semiprime ideals is semiprime and its consequences", Comm. Algebra, 23 (1995) 5461-5481.
9. Varadarajan K., "Clean, almost clean, potent commutative rings", J. Algebra Appl, 6 (2007) 671-685.