برآوردیابی انقباضی کلاسیک و بیزی در توزیع رایلی با استفاده از حدس نقطه‌ای براساس داده‌های سانسور شده

آزاده کیاپور*؛ دانشگاه آزاد اسلامی، واحد بابل، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه آمار

دریافت ۹۴/۱۱/۱۰	پذیرش ۹۶/۱۰/۱۷

چکیده

در این مقاله، چند آزماورد انقباضی و یک برآوردگر انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع طول عمر رایلی براساس نمونه‌های سانسورشده تحت تابع زیان توان دوم خطای پایای مقیاس ارائه می‌شود. بهترین برآوردگر خطی ناااریب و مخاطره آن تحت تابع زیان مورد بررسی محاسبه می‌شود. آزماوردهای انقباضی براساس رد یا پذیرش یک فرضیهٔ صفر مبنی برتساوی پارامتر واقعی با یک مقدار حدسی معرفی و مخاطره آن‌ها به‌دست می‌آیند. برای مقایسهٔ عملکرد آزماوردهای انقباضی و بهترین برآوردگر خطی ناااریب، کارایی نسبی بین آن‌ها محاسبه می‌شود. با استفاده از یک روش بیزی، برآوردگر انقباضی بیزی را به‌دست آورده و رفتار آن را نسبت به بهترین برآوردگر خطی ناااریب با محاسبه کارایی نسبی مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک مثال عددی برای تشریح برآوردگرهای پیشنهادی ارایه شده است.

واژه‌های کلیدی: برآوردگر انقباضی، تابع زیان توان دوم خطای پایای مقیاس، توزیع رایلی

مقدمه

توزیع رایلی یکی از توزیع‌های طول عمر است که به‌طور گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف آمار به‌کار می‌رود. فرض کنید X دارای توزیع رایلی تک پارامتری با تابع چگالی

$$f(x\mid\sigma)=\frac{x}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x^{۲}}{۲\sigma}\right\},\ x>۰,\ \sigma>۰, \qquad (۱)$$

و تابع توزیع

$$F(x\mid\sigma)=۱-\exp\left\{-\frac{x^{۲}}{۲\sigma}\right\},\ x>۰,\ \sigma>۰,$$

است. تابع نرخ خطر برای مدل رایلی به‌صورت

$$R(t)=\frac{f(t\mid\sigma)}{۱-F(t\mid\sigma)}=\frac{\frac{t}{\sigma}\exp\left\{-\frac{t^{۲}}{۲\sigma}\right\}}{\exp\left\{-\frac{t^{۲}}{۲\sigma}\right\}}=\frac{t}{\sigma},$$

* **نویسنده مسئول**	kiapour@baboliau.ac.ir

محاسبه می‌شود، که نسبت به t یک تابع صعودی است، در حالی‌که در توزیع نمایی مقداری ثابت است. بنابراین توزیع رایلی برای مدل‌بندی توزیع طول عمر مؤلفه‌هایی که با زمان افزایش می‌یابند مناسب است. علاقه‌مندان می‌توانند به پولوکو [2] برای یافتن مثال‌های مناسب مراجعه کنند.

یک طرح سانسورنوع دوم را در نظر بگیرید که در آن فقط r تا از کوچک‌ترین مشاهده‌ها از یک نمونهٔ تصادفی n تایی قابل مشاهده هستند. در این حالت تمام مؤلفه‌ها در آزمایش قرار می‌گیرند اما به‌جای آن‌که آزمایش تا پایان شکست تمام مؤلفه‌ها ادامه داده شود، این کار تا زمانی انجام می‌شود که $r(\le n)$ تا از مؤلفه‌ها از کار بیفتند. در این‌صورت نمونه سانسورشده نوع دوم به‌صورت $\mathbf{x}=\left(x_{(۱)},\dots,x_{(r)}\right)$ با تابع درستنمایی

$$L(\sigma\,|\,\mathbf{x})=\frac{n!\prod_{i=۱}^{r}x_{(i)}}{(n-r)!\sigma^{r}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=۱}^{r}x_{(i)}^{۲}+(n-r)x_{(r)}^{۲}}{۲\sigma}\right\},\quad ۰<x_{(۱)}<x_{(۲)}<\cdots<x_{(r)}. \quad (۲)$$

است [3]. در نتیجه، با حل معادلهٔ $\frac{\partial \ln L(\sigma\,|\,\mathbf{x})}{\partial\sigma}=۰$، برآوردگر بیشینه درستنمایی σ برابر است با

$$\hat{\sigma}=\frac{\sum_{i=۱}^{r}X_{(i)}^{۲}+(n-r)X_{(r)}^{۲}}{۲r}. \quad (۳)$$

در بعضی از موقعیت‌های کاربردی، محقق دارای اطلاعات پیشین دربارهٔ پارامتر نامعلوم σ به‌صورت یک حدس یا گمان $\sigma_{۰}$ است. برآورگرهای انقباضی برای پارامتر نامعلوم σ وقتی که مقدار حدسی $\sigma_{۰}$ برای σ در اختیار باشد، راتامسون [4] به‌صورت (۴) تعریف کرده است:

$$\hat{\sigma}_S=k\,\hat{\sigma}+(۱-k)\sigma_{۰},\quad ۰\le k\le ۱, \quad ۴$$

که در آن $\hat{\sigma}$ برآوردگر بیشینه درستنمایی σ و k ضریب انقباضی است که محقق با توجه به عقیده‌اش نسبت به مقدار حدسی σ_0 تعیین می‌کند. مقادیر k نزدیک به یک نشان‌دهندهٔ گرایش برآوردگر به نمونه و مقادیر k نزدیک به صفر نشان‌دهندهٔ گرایش برآوردگر به مقدار حدسی است. در صورتی‌که مقدار حدسی پارامتر به مقدار واقعی آن نزدیک باشد، برآوردگرهای انقباضی رفتار بهتری نسبت به برآوردگرهای معمول مانند برآورگرهای بیشینه درستنمایی از خود نشان می‌دهند به این مفهوم که دارای مخاطره کم‌تری هستند. معمولاً برای این‌که تشخیص دهیم که مقدار حدسی پارامتر به مقدار واقعی آن نزدیک است یا خیر، یک آزمون مقدماتی برای آزمون فرضیه

$$\begin{cases}H_{۰}:\sigma=\sigma_{۰}\\ H_{۱}:\sigma\neq\sigma_{۰}\end{cases}$$

انجام می‌شود. با توجه به رد یا پذیرش $H_{۰}:\sigma=\sigma_{۰}$ می‌توان برآوردگرهای جدیدی ساخت که از آن‌ها به‌عنوان آزماورد یاد می‌شود. برای بررسی بیش‌تر به پراکاش و سینگ [5] و سینگ و همکاران [6] مراجعه شود.

تابع‌های زیان توان دوم خطا و لاینکس پایای مکان هستند و برای برآورد پارامتر مکان مناسب هستند. تابع زیان توان دوم خطای پایای مقیاس به‌صورت

$$L(\sigma,\delta)=\left(\frac{\delta}{\sigma}-۱\right)^{۲} \qquad (۵)$$

یک تابع زیان محدب و دارای نقطهٔ کمینه در نقطهٔ $\delta=\sigma$ و مناسب برای برآورد پارامتر مقیاس σاست. نعمت‌الهی و کیاپور [1] به برآوردیابی بیزی استوار تحت تابع زیان (۵) پرداختند. در این مقاله، آزماوردهای انقباضی با توجه به رد یا پذیرش فرضیه $H_۰:\sigma=\sigma_۰$ معرفی و مخاطره آن‌ها به‌دست می‌آیند. سپس، برای مقایسه عملکرد آزماوردهای انقباضی معرفی شده و بهترین برآوردگر خطی ناریب، کارایی نسبی بین آن‌ها تحت تابع زیان (۵) محاسبه می‌شود. با استفاده از یک روش بیزی، برآوردگر انقباضی بیزی را به‌دست آورده و رفتار آن را نسبت به بهترین برآوردگر خطی ناریب با محاسبه کارایی نسبی بین آن‌ها بررسی می‌کنیم. یک مثال عددی برای تشریح برآوردگرهای پیشنهادی ارایه شده است. در پایان، به بحث و نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

بهترین برآوردگر ناریب خطی

یک برآوردگر خطی به‌صورت $c\hat{\sigma}$ برای برآورد σ در نظر بگیرید که در آن $\hat{\sigma}$ برآوردگر بیشینه درست‌نمایی σ داده شده در (۳) است. با توجه به این‌که $۲r\hat{\sigma}/\sigma\sim\chi^{۲}_{۲r}$ ([۳])، می‌توان نشان داد

$$E\left[\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\right]^{۲}=\frac{r+۱}{r},\quad E\left[\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\right]=۱.$$

در نتیجه، مخاطره برآوردگر $c\hat{\sigma}$ تحت تابع زیان (۵) برابر است با

$$R(\sigma,c\hat{\sigma})=E\left[\frac{c\hat{\sigma}}{\sigma}-۱\right]^{۲}=c^{۲}E\left[\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\right]^{۲}-۲cE\left[\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\right]+۱$$
$$=c^{۲}\frac{r+۱}{r}-۲c+۱$$

مشتق اول و دوم مخاطره برآوردگر $c\hat{\sigma}$ برابر است با

$$\frac{\partial R(\sigma,c\hat{\sigma})}{\partial\sigma}=۲c\frac{r+۱}{r}-۲,\quad \frac{\partial^{۲}R(\sigma,c\hat{\sigma})}{\partial\sigma^{۲}}=\frac{۲(r+۱)}{r}>۰.$$

بنابراین مخاطره برآوردگر $c\hat{\sigma}$ تابعی محدب نسبت به c و دارای نقطه کمینه در $c=c_۱$ به‌صورت

$$c_۱=\frac{r}{r+۱}$$

است. همچنین مخاطره برآوردگر $c_۱\hat{\sigma}$ برابر است با

$$R(\sigma,c_۱\hat{\sigma})=c_۱^{۲}\frac{r+۱}{r}-۲c_۱+۱=\frac{۱}{r+۱} \qquad (۶)$$

لازم به یادآوری است که با توجه به تعریف لهمن (۱۹۵۱) برآوردگر δرا تحت تابع زیان (۳) برای σ مخاطره ناریب گویند اگر در شرط

$$\frac{E(\delta^{۲})}{E(\delta)}=\theta.$$

صدق کند. به‌راحتی می‌توان نشان داد

$$E\left(c_1\hat{\sigma}\right)^2=\frac{r}{r+1}\sigma^2,\quad E\left(c_1\hat{\sigma}\right)=\frac{r}{r+1}\sigma$$

با قراردادن روابط مذکور در شرط مخاطره نااریبی، نتیجه می‌شود که برآوردگر $c_1\hat{\sigma}$ تحت تابع زیان (۵) برای پارامتر σ مخاطره نااریب است. در نتیجه می‌توان گفت که برآوردگر $c_1\hat{\sigma}$ یک برآوردگر مخاطره نااریب با کم‌ترین مخاطره در کلاس برآوردگرهای به فرم $c\hat{\sigma}$ یعنی بهترین برآوردگر نااریب خطی است.

آزماوردهای انقباضی

برآوردگر انقباضی تعریف شده در (۴) را درنظربگیرید. با توجه به رد یا پذیرش فرضیهٔ $H_0:\sigma=\sigma_0$ می‌توان آزماوردهای انقباضی را ساخت به این ترتیب که اگر $H_0:\sigma=\sigma_0$ در سطح معنی‌داری α پذیرفته شود، آزماورد انقباضی برابر $k\hat{\sigma}+(1-k)\sigma_0$ و در غیر این‌صورت برابر $c_1\hat{\sigma}$ خواهد بود. برای آزمون فرضیه $H_0:\sigma=\sigma_0$ می‌توان از کمیت محوری $2r\hat{\sigma}/\sigma\sim\chi^2_{2r}$ استفاده کرد. تحت $H_0:\sigma=\sigma_0$ داریم

$$P\left(q_1\leq\frac{2r\hat{\sigma}}{\sigma_0}\leq q_2\right)=1-\alpha,$$

که در آن $q_1=\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2r}$ و $q_2=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2r}$ به‌ترتیب چندک‌های $\alpha/2$ و $1-\alpha/2$ توزیع کی‌دو با $2r$ درجه آزادی هستند. در نتیجه آزماورد انقباضی معرفی شده را می‌توان به‌صورت

$$\hat{\sigma}_{ST}=\begin{cases}k\hat{\sigma}+(1-k)\sigma_0 & t_1\leq\hat{\sigma}\leq t_2\\ c_1\hat{\sigma} & \hat{\sigma}<t_1\quad or\quad\hat{\sigma}>t_2.\end{cases}\tag{۷}$$

نوشت، که در آن $t_1=\frac{q_1\sigma_0}{2r}$ و $t_2=\frac{q_2\sigma_0}{2r}$. مخاطره آزماورد انقباضی (۷) برابر است با

$$R(\sigma,\hat{\sigma}_{ST})=E\left[\left(\frac{k\hat{\sigma}+(1-k)\sigma_0}{\sigma}-1\right)^2 I\left(t_1\leq\hat{\sigma}\leq t_2\right)\right]+E\left[\left(\frac{c_1\hat{\sigma}}{\sigma}-1\right)^2 I\left(\hat{\sigma}<t_1\quad or\quad\hat{\sigma}>t_2\right)\right]$$
$$=\int_{w_1}^{w_2}\left(kw+(1-k)\delta_0-1\right)^2 g(w)dw-\int_{w_1}^{w_2}\left(c_1w-1\right)^2 g(w)dw+\left(r+1\right)^{-1}\tag{۸}$$

که در آن $\delta_0=\frac{\sigma_0}{\sigma}$، $w_1=\frac{q_1\delta_0}{2r}$، $w_2=\frac{q_2\delta_0}{2r}$، $W=\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\sim Gamma(r,r^{-1})$ و $g\left(w\right)$ تابع چگالی W به‌صورت

$$g\left(w\right)=\frac{r^r w^{r-1}e^{-rw}}{\Gamma\left(r\right)},\qquad w>0.$$

است. مخاطرهٔ آزماورد انقباضی در (۸) با استفاده از روش‌های عددی در نرم‌افزار R 3.1.2 برای مقادیر مختلف α، k، δ_0 و r محاسبه می‌شود.

انتخاب مقدارضریب انقباضی k از مسائل مهم در در تعیین آزماورد انقباضی است. در این‌جا ۴ مقدار مختلف برای k ارائه می‌دهیم که با استفاده از روش‌های متفاوتی به‌دست می‌آیند.

روش اول. یکی از روش‌های به‌دست آوردن مقداری برای ضریب انقباض k، مقداری از k است که مخاطره برآوردگر انقباضی $\hat{\sigma}_S$ داده شده در (۴) را کمینه کند. مخاطره برآوردگر انقباضی $\hat{\sigma}_S$ برابر است با

$$R(\sigma,\hat{\sigma}_S)=E\left[\frac{k\hat{\sigma}+(1-k)\sigma_0}{\sigma}-1\right]^2$$
$$=E\left[\frac{(k\hat{\sigma})^2+(1-k)^2\sigma_0^2}{\sigma^2}\right]-2E\left[\frac{k\hat{\sigma}+(1-k)\sigma_0}{\sigma}\right]+1$$
$$=k^2E(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma})^2+(1-k)^2(\frac{\sigma_0}{\sigma})^2+2k(1-k)\frac{\sigma_0}{\sigma}E(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma})-2kE(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma})-2(1-k)\frac{\sigma_0}{\sigma}+1$$
$$=k^2\left(\frac{r+1}{r}+\delta_0^2-2\delta_0\right)-(2k-1)(\delta_0-1)^2$$

با مشتق‌گیری از تابع مخاطره فوق و مساوی قراردادن آن با صفر، مقداری از k که مخاطرهٔ مـذکور را کمینـه مـی‌کنـد برابر است با

$$k_1=k_{\min}=\frac{r(\delta_0-1)^2}{r(\delta_0-1)^2+1} \qquad (9)$$

هم‌چنین $\frac{\partial^2 R}{\partial^2 k}|_{k=k_{\min}}>0$. دقت کنید مقدار $k_{\min}$ بین صفر و یک است و می‌تواند به‌عنوان ضریب انقباضـی در نظـر گرفته شود. توجه به این نکته، مهم است که مقدار ضریب انقباضی k_1 به پـارامتر نـامعلوم σ بسـتگی دارد و ایـن در مسائل کاربردی امکان‌پذیر نیست. بنابراین در عمل، $\hat{k}_1$ با توجه به خاصیت پایایی برآوردگر بیشینه درسـت‌نمـایی و بـا جای‌گذاری $\hat{\sigma}$ به‌جای σ به‌دست می‌آید.

روش دوم. تحت فرضیهٔ $H_0:\sigma=\sigma_0$، رابطهٔ

$$q_1\le\frac{2r\hat{\sigma}}{\sigma_0}\le q_2, \qquad (10)$$

هم‌ارز با رابطهٔ

$$0\le\frac{\frac{2rW}{\delta_0}-q_1}{q_2-q_1}\le 1,$$

است، که در آن δ_0 و W قبلاً تعریف شده‌اند. بنابراین مقدار

$$k_2=\frac{\frac{2rW}{\delta_0}-q_1}{q_2-q_1}, \qquad (11)$$

می‌تواند به‌عنوان ضریب انقباضی درنظرگرفته شود.

روش سوم. اگر فرضیهٔ $H_0:\sigma=\sigma_0$ در سطح معنی‌داری α پذیرفته شود، آن‌گاه از رابطهٔ (۱۰) و بـا گـرفتن امیـد ریاضی از طرفین آن، داریم $q_1\le 2r\le q_2$ و در نتیجه $\frac{q_1}{2r}\le 1$. با در نظر گرفتن $\frac{q_1}{2r}\approx 1$ می‌توان به ضریب انقباضـی کوچک‌تری دست یافت. از رابطهٔ (۱۱) داریم:

$$\frac{\frac{2rW}{\delta_0}-q_1}{q_2-q_1}=2r\,\frac{\frac{W}{\delta_0}-\frac{q_1}{2r}}{q_2-q_1}\approx 2r\,\frac{\frac{W}{\delta_0}-1}{q_2-q_1}. \qquad (12)$$

صورت آخرین عبارت رابطهٔ (۱۲) ممکن است منفی باشد. بنابراین قدرمطلق آن را به‌عنوان ضریب انقباضی $k_۳$ به‌صورت (۱۳) در نظر می‌گیریم:

$$k_۳ = \frac{۲r}{q_۲ - q_۱}\left|\frac{W}{\delta_۰} - ۱\right|. \qquad (۱۳)$$

روش چهارم. مقدار $c = c_۱$ که مخاطره برآوردگر به فرم $c\hat{\sigma}$ را کمینه می‌کند و برابر است با

$$k_۴ = c_۱ = \frac{r}{r+۱}, \qquad (۱۴)$$

می‌تواند به‌عنوان ضریب انقباضی در نظرگرفته شود.

ضرایب انقباضی k_i، $i = ۱,۲,۳,۴$، آزماوردهای انقباضی $\hat{\sigma}_{STi}$، $i = ۱,۲,۳,۴$ را فراهم می‌کنند. مخاطر آزماوردهای انقباضی $\hat{\sigma}_{STi}$ نیز با قراردادن مقادیر ضرایب انقباضی k_i متناظر در رابطهٔ (۸) محاسبه می‌شوند. برای مقایسه آزماوردهای انقباضی معرفی شده و برآوردگر مخاطره نااریب با کم‌ترین مخاطره $c_۱\hat{\sigma}$، کارایی نسبی بین آن‌ها به‌صورت (۱۵) محاسبه می‌شود:

$$RE\left(\hat{\sigma}_{STi}, c_۱\hat{\sigma}\right) = \frac{R\left(\sigma, c_۱\hat{\sigma}\right)}{R\left(\sigma, \hat{\sigma}_{STi}\right)}, \qquad i = ۱,۲,۳,۴. \qquad (۱۵)$$

جدول‌های ۱ تا ۴ کارایی نسبی (۱۵) را به‌ازای مقادیر مختلف $r = ۴,۶,۸$، $\delta_۰ = ۰/۲۵(۰/۲۵)۱/۷۵$ و $\alpha = ۰/۰۱, ۰/۰۵, ۰/۱$ نشان می‌دهد. آزماوردهای $\hat{\sigma}_{ST۲}$ و $\hat{\sigma}_{ST۴}$ به‌ازای $۰/۲۵ \le \delta_۰ \le ۱$، آزماورد $\hat{\sigma}_{ST۱}$ به‌ازای $۰/۲۵ \le \delta_۰ \le ۱/۲۵$ و آزماورد $\hat{\sigma}_{ST۳}$ به‌ازای $۰/۷۵ \le \delta_۰ \le ۱/۲۵$ دارای کارایی بیش‌تری نسبت به $c_۱\hat{\sigma}$ هستند. کارایی تمام آزماوردها در نقطهٔ یک به بیشینه خود می‌رسد. تقریباً در اکثر موارد کارایی نسبی با افزایش r کاهش می‌یابد. برای $۰/۷۵ \le \delta_۰ \le ۱/۲۵$ و مقادیر کوچک r، آزماورد $\hat{\sigma}_{ST۱}$ نسبت به دیگر آزماوردها دارای مخاطره کم‌تری است.

جدول ۱. کارایی نسبی بین $\hat{\sigma}_{ST۱}$ و $c_۱\hat{\sigma}$

r	$\alpha_{\downarrow}$	δ: ۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱	۱/۲۵	۱/۵	۱/۷۵
۴	۰/۰۱	۱/۰۵۰۳	۱/۱۹۴۹	۲/۳۶۹۱	۱۳/۴۲۹۲	۳/۳۲۵۲	۱/۴۴۲۶	۱/۰۴۴۵
	۰/۰۵	۱/۰۴۳۴	۱/۲۰۸۶	۱/۹۱۷۲	۴/۳۹۷۷	۲/۲۱۶۶	۱/۱۵۴۹	۰/۸۶۰۷
	۰/۱	۱/۰۳۷۰	۱/۲۱۸۶	۱/۷۶۸۴	۲/۸۵۶۸	۱/۶۹۵۴	۰/۹۹۳۹	۰/۷۶۵۱
۶	۰/۰۱	۱/۰۲۳۲	۱/۰۹۱۳	۱/۹۳۵۷	۱۲/۹۳۰۵	۲/۶۰۸۷	۱/۲۴۳۱	۰/۹۵۵۷
	۰/۰۵	۱/۰۱۷۲	۱/۱۱۵۴	۱/۶۲۱۳	۴/۱۳۱۰	۱/۸۰۹۷	۰/۹۸۸۴	۰/۷۸۰۶
	۰/۱	۱/۰۱۳۴	۱/۱۲۷۴	۱/۵۲۷۷	۲/۶۶۴۲	۱/۴۳۴۵	۰/۸۶۸۲	۰/۷۱۸۷
۸	۰/۰۱	۱/۰۱۱۰	۱/۰۴۳۵	۱/۶۸۳۶	۱۲/۶۶۹۷	۲/۱۹۸۷	۱/۱۲۴۶	۰/۸۹۴۱
	۰/۰۵	۱/۰۰۶۹	۱/۰۷۱۴	۱/۴۴۸۵	۳/۹۹۵۸	۱/۵۶۷۸	۰/۸۹۷۷	۰/۷۳۹۹
	۰/۱	۱/۰۰۵۰	۱/۰۸۲۲	۱/۳۸۶۷	۲/۵۶۷۵	۱/۲۷۸۱	۰/۸۰۴۹	۰/۶۹۲۷

جدول ۲. کارایی نسبی بین $\hat{\sigma}_{ST۲}$ و $c_۱\hat{\sigma}$

r		δ						
	$\alpha_{\downarrow}$	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱	۱/۲۵	۱/۵	۱/۷۵
۴	۰/۰۱	۱/۰۹۱۳	۱/۲۸۴۸	۱/۶۹۲۳	۲/۳۷۰۷	۱/۷۲۱۰	۰/۸۰۹۷	۰/۴۱۱۵
	۰/۰۵	۱/۰۶۹۲	۱/۳۸۹۸	۱/۷۶۱۵	۱/۸۹۳۷	۱/۳۱۱۶	۰/۷۰۸۶	۰/۴۰۰۷
	۰/۱	۱/۰۵۴۷	۱/۳۹۰۸	۱/۷۹۳۶	۱/۷۱۹۶	۱/۱۳۸۷	۰/۶۵۹۲	۰/۴۰۳۹
۶	۰/۰۱	۱/۰۳۷۰	۱/۱۷۳۲	۱/۵۷۳۴	۲/۴۴۷۵	۱/۵۶۰۹	۰/۶۳۵۳	۰/۳۰۸۱
	۰/۰۵	۱/۰۲۴۵	۱/۲۴۳۶	۱/۶۲۰۹	۱/۸۹۰۹	۱/۱۸۹۵	۰/۵۷۳۴	۰/۳۱۶۰
	۰/۱	۱/۰۱۸۲	۱/۲۴۲۲	۱/۶۴۰۱	۱/۶۷۱۷	۱/۰۳۰۱	۰/۵۵۲۴	۰/۳۳۷۱
۸	۰/۰۱	۱/۰۱۵۳	۱/۱۰۸۲	۱/۴۷۴۸	۲/۴۸۳۸	۱/۴۰۲۳	۰/۵۱۷۲	۰/۲۴۶۷
	۰/۰۵	۱/۰۰۸۹	۱/۱۶۰۸	۱/۵۱۸۲	۱/۸۸۶۳	۱/۰۸۰۵	۰/۴۸۳۹	۰/۲۶۹۵
	۰/۱	۱/۰۰۶۲	۱/۱۵۸۸	۱/۵۳۵۶	۱/۶۴۴۷	۰/۹۴۵۱	۰/۴۸۳۸	۰/۳۰۳۷

جدول ۳. کارایی نسبی بین $\hat{\sigma}_{ST۳}$ و $c_۱\hat{\sigma}$

r		δ						
	$\alpha_{\downarrow}$	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱	۱/۲۵	۱/۵	۱/۷۵
۴	۰/۰۱	۰/۹۶۲۳	۱/۱۰۴۳	۲/۱۴۶۷	۴/۹۱۰۹	۲/۷۹۷۸	۱/۰۶۶۱	۰/۵۲۸۹
	۰/۰۵	۱/۰۰۰۵	۱/۱۶۴۳	۱/۸۸۹۶	۲/۹۵۳۸	۱/۹۷۴۸	۰/۹۵۷۲	۰/۵۳۴۵
	۰/۱	۰/۰۱۱۳	۱/۱۸۹۹	۱/۷۶۷۲	۲/۲۸۴۵	۱/۵۷۹۷	۰/۸۷۳۵	۰/۵۳۴۱
۶	۰/۰۱	۰/۹۴۸۸	۰/۹۳۰۳	۱/۸۴۲۷	۵/۲۳۳۲	۲/۳۲۵۶	۰/۸۰۸۲	۰/۴۰۱۸
	۰/۰۵	۰/۹۸۶۲	۱/۰۱۳۵	۱/۶۲۹۷	۲/۹۰۸۸	۱/۶۸۵۶	۰/۷۴۸۶	۰/۴۲۲۱
	۰/۱	۰/۹۹۶۲	۱/۰۵۶۶	۱/۵۴۵۶	۲/۱۸۶۳	۱/۳۷۳۶	۰/۷۱۰۶	۰/۴۴۲۹
۸	۰/۰۱	۰/۹۶۲۲	۰/۸۳۷۸	۱/۶۱۲۴	۵/۳۹۹۷	۱/۹۶۳۰	۰/۶۵۴۲	۰/۳۳۰۷
	۰/۰۵	۰/۹۸۹۵	۰/۹۳۹۱	۱/۴۵۱۸	۲/۸۷۹۱	۱/۴۷۱۵	۰/۶۲۵۹	۰/۳۶۴۶
	۰/۱	۰/۹۹۶۰	۰/۹۹۱۲	۱/۳۹۸۸	۲/۱۳۳۶	۱/۲۲۹۷	۰/۶۱۶۰	۰/۴۰۰۶

جدول ۴. کارایی نسبی بین $\hat{\sigma}_{ST۴}$ و $c_۱\hat{\sigma}$

r		δ						
	$\alpha_{\downarrow}$	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱	۱/۲۵	۱/۵	۱/۷۵
۴	۰/۰۱	۱/۰۹۴۸	۱/۳۲۳۱	۱/۳۱۴۸	۱/۲۶۱۹	۱/۲۰۵۸	۱/۱۲۳۴	۱/۰۱۶۱
	۰/۰۵	۱/۰۶۲۱	۱/۳۲۸۳	۱/۴۰۰۷	۱/۲۸۱۵	۱/۱۴۲۴	۱/۰۰۳۸	۰/۸۶۸۴
	۰/۱	۱/۰۴۷۳	۱/۳۰۳۵	۱/۴۳۴۲	۱/۲۸۸۹	۱/۰۹۲۰	۰/۹۲۲۳	۰/۷۸۳۸
۶	۰/۰۱	۱/۰۴۵۰	۱/۲۵۳۳	۱/۲۳۲۸	۱/۱۷۴۲	۱/۱۲۶۱	۱/۰۵۳۳	۰/۹۵۴۱
	۰/۰۵	۱/۰۲۵۱	۱/۲۳۹۲	۱/۳۰۷۸	۱/۱۸۶۴	۱/۰۵۹۳	۰/۹۳۱۵	۰/۸۰۷۴
	۰/۱	۱/۰۱۷۶	۱/۲۱۲۱	۱/۳۳۷۰	۱/۱۹۱۰	۱/۰۰۹۷	۰/۸۵۹۱	۰/۷۴۱۴
۸	۰/۰۱	۱/۰۲۱۰	۱/۲۱۰۰	۱/۱۹۲۷	۱/۱۳۰۴	۱/۰۸۵۰	۱/۰۱۱۵	۰/۹۰۹۳
	۰/۰۵	۱/۰۱۰۱	۱/۱۸۳۰	۱/۲۶۰۵	۱/۱۳۹۳	۱/۰۱۷۰	۰/۸۹۱۹	۰/۷۷۵۲
	۰/۱	۱/۰۰۶۵	۱/۱۵۵۶	۱/۲۸۵۹	۱/۱۴۲۶	۰/۹۶۹۱	۰/۸۲۸۹	۰/۷۲۷۹

برآوردگر انقباضی بیزی

برخلاف آمار کلاسیک که محقق براساس اطلاعات نمونه‌ای به برآورد پارامتر نامعلوم می‌پردازد، در روش‌های بیـزی براساس ترکیب اطلاعات نمونه‌ای و توزیع پیشین برای پارامتر به برآوردیابی پرداخته می‌شود. پراکاش و سینگ [7] به برآوردیابی انقباضی بیزی پارامتر مقیاس توزیع وایبول و بر اساس داده‌های سانسور شده تحت تابع لاینکس پرداختنـد.

دی و همکاران [8] برآوردگرهای انقباضی بیزی را برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی بر اساس داده‌های سانسور شده تحت تابع زیان آنتروپی به‌دست آوردند. با در نظر گرفتن توزیع گامای وارون، $IGamma(a,b)$، به‌عنوان توزیع پیشین θ با تابع چگالی

$$g(\sigma|a,b)=\frac{a^b\exp(-\frac{a}{۲\sigma})}{۲^b\Gamma(b)\sigma^{b+۱}},\quad a,b,\sigma>۰, \tag{۱۶}$$

تابع چگالی پسین θبه شرط داده‌های سانسورشده $\mathbf{X}=(X_{(۱)},\dots,X_{(r)})$ با ترکیب تابع درست‌نمایی (۳) و توزیع پیشین (۱۶) به‌صورت (۱۷) به‌دست می‌آید:

$$g(\sigma|\mathbf{x};a,b)=\frac{(۲r\hat{\sigma}+a)^{r+b}\exp(-\frac{۲r\hat{\sigma}+a}{۲\sigma})}{۲^{r+b}\Gamma(r+b)\sigma^{r+b+۱}},\quad \theta>۰, \tag{۱۷}$$

که در واقع همان توزیع گامای وارون با پارامترهای $۲r\hat{\sigma}+a$ و $r+b$، یعنی $IGamma(۲r\hat{\sigma}+a,r+b)$، است. مخاطره پسین تحت تابع زیان (۵) برابر با

$$\rho(\delta,\sigma)=E\left[L(\delta,\sigma)|\mathbf{x}\right]=E\left[\frac{\delta^۲}{\sigma^۲}-۲\frac{\delta}{\sigma}+۱|\mathbf{x}\right]$$
$$=\delta^۲E\left[\frac{۱}{\sigma^۲}|\underset{\sim}{x}\right]-۲\delta E\left[\frac{۱}{\sigma}|\mathbf{x}\right]+۱,$$

است. مشتق اول و دوم تابع مخاطره پسین نسبت به δعبارتند از:

$$\frac{\partial\rho(\delta,\sigma)}{\partial\delta}=۲\delta E\left[\frac{۱}{\sigma^۲}|\underset{\sim}{x}\right]-۲E\left[\frac{۱}{\sigma}|\mathbf{x}\right],\quad \frac{\partial^۲\rho(\delta,\sigma)}{\partial\delta^۲}=۲E\left[\frac{۱}{\sigma^۲}|\underset{\sim}{x}\right]>۰.$$

است. بنابراین تابع مخاطره پسین نسبت به δ تابعی محدب است و به‌ازای

$$\delta^\pi(\underset{\sim}{x})=\frac{E\left[\frac{۱}{\sigma}|\underset{\sim}{x}\right]}{E\left[\frac{۱}{\sigma^۲}|\underset{\sim}{x}\right]}. \tag{۱۸}$$

کمینه می‌شود. برآوردگر (۱۸) برآوردگر بیزی تحت تابع زیان (۵) است. با توجه به توزیع پسین (۱۶) داریم:

$$E\left[\frac{۱}{\sigma}|\underset{\sim}{x}\right]=\frac{۲(r+b)}{۲r\hat{\sigma}+a},\quad E\left[\frac{۱}{\sigma^۲}|\underset{\sim}{x}\right]=\frac{۴(r+b)(r+b+۱)}{(۲r\hat{\sigma}+a)^۲}$$

بنابراین برآوردگر بیزی تحت تابع زیان (۵) برابر است با

$$\delta^\pi(\underset{\sim}{x})=\frac{۲r\hat{\sigma}+a}{۲(r+b+۱)}. \tag{۱۹}$$

اگر مقدار حدسی $\sigma_۰$ در مورد پارامتر σ در اختیار باشد آن‌گاه داریم $۲r\hat{\sigma}/\sigma_۰\sim\chi^۲_{۲r}$. با استفاده از روش پراکاش و سینگ [6] و قرار دادن $E[\delta^\pi(\underset{\sim}{x})]=\sigma$ داریم:

$$E[\delta^\pi(\underset{\sim}{x})]=\frac{۲rE[\hat{\sigma}]+a}{۲(r+b+۱)}=\frac{۲r\sigma_۰+a}{۲(r+b+۱)}=\sigma_۰\ . \tag{۲۰}$$

با حل رابطهٔ (۲۰) نتیجه می‌شود $a = ۲(b+۱)\sigma_۰$. با قراردادن این مقدار در برآوردگر بیزی (۱۹)، برآوردگر بیزی بدین‌صورت است:

$$\delta_S^{\pi}(\underset{\sim}{x}) = \frac{۲r\hat{\sigma} + ۲(b+۱)\sigma_۰}{۲(r+b+۱)} = \lambda\hat{\sigma} + (۱-\lambda)\sigma_۰, \qquad (۲۱)$$

که در آن $\lambda = \frac{r}{r+b+۱}$. برآوردگر بیزی (۲۱) یک برآوردگر انقباضی بیزی نامیده می‌شود که مخاطره آن تحت تابع زیان (۵) برابر است با

$$\begin{aligned} R(\sigma, \delta_S^{\pi}(\underset{\sim}{x})) &= E\left[\frac{\delta_S^{\pi}(\underset{\sim}{x})}{\sigma} - ۱\right]^۲ \\ &= E\left[\frac{\lambda\hat{\sigma} + (۱-\lambda)\sigma_۰}{\sigma} - ۱\right]^۲ \\ &= \lambda^۲\left(\frac{۱}{r} + (\delta_۰ - ۱)^۲\right) - (۲\lambda - ۱)(\delta_۰ - ۱)^۲ \end{aligned}$$

برای مقایسه برآوردگر انقباضی بیزی (۲۱) و برآوردگر مخاطره ناریب با کم‌ترین مخاطره $c_۱\hat{\sigma}$، کارایی نسبی بین آن‌ها به‌صورت (۲۲) محاسبه می‌شود:

$$RE\left(\delta_S^{\pi}(\underset{\sim}{x}), c_۱\hat{\sigma}\right) = \frac{R\left(\sigma, c_۱\hat{\sigma}\right)}{R(\sigma, \delta_S^{\pi}(\underset{\sim}{x}))}. \qquad (۲۲)$$

جدول ۵ کارایی نسبی (۲۲) را به‌ازای مقادیر مختلف $r = ۴,۶,۸$، $\delta_۰ = ۰/۲۵(۰/۲۵)۱/۷۵$ و $b = ۱,۵,۱۰,۱۵$ نشان می‌دهد که از گام‌های ۰/۲۵ برای $\delta_۰$ استفاده شده است. در بیش‌تر حالت‌ها برآوردگر انقباضی بیزی نسبت به برآوردگر $c_۱\hat{\sigma}$ دارای مخاطره کم‌تری است. کارایی نسبی به‌ازای r و b ثابت تابعی مقعر نسبت به $\delta_۰$ است که در نقطه $\delta_۰ = ۱$ به بیشینه خود می‌رسد. به‌ازای r ثابت، کارایی نسبی به‌ازای $۰/۷۵ \le \delta_۰ \le ۱/۲۵$ با افزایش b افزایش می‌یابد. این نشان می‌دهد که وقتی σ به $\sigma_۰$ نزدیک است، برآوردگر انقباضی بیزی برای مقادیر بزرگتر b دارای مخاطره کمتری نسبت به برآوردگر $c_۱\hat{\sigma}$ است.

مثال کاربردی

مجموعهٔ داده‌های زیر (لاولس [۹]) مدت زمان بهبودی ۲۰ بیمار سرطان خون را که با مصرف دارو درمان شده‌اند نشان می‌دهد.

۱/۰۱۳ ۱/۰۳۴ ۱/۱۰۹ ۱/۱۶۹ ۱/۲۶۶ ۱/۵۰۹ ۱/۵۳۳

۱/۵۶۳ ۱/۷۱۶ ۱/۹۲۹ ۱/۹۶۵ ۲/۰۶۱ ۲/۳۴۴ ۲/۵۴۶

۲/۶۲۶ ۲/۷۷۸ ۲/۹۵۱ ۳/۴۱۳ ۴/۱۱۸ ۵/۱۲۶

فرض کنید مدت زمان بهبودی ۱۰ بیمار اول را در نظر بگیریم یعنی $r = ۱۰$. یک آزمون کلموگروف- اسمیرنوف با مقدار آمارهٔ آزمون ۰/۱۵۹۱ و مقدار معنی‌داری ۰/۶۳۵۲ حاکی از برازش توزیع رایلی با پارامتر ۲/۸۸۲۰ است. برآوردگر مخاطره ناریب با کم‌ترین مخاطره برابر است با

$$c_۱\hat{\sigma} = \frac{r}{r+۱}\hat{\sigma} = \frac{۱۰}{۱۱}\left(۲/۸۶۲۰\right) = ۲/۶۰۱۸$$

جدول ۵. کارایی نسبی بین $\delta_S^{\pi}(\underset{\sim}{x})$ و $c_1\hat{\sigma}$

r	$\delta_0 \downarrow$	۱	۵	۱۰	۱۵
		b			
۴	۰/۲۵	۱/۱۵۲۰	۰/۸۲۴۷	۰/۶۲۴۴	۰/۵۴۰۵
	۰/۵	۱/۴۴۰۰	۱/۵۳۸۴	۱/۳۱۳۸	۱/۱۷۶۴
	۰/۷۵	۱/۶۹۴۱	۳/۲۰۰۰	۳/۸۹۱۸	۴/۰۰۰۰
	۱	۱/۸۰۰۰	۵/۰۰۰۰	۱۱/۲۵۰۰	۲۰/۰۰۰۰
	۱/۲۵	۱/۶۹۴۱	۳/۲۰۰۰	۳/۸۹۱۸	۴/۰۰۰۰
	۱/۵	۱/۴۴۰۰	۱/۵۳۸۴	۱/۳۱۳۸	۱/۱۷۶۴
	۱/۷۵	۱/۱۵۲۰	۰/۸۲۴۷	۰/۶۲۴۴	۰/۵۴۰۵
	۲	۰/۹۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۳۶۰۰	۰/۳۰۷۶
۶	۰/۲۵	۱/۱۰۸۲	۰/۷۸۳۶	۰/۵۵۷۴	۰/۴۶۰۹
	۰/۵	۱/۳۰۶۱	۱/۳۷۱۴	۱/۱۳۸۹	۰/۹۸۷۷
	۰/۷۵	۱/۴۶۲۸	۲/۴۹۳۵	۳/۰۴۴۱	۳/۱۴۲۸
	۱	۱/۵۲۳۸	۳/۴۲۸۵	۶/۸۸۰۹	۱۱/۵۲۳۸
	۱/۲۵	۱/۴۶۲۸	۲/۴۹۳۵	۳/۰۴۴۱	۳/۱۴۲۸
	۱/۵	۱/۳۰۶۱	۱/۳۷۱۴	۱/۱۳۸۹	۰/۹۸۷۷
	۱/۷۵	۱/۱۰۸۲	۰/۷۸۳۸	۰/۵۵۷۴	۰/۴۶۰۹
	۲	۰/۹۱۴۲	۰/۴۸۹۷	۰/۳۲۵۰	۰/۲۶۳۹
۸	۰/۲۵	۱/۰۸۴۰	۰/۷۷۰۸	۰/۵۲۷۳	۰/۴۲۱۰
	۰/۵	۱/۲۳۴۵	۱/۲۸۱۰	۰/۰۴۸۹	۰/۸۸۸۸
	۰/۷۵	۱/۳۴۶۸	۲/۱۲۴۶	۲/۵۷۷۴	۲/۶۶۶۶
	۱	۱/۳۸۸۸	۲/۷۲۲۲	۵/۰۱۳۸	۸/۰۰۰۰
	۱/۲۵	۱/۳۴۶۸	۲/۱۲۴۶	۲/۵۷۷۴	۲/۶۶۶۶
	۱/۵	۱/۲۳۴۵	۱/۲۸۱۰	۱/۰۴۸۶	۰/۸۸۸۸
	۱/۷۵	۱/۰۸۴۰	۰/۷۷۰۸	۰/۵۲۷۳	۰/۴۲۱۰
	۲	۰/۹۲۵۹	۰/۴۹۴۹	۰/۳۱۰۹	۰/۲۴۲۴

اگر مقدار حدسی $\sigma_0 = ۲$ باشد آن‌گاه برای آزمون فرض

$$H_0 : \sigma = ۲ \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \sigma \neq ۲$$

مقدار آمارهٔ آزمون برابر است با

$$U_0 = \frac{۲r\hat{\sigma}}{\sigma_0} = \frac{۲(۱۰)(۲/۸۶۲۰)}{۲} = ۲۸/۶۲۰$$

از طرفی با در نظر گرفتن سطح معنی‌داری ۰/۰۵ داریم $q_1 = \chi^2_{۰/۰۲۵,۲۰} = ۹/۵۹۰۸$ و $q_2 = \chi^2_{۰/۹۷۵,۲۰} = ۳۴/۱۶۹۶$.

از آن‌جاکه $U_0 \in (۹/۵۹۰۸ \ , \ ۳۴/۱۶۹۶)$، در نتیجه فرض صفر در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ پذیرفته می‌شود. آزماوردهای پیشنهادی در سطر اول جدول ۶ خلاصه شده‌اند. به‌طور مشابه، برای مقدار حدسی $\sigma_0 = ۳$ نیز فرض $H_0 : \sigma = ۳ \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \sigma \neq ۳$ در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ پذیرفته می‌شود و آزماوردهای پیشنهادی در سطر دوم جدول ۶ محاسبه شده‌اند.

اگر مقدار حدسی $\sigma_0 = ۵$ باشد آن‌گاه فرض $H_0 : \sigma = ۵ \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \sigma \neq ۵$ در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ رد می‌شود، از این رو، آزماوردهای پیشنهادی برابر با برآورد مخاطره ناریب با کم‌ترین مخاطره هستند.

جدول ۶. برآورد پارامتر برای داده‌های مثال کاربردی

$\hat{\sigma}_{ST4}$	$\hat{\sigma}_{ST3}$	$\hat{\sigma}_{ST2}$	$\hat{\sigma}_{ST1}$	$c_1\hat{\sigma}$	σ_0
۲/۷۸۳۶	۲/۳۰۲۳	۲/۶۶۷۳	۲/۴۱۰۰	۲/۶۰۱۸	۲
۲/۸۷۴۵	۲/۹۹۴۸	۲/۹۴۶۷	۲/۹۹۶۸	۲/۶۰۱۸	۳
۲/۶۰۱۸	۲/۶۰۱۸	۲/۶۰۱۸	۲/۶۰۱۸	۲/۶۰۱۸	۵

حال فرض کنید اطلاعات پیشین برای پارامتر σ در اختیار داشته باشیم. اگر مقدارحدسی $\sigma_0 = ۲$، $b = ۲$ و در نتیجه $a = ۲(b+۱)\sigma_0 = ۱۲$ باشند آن‌گاه

$$\lambda = \frac{r}{r+b+۱} = \frac{۱۰}{۱۳} = ۰/۷۶۹۲$$

در نتیجه برآوردگر انقباضی بیزی برابر است با:

$$\delta_S^{\pi}(\underset{\sim}{x}) = \lambda\hat{\sigma} + (۱-\lambda)\sigma_0 = ۰/۷۶۹۲(۲/۸۶۲۰) + ۰/۲۳۰۸(۲) = ۲/۶۶۳۰$$

مقادیر برآورد انقباضی بیزی برای مقادیر مختلف $\sigma_0 = ۲,۳,۵$ و $b = ۲,۵,۱۰,۱۵$ در جدول ۷ محاسبه شده‌اند. چنان‌که ملاحظه می‌شود برای مقدار ثابت b و با افزایش مقدار حدسی σ_0، مقدار برآورد افزایش می‌یابد.

جدول ۷. برآورد انقباضی بیزی پارامتر برای داده‌های مثال

b				σ_0
۱۵	**۱۰**	**۵**	**۲**	
۲/۳۳۱۵	۲/۴۱۰۵	۲/۵۳۸۷	۲/۶۶۳۰	۲
۲/۹۴۶۹	۲/۹۳۴۳	۲/۹۱۳۷	۲/۸۹۳۸	۳
۴/۱۷۷۷	۳/۹۸۱۹	۳/۶۶۳۷	۳/۳۵۵۴	۵

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با در نظرگرفتن توزیع طول عمر رایلی براساس داده‌های سانسورشده نوع دوم، آزماوردهای انقباضی و یک برآوردگر انقباضی بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای پایای مقیاس ارائه شد. آزماوردهای انقباضی با استفاده از ۴ روش مختلف، معرفی و مخاطره آن‌ها به‌دست آمد. برای مقایسهٔ عملکرد آزماوردهای انقباضی و بهترین برآوردگر خطی ناریب، از ملاک کارایی نسبی بین آن‌ها استفاده شد. نتایج نشان داد که آزماوردهای انقباضی وقتی σ به σ_0 نزدیک است دارای مخاطره کم‌تری نسبت به برآوردگر مخاطره ناریب با کم‌ترین مخاطره $c_1\hat{\sigma}$ است. در ادامه، یک برآوردگر انقباضی بیزی را معرفی و رفتار آن را نسبت به $c_1\hat{\sigma}$ با محاسبه کارایی نسبی بین آن‌ها بررسی کردیم. محاسبات عددی نشان می‌دهد که وقتی σ به σ_0 نزدیک است، برآوردگر انقباضی بیزی برای مقادیر بزرگ‌تر b دارای مخاطره کم‌تری نسبت به برآوردگر $c_1\hat{\sigma}$ است. با توجه به این‌که $a = ۲(b+۱)\sigma_0$، اگر σ به σ_0 نزدیک باشد، مقادیر بزرگ‌تر a و b برای انتخاب ابرپارامترهای توزیع پیشین پیشنهاد می‌شود.

منابع

۱. نعمت‌الهی ن.، کیاپور آ.، "تحلیل بیزی استوار و کاربرد آن در برآورد حق بیمه"، نشریه علوم خوارزمی، دورهٔ ۱۳، شمارهٔ ۳، ۸۴۳-۸۶۰ (۱۳۹۲).

2. Polovko A. M., "Fundamentals of Reliability Theory", Academic Press, SanDiego (1968).
3. Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N., "A first course in order statistics", John Wiley & Sons, New York (2008).
4. Thompson J. R., "Some shrunken techniques for estimating the Mean", Journal of the American Statistical Association 63 (1968) 113-122.
5. Prakash G., Singh D. C., "Shrinkage estimation in exponential type-II censored data under LINEX loss", Journal of the Korean Statistical Society 37 (2008) 53-61.
6. Singh D. C., Prakash G., Singh P., "Shrinkage testimator for the shape parameter of pareto distribution using LINEX loss function", Communication in Statics Theory and Methods (2007) 741-753.
7. Prakash G., Singh D. C., "A Bayesian shrinkage approach in Weibull type-II censored data using prior point information", REVSTAT-Statistical Journal 7(2) (2009) 171-187.
8. Day S., Day T., Maiti S. S., "Bayes shrinkage estimation of the parameter of Rayleigh distribution for progressively type-II censored data", Austrian Journal of Statistics 44 (2015) 3-15.
9. Lawless J. F., "Statistical Models and Methods for Lifetime Data", Wiley, New York (1982).