

رابطه‌ی الحاقی بین خود-تابعگونی‌های Hom و تانسور رسته (دو-) مدول‌های جبرهای هم-مدولی روی یک جبر شبه-هاپف

سعید باقری

دانشگاه ملایر، دانشکده علوم ریاضی

پذیرش ۹۷/۱۱/۰۸

دریافت ۹۷/۰۳/۲۵

چکیده

فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف روی حلقه جابه‌جایی k و A یک جبر هم-مدولی روی H باشد. در این مقاله نشان می‌دهیم که گرچه رسته دو-مدول‌ها، A_M ، لزوماً یک رسته تکواری نیست، با این وجود هم-عمل عمل رسته H_M روی A_M را باعث شده و از این رهگذر نسخه‌های مناسبی از خود-تابعگونی‌های تانسور و Hom از رسته A_M را معرفی کرده و الحاقی بین این خود-تابعگونی‌ها را توصیف می‌کنیم. هم‌چنین یک‌ها و هم-یک‌های وابسته به آنها را صریحاً محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: جبر (شبه-) هوپف، جبر هم-مدولی، رسته تکواری، عمل یک رسته تکواری.

مقدمه

روی حلقه جابه‌جایی k ضرب تانسوری هر دو k -مدول خود یک k -مدول بوده است و برای هر سه k -مدول V ، M و N نگاشت طبیعی

$$a_{V,M,N} : (V \otimes M) \otimes N \rightarrow V \otimes (M \otimes N), \quad (v \otimes m) \otimes n \mapsto v \otimes (m \otimes n),$$

یک‌ریختی k -مدول‌هاست. بنابراین رسته ${}_k M$ شامل همه k -مدول‌ها یک رسته تکواری است. هم‌چنین از نظریه مقدماتی مدول‌ها می‌دانیم که زوج $(V \otimes -, \text{Hom}_k(V, -))$ از خود-تابعگونی‌های ${}_k M$ یک زوج الحاقی بوده است و یک‌ها و هم-یک‌ها متناظر با آن بدین‌صورت طبیعی هستند:

$$\eta_M : M \rightarrow \text{Hom}_k(V, V \otimes_k M), \quad m \mapsto [v \mapsto v \otimes m],$$

$$\varepsilon_M : V \otimes \text{Hom}_k(V, M) \rightarrow M, \quad v \otimes f \mapsto f(v).$$

برای دو-جبر ${}^A(H, \mu, \iota, \Delta, \varepsilon)$ روی حلقه جابه‌جایی k ، بازای هر دو H -مدول چپ $M, N \in {}_H M$ حاصل ضرب تانسوری $M \otimes_K N$ نیز یک H -مدول چپ است. عمل حلقه H روی این ضرب تانسوری برای هر $h \in H$ ، $m \in M$ و $n \in N$ به صورت $h.(m \otimes n) = \Delta(h).(m \otimes n)$ تعریف می‌شود. از این طریق رسته ${}_H M$ شامل همه H -مدول‌های چپ به یک رسته تکواری تبدیل می‌شود.

*نویسنده مسئول s.bagheri@malayeru.ac.ir

1. Quasi-Hopf algebra
2. Comodule algebra
3. Monoidal category
4. Coaction
5. Endofunctor
6. Unit
7. Counit
8. Bialgebra

شرط شرکت‌پذیری^۱ این رسته تکوارهای مستقیماً از هم-شرکت‌پذیری^۲ هم-ضرب^۳ Δ نتیجه می‌شود. در واقع برای H -مدول‌های چپ M, V و نگاشت k -یکریختی طبیعی

$$a - \{V, M, N\} \{(V \otimes_k M) \otimes_k N \rightarrow V \otimes_k (M \otimes_k N)$$

H -خطی نیز هست. با توجه به نمادگذاری منسوب به سویدلر^۴، این بدان معنا است که برای هر $h \in H, v \in V$ و $m \in M, n \in N$ داریم:

$$h \cdot ((v \otimes m) \otimes n) = (h_1 \cdot v \otimes h_2 \cdot m) \otimes h_3 \cdot n = h_1 \cdot v \otimes (h_2 \cdot m \otimes h_3 \cdot n) = h \cdot (v \otimes (m \otimes n)).$$

برابری میانی مذکور همان خاصیت هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب Δ است.

علاوه بر این، برای یک دو-جبر H روی k ، حلقه درون‌ریختی‌های $\text{End}_k(H)$ دارای ساختار k -جبری دومی است که عمل ضرب آن همان ضرب پیچشی^۵ * است. عضو $S \in \text{End}_k(H)$ را یک **آنتی‌پود**^۶ می‌نامند، اگر وارون ضربی نگاشت همانی نسبت به عمل ضرب پیچشی * باشد. یعنی $\text{id} * S = 1 \circ \varepsilon = S * \text{id}$. دو-جبر H را یک **جبر هوف** می‌نامند اگر دارای یک آنتی‌پود باشد.

موضوع اصلی این مقاله درباره جبرهای شبه-هوف است که به‌عنوان تعمیمی از جبرهای هوف به‌وسیله وی.جی. درینفلد [۱۰] معرفی شده است. درواقع یک جبر شبه-هوف همه ویژگی‌های یک جبر هوف به جز هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب را دارا بوده است و در آن عدم هم-شرکت‌پذیری شبه-دو-جبر H با یک ۳-هم-دور^۷ $\phi \in H \otimes H \otimes H$ به گونه‌ای کنترل می‌شود که رسته (دو-) مدول‌ها روی H هم‌چنان یک رسته تکوارهای باقی بماند. بنابراین در این حالت نگاشت $a_{V,M,N}$ تعریف شده در بالا دیگر لزوماً H -خطی نیست و بسیاری از نتایج درباره جبرهای هوف را لزوماً نمی‌توان مستقیماً به وضعیت جدید تعمیم داد. مثلاً در این حالت جبر پیچشی $(\text{End}_K(H), *)$ لزوماً شرکت‌پذیر نیست. یک راه برای کنترل منطقی این مشکلات آن است که شرط شرکت‌پذیری بدیهی $a_{V,M,N}$ در رسته H -مدول‌ها با یک شرط شرکت‌پذیری نابديهی جای‌گزین شود. هم‌چنین در [۱۰] به‌عنوان تعمیم مفهوم آنتی‌پود، مفهوم شبه-آنتی‌پود^۸ معرفی شد. از آن‌جاکه رسته (دو-) مدول‌ها روی یک جبر شبه-هوف یک رسته تکوارهای است، تابعگون‌های تانسور را می‌توان به‌عنوان خود-تابعگون‌هایی روی این رسته‌ها در نظر گرفت. در [۴] انواعی از تابعگون‌های تانسوری $V \otimes_k -$ و $- \otimes_k V$ را به‌عنوان خود-تابعگون‌های رسته‌های M_H یا M_{H^0} بررسی کرده‌ایم.

جبرهای هم-مدولی چپ و راست روی یک شبه-دو-جبر H ، به‌عنوان تعمیمی از شبه-دو-جبرها به‌وسیله اف. هاوسر و اف. نیل [۱۱]، معرفی شدند. برخلاف رسته (دو-) مدول‌ها روی یک جبر شبه-هوف H که تکوارهای دوگانه-بسته^۹ است [۳]، [۵]، [۱۳]، حتی با افزودن برخی شرایط متناهی بودن تکوارهای صلب^{۱۰} است [۲]، [۵]، [۲۹]، رسته (دو-) مدول‌ها روی یک جبر هم-مدولی لزوماً تکوارهای نیست. با اینحال هم-عمل H روی این جبرها امکان وجود یک عمل از یک رسته تکوارهای روی این رسته‌ها را فراهم کرده و از این طریق خود-تابعگون‌های تانسور روی این رسته‌ها

1. Associativity constraint
2. Coassociativity
3. Comultiplication
4. M.E. Sweedler
5. Convolution product
6. Antipode
7. 3-cocycle
8. Quasi-antipode
9. Biclosed monoidal
10. Rigid monoidal

تعریف می شوند. در این مقاله انواعی از تابعگونی های تانسوری مانند $V \otimes_k -$ و $- \otimes_k V$ را به عنوان خود-تابعگونی های رسته های (دو-) مدول های یک جبر هم-مدولی چپ یا راست روی یک جبر شبه-هوف H را بررسی می کنیم.

در بخش ۲ برخی مفاهیم مقدماتی از نظریه رسته ها و درباره جبرهای (شبه-) هوف و نیز برخی نتایج اخیر در خصوص ارتباط بین تابعگونی های Hom و تانسور روی رسته (دو-) مدول های یک جبر شبه-هوف را بررسی می کنیم. نتایج اصلی تر این مقاله در بخش ۳ آورده شده اند. در این بخش برای یک جبر هم-مدولی چپ یا راست با توصیف عمل یک رسته تکواری خاص روی رسته (دو-) مدول های جبر هم-مدولی، تابعگونی های تانسور روی این رسته ها تعریف نموده و الحاقی راست هر یک از این تابعگونی های تانسوری را بر حسب نوع مشخصی از تابعگونی Hom بیان می کنیم و یکها و هم-یکه های وابسته به هر زوج الحاقی را صریحاً مشخص می کنیم.

مفاهیم مقدماتی تر درباره رسته ها و جبرهای (شبه-) هوف

در این بخش برخی نتایج و تعاریف مورد نیاز در این مقاله را یادآوری می کنیم. برای اطلاعات تکمیلی، در باره نظریه مدول ها به [۲] و [۲۱]، در باره جبرهای هوف به [۱]، [۹]، [۱۴]، [۱۶] و [۲۰] و در باره نظریه رسته ها به [۶]، [۷]، [۸]، [۱۵]، [۱۷] و [۱۹] مراجعه شود.

در سراسر این مقاله همواره فرض می کنیم که k حلقه ای جابه جایی و یکدار است و همه (دو-) جبرها و جبرهای هاف روی حلقه زمینه k تعریف می شوند. همچنین همه علائم Hom و $\otimes$ بدون اندیس به ترتیب Hom_k و $\otimes_k$ خواهند بود. برای هر دو k -مدول M و N ، مجموعه همه k -هم ریختی ها از M به N را با علامت $\text{Hom}_k(M, N)$ نشان می دهیم و قرار می دهیم: $\text{End}_k(M) := \text{Hom}_k(M, M)$.

۱. زوج الحاقی از تابعگونی ها: زوج (L, R) شامل تابعگونی های $L: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ و $R: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ بین رسته های $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ را یک زوج الحاقی گوئیم هرگاه یک یکرختی طبیعی مانند:

$$\Omega: \text{Mor}_{\mathbb{B}}(L(-), -) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbb{A}}(-, R(-)),$$

وجود داشته باشد. به عبارت معادل، تبدیلات طبیعی یکه و هم-یکه

$$\varepsilon: LR \rightarrow \text{id}_{\mathbb{B}}, \quad \text{و} \quad \eta: \text{id}_{\mathbb{A}} \rightarrow RL,$$

وجود داشته باشند به طوری که در برابری های مثلثی زیر صدق کنند

$$\varepsilon L \circ L \eta = 1_L, \quad R \varepsilon \circ \eta R = 1_R$$

۲. رسته های تکواری: رسته $\mathbb{A}$ را یک رسته تکواری می نامیم هرگاه یک تابعگونی دو متغیره مانند

$$a: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \quad \text{و} \quad E \text{ همانی مانند } E \text{ و یکرختی های طبیعی}$$

$$a: (- \otimes -) \otimes - \rightarrow - \otimes (- \otimes -) \quad (\text{شرط شرکت پذیری})$$

$$\rho: - \otimes E \rightarrow \text{id} \quad \text{و} \quad \lambda: E \otimes - \rightarrow \text{id} \quad (\text{یکه های چپ و راست})$$

وجود داشته باشند به طوری که برای هر چهار شیء X, Y, Z و W در رسته $\mathbb{A}$:

$$(\text{id}_W \otimes a_{\{X, E, Y\}}) \circ a_{W(X \otimes Y), Z} \circ (a_{\{W, X, Y\}} \otimes \text{id}_Z) = a_{W, X, Y} \otimes Z \circ a_{W \otimes X, Y, Z},$$

$$(\text{id}_X \otimes \lambda_Y) \circ a_{\{X, E, Y\}} = \rho_X \otimes \text{id}_Y.$$

به عبارت دیگر نمودارهای زیر جابه جایی، باشند:

$$\begin{array}{ccc}
 [(W \otimes X) \otimes Y] \otimes Z & \xrightarrow{a_{W,X,Y} \otimes id_Z} & [W \otimes (X \otimes Y)] \otimes Z \\
 \downarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, (X \otimes Y), Z} \\
 (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{W,X,Y \otimes Z}} & W \otimes [(X \otimes Y) \otimes Z] \\
 & & \swarrow id_W \otimes a_{X,Y,Z} \\
 & & W \otimes [(X \otimes Y) \otimes Z] \\
 & & \swarrow id_W \otimes a_{X,Y,Z} \\
 & & W \otimes [(X \otimes Y) \otimes Z] \\
 & & \swarrow id_W \otimes a_{X,Y,Z} \\
 & & W \otimes [(X \otimes Y) \otimes Z]
 \end{array}$$

رسته تکوارهای $(\mathbb{A}, \otimes, E, a, \lambda, \rho)$ یک رسته تکوارهای دوگانه-بسته نامیده می‌شود، هرگاه برای هر شیء X در رسته $\mathbb{A}$ هر دو تابعگون $X \otimes \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ و $\mathbb{A} \rightarrow X \otimes \mathbb{A}$ دارای تابعگون الحاقی راست باشند (برای اطلاعات بیشتر به [۱۴] و [۱۵] مراجعه کنید).

در صورتی که بیم ابهام نباشد رسته تکواری ($\mathbb{A}, \otimes, E, a, \lambda, \rho$) را گاهی با علامت $(\mathbb{A}, \otimes, E)$ و یا فقط با $\mathbb{A}$ نشان می‌دهیم.

حال مفهوم عمل یک رسته تکواره‌ای روی یک رسته دلخواه را تعریف می‌کنیم (برای جزییات بیشتر به [۱۷]، [۱۸] و [۱۹] مراجعه کنید).

۳. عمل یک رسته تکواره‌ای بر یک رسته دلخواه: فرض کنید $(\mathbb{A}, \otimes, E, a, \lambda, \rho)$ یک رسته تکواره‌ای باشد. یک $\mathbb{A}$ -رسته راست عبارت است از یک چهارتایی مانند $(D, \diamond, \Psi, r)$ که در آن D یک رسته، $\diamond : D \times \mathbb{A} \rightarrow D$ یک تابعگون و

$$\mathbf{r}:-\Diamond E \rightarrow \text{id} \quad , \Psi:(-\Diamond-)\Diamond \rightarrow -\Diamond(-\otimes-)$$

یکریختی‌های طبیعی به گونه‌ای باشند که برای هر شیء $M \in D$ و اشیاء $X, Y, Z \in A$ داشته باشیم:

$$(\text{id}_{M^{\otimes a}} \otimes \Psi_{M,X,Y,Z}) \circ \Psi_{M,X \otimes Y,Z} \circ (\Psi_{M,X,Y} \otimes \text{id}) = \Psi_{M,X,Y \otimes Z} \circ \Psi_{M \otimes X,Y,Z}, \quad (1)$$

$$(\mathrm{id}_{M^{\diamond \lambda X}}) \circ \Psi_{M,E,X} = r_M^{\diamond} \mathrm{id} \quad (\mathfrak{r})$$

برقراری برابری‌های فوق با جابه‌جایی، بودن این نمودارهای هم‌ارزند:

$$\begin{array}{ccc}
[(M \diamond X) \diamond Y] \diamond Z & \xrightarrow{\Psi_{M \diamond X, Y, Z}} & (M \diamond X) \diamond (Y \otimes Z) \\
\downarrow \Psi_{M, X, Y} \text{oid} & & \searrow \Psi_{M, X, Y \otimes Z} \\
[M \diamond (X \otimes Y)] \diamond Z & \xrightarrow{\Psi_{M, (X \otimes Y), Z}} & M \diamond [(X \otimes Y) \otimes Z] \\
& & \nearrow \text{id} \circ \alpha_{X, Y, Z} \\
& & M \diamond [X \otimes (Y \otimes Z)]
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(M \diamond E) \diamond X & \xrightarrow{\Psi_{M, E, X}} & M \diamond (E \otimes X) \\
\downarrow r_M \text{oid} & & \downarrow \text{id} \circ \lambda_X \\
M \diamond X & \xrightarrow{\text{id} \circ M \circ X} & M \diamond X.
\end{array}$$

برای هر $\mathbb{A}$ -رسته راست $(D, \diamond, \Psi, r)$ و هر شیء $X \in \mathbb{A}$ یک خود-تابعگون مانند $M \mapsto M \diamond X$ به دست می آید.

به‌طور مشابه یک $\mathbb{A}$ -رسته چپ $(D, \diamond', \Psi', l)$ شامل یک رسته مانند D ، یک تابعگون دو متغیره $\diamond'$ $\mathbb{A} \times D \rightarrow D$: به‌همراه یکرختی‌های طبیعی

$$l: E \diamond' - \rightarrow \text{id} \quad \text{و} \quad \Psi': (- \otimes -) \diamond' - \rightarrow - \diamond' (-)$$

است به‌گونه‌ای که برای هر شیء M در D و اشیاء X, Y, Z در $\mathbb{A}$ داشته باشیم:

$$\Psi' X, Y, (Z \diamond' M) \circ \Psi' (X \otimes Y), Z, M = (\text{id}_X \diamond' \Psi' Y, Z, M) \circ \Psi' X, (Y \otimes Z), M \circ (a_{X, Y, Z} \diamond' \text{id}_M)$$

$$(\text{id}_X \diamond' M) \circ (\rho_X \diamond' \text{id}) = (\text{id} \diamond' l_M) \circ \Psi' X, E, M.$$

برای هر $\mathbb{A}$ -رسته چپ $(D, \diamond', \Psi', l)$ و هر شیء $X \in \mathbb{A}$ به‌راحتی می‌توان خود-تابعگون

$$X \diamond' - : D \rightarrow D, \quad M \mapsto X \diamond' M$$

را به‌دست آورد.

۴. شبه دو-جبرها: چهارتایی $(H, \Delta, \varepsilon, \phi)$ را یک شبه دو-جبر می‌نامیم اگر H یک k -جبر شرکت‌پذیر و یکدار و ϕ یک عضو وارون‌پذیر در $H \otimes H \otimes H$ ، به‌گونه‌ای باشد که هم-ضرب $\Delta: H \rightarrow H \otimes H$ و هم-یکه $\varepsilon: H \rightarrow k$ هم‌ریختی جبرها بوده است و برای هر عضو $h \in H$ داشته باشیم:

$$(\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(h) = h \otimes 1, \quad (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta(h) = 1 \otimes h, \quad (3)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(h) = \phi. (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta(h). \phi^{-1}, \quad (4)$$

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\phi)(\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\phi) = (1 \otimes \phi)(\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\phi)(\phi \otimes 1), \quad (5)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\phi) = 1 \otimes 1. \quad (6)$$

عضو ϕ را شرکت‌پذیر ساز درینفلد^۱ می‌نامیم. برابری (۳) همان شرط هم-یکه برای جبرهای هوف است. تساوی (۴) در واقع تعمیمی از شرط هم-شرکت‌پذیری H است که به‌کمک مزدوج‌گیری با عضو $\phi \in H \otimes H \otimes H$ بیان شده است. هم‌چنین برابری (۵) درواقع شرط ۳-هم دور روی ϕ است. مؤلفه‌های تانسوری ϕ را با حروف بزرگ و مؤلفه‌های تانسوری ϕ^{-1} را با حروف کوچک نشان می‌دهیم:

$$\phi = \sum X^1 \otimes X^2 \otimes X^3 \quad \text{و} \quad \phi^{-1} = \sum x^1 \otimes x^2 \otimes x^3$$

چنان‌که از نظریه جبرهای هوف می‌دانیم رسته (هم-) مدول‌ها روی یک دو-جبر یک رسته تکواره‌ای است. شرط شرکت‌پذیری در این رسته مشابه حالت کلاسیک تعریف می‌شود. برای رسته مدول‌ها روی یک شبه دو-جبر نیز با کمی تفاوت خاصیت مشابهی وجود دارد:

برای هر شبه دو جبر $(H, \Delta, \varepsilon, \phi)$ رسته‌های $M_{H \otimes H} M$ و $M_{H \otimes H} M$ به‌همراه ضرب تانسوری $k \otimes -$ رسته‌های تکواره‌ای هستند. با این وجود شرط شرکت‌پذیری برای H -مدول‌های $M, N, L \in {}_H M$ بدین‌صورت است:

$$a_{M, N, L} : (M \otimes_k N) \otimes_k L \rightarrow M \otimes_k (N \otimes_k L),$$

$$a_{M, N, L} ((m \otimes n) \otimes l) = \phi. (m \otimes (n \otimes l)).$$

در رسته M_H شرط شرکت‌پذیری برای مدول‌های راست $M, N, L \in M_H$ عبارت است از:

$$a'_{M, N, L} : (M \otimes_k N) \otimes_k L \rightarrow M \otimes_k (N \otimes_k L),$$

$$a'_{M, N, L} ((m \otimes n) \otimes l) = (m \otimes (n \otimes l)). \phi^{-1},$$

با ترکیب دو شرط شرکت پذیری در رسته‌های H -مدول‌های چپ و راست شرط شرکت پذیری برای (H, H) -دو-مدول‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$a''_{M,N,L} : (M \otimes_k N) \otimes_k L \rightarrow M \otimes_k (N \otimes_k L),$$

$$a''_{M,N,L}((m \otimes n) \otimes l) = \phi.(m \otimes (n \otimes l)).\phi^{-1}$$

۵. جبرهای شبه هوپف [۱۰] و [۱۴]: یک شبه-آنتی پود (S, α, β) برای یک شبه-دو-جبر H یک پاد-درون‌ریختی مانند $H \rightarrow S: H$ و اعضای $\alpha, \beta \in H$ را شامل می‌شود به گونه‌ای که برای هر عضو دلخواه $h \in H$ در این برابری‌ها صدق کنند:

$$\sum_h h_1 \beta S(h_2) = \varepsilon(h) \beta, \quad \sum_h S(h_1) \alpha h_2 = \varepsilon(h) \alpha,$$

$$\sum X^1 \beta S(X^2) \alpha X_3 = 1, \quad (\ast) \quad \sum S(X^1) \alpha X^2 \beta X^3 = 1,$$

یک جبر شبه-هوپف عبارت است از یک شبه-دو-جبر H به همراه یک شبه-آنتی پود (S, α, β) .

از تعریف شبه-آنتی پود و ویژگی‌های هم-یکه ε به سادگی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\varepsilon(\alpha) \varepsilon(\beta) = 1, \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon.$$

هنگامی که بخواهیم بر همه مشخصات یک جبر شبه-هوپف مانند H تاکید کنیم آن را به صورت $(H, \Delta, \varepsilon, \emptyset, S, \alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم.

برای هر جبر هوپف مانند H ، آنتی پود S یک پاد-درون‌ریختی هم-جبرهاست، یعنی

$$(S \otimes S) \circ \Delta^{\text{cop}} = \Delta \circ S.$$

که در آن برای هر $h \in H$ ، همان نمادگذاری سویدلر است و $\Delta^{\text{cop}}(h) = \sum_h h_1 \otimes h_2$ و $\Delta(h) = \sum_h h_2 \otimes h_1$.

$$h_2 \otimes (h) = h_1, \quad \Delta^{\text{cop}}(h) = \sum h_2 \otimes h_1.$$

همچنین در این حالت ارتباط بین آنتی پود و هم-ضرب Δ برای هر $h \in H$ از برابری (۹) پیروی می‌کند:

$$\sum_h h_1 \otimes h_2 S(h_3) = h \otimes 1, \quad (9)$$

(برای مثال می‌توان [۲۰، صفحه ۷۹] را مشاهده کرد).

اگر $(H, \Delta, \varepsilon, \emptyset, S, \alpha, \beta)$ یک جبر شبه-هوپف باشد، هم-ضرب Δ هم-شرکت‌پذیر نیست و (H, Δ, ε) دارای

ساختار هم-جبر نیست. با این حال برابری‌هایی شبیه برابری (۹) را می‌توان برای جبرهای شبه-هوپف نیز اثبات کرد.

برای این کار اف. هاوسر و اف. نیل در [۱۱] اعضای زیر از $H \otimes H$ را تعریف کردند.

$$p_L = \sum p_L^1 \otimes p_L^2 = \sum X^2 S^{-1}(X^1 \beta) \otimes X^3, \quad (10)$$

$$q_L = \sum q_L^1 \otimes q_L^2 = \sum S(X^1) \alpha X^2 \otimes X^3, \quad (11)$$

$$p_R = \sum p_R^1 \otimes p_R^2 = \sum X^1 \otimes X^2 \beta S(X^3), \quad (12)$$

$$q_R = \sum q_R^1 \otimes q_R^2 = \sum X^1 \otimes S^{-1}(\alpha X^3) X^2, \quad (13)$$

آنها با به کار بردن این اعضا و ویژگی‌های شبه-آنتی پود در [۱۱] شکل‌های تعمیم یافته‌ای از برابری (۹) برای

جبرهای شبه-هوپف را ارائه کردند [۴].

در [۹]، [۱۵] نشان داده شده است که رابطه ای مشابه رابطه الحاقی کلاسیک بین تابعگونی های Hom و تانسور در رسته $H \mathbb{M}$ را نیز می توان برای رسته تکواری $H \mathbb{M}$ شامل همه مدول های چپ روی جبر هوف H نیز بیان کرد. یکها و هم-یکه های این الحاقی ها به طور صوری همان یکها و هم-یکه ها در حالت کلاسیک هستند. در [۴] تعمیمی از این روابط الحاقی برای رسته مدول ها روی یک جبر شبه-هوف ارائه شده است. در این حالت تعمیم یافته اخیر، به دلیل نبود هم-شرکت پذیری هم-ضرب، یکها و هم-یکه ها با حالت کلاسیک تفاوت داشته و به ناوردهای جبر شبه-هوف H وابسته هستند.

چنان که در ۴ ذکر شد، رسته دو-مدول های $H \mathbb{M}_H$ روی یک شبه-دو جبر $(H, \Delta, \varepsilon, \emptyset)$ یک رسته تکواری بوده است و برای هر $M, N \in H \mathbb{M}_H$ داریم $M \otimes_k N \in H \mathbb{M}_H$ که ساختار دو-مدولی حاصل ضرب تانسوری به طور قطری از طریق هم-ضرب Δ تعریف می شود.

به علاوه اگر H یک جبر شبه-هوف با شبه-آنتی پود (S, α, β) باشد، آن گاه برای هر دو شیء $M, N \in H \mathbb{M}_H$ یک ساختار (H, H) -دو مدولی روی $Hom_k(M, N)$ داریم که به صورت (۱۴) تعریف می شود:

$$(h.f.h')(m) = \sum h_1 \cdot \left[f \left(S(h_2) \cdot m \cdot S^{-1}(h'_2) \right) \right] \cdot h'_1 \quad (14)$$

با پیروی از نمادگذاری [۳، ۴، ۱۰]، $Hom_k(M, N)$ با این ساختار دو-مدولی را با علامت ${}^s Hom_k^t(M, N)$ نشان می دهیم. بدین ترتیب رابطه الحاقی زیر بین تابعگونی های Hom و تانسور به دست می آید:

قضیه ۶. [۳، ۴، ۱۱]. فرض کنید H یک جبر شبه-هوف با شبه-آنتی پود (S, α, β) باشد و $M, N, V \in H \mathbb{M}_H$ در این صورت یک یکریختی طبیعی مانند

$$\begin{aligned} \varphi : {}_H Hom_H(M \otimes_k^b V, N) &\rightarrow {}_H Hom_H(M, {}^s Hom_k^t(V, N)), \\ f &\mapsto \{m \mapsto [v \mapsto f(p_R \cdot (m \otimes v) \cdot q_R)]\}, \end{aligned}$$

وجود دارد. وارون این یکریختی نگاشت φ' با این ضابطه است:

$$g \mapsto \{m \otimes v \mapsto \sum q_R^1 \cdot [g(m) (S(q_R^2) \cdot v \cdot S^{-1}(p_R^2))] \cdot p_R^1\}$$

که در آن $q_R = \sum q_R^1 \otimes q_R^2$ و $p_R = \sum p_R^1 \otimes p_R^2$ در (۱۲) و (۱۳) تعریف شده اند. این بدان معنا است که زوج زیر از تابعگونی ها

$$- \otimes_k^b V : {}_H \mathbb{M}_H \rightarrow {}_H \mathbb{M}_H, \quad {}^s Hom_k^t(V, -) : {}_H \mathbb{M}_H \rightarrow {}_H \mathbb{M}_H,$$

یک زوج الحاقی تشکیل داده و یک و هم-یکه این زوج الحاقی در رسته $H \mathbb{M}_H$ بدین صورت داده می شوند:

$$\begin{aligned} \eta_M : M &\rightarrow {}^s Hom_k^t(V, M \otimes_k V), \quad m \mapsto [v \mapsto p_R \cdot (m \otimes v) \cdot q_R], \\ \varepsilon_M : {}^s Hom_k^t(V, M) \otimes V &\rightarrow M, \quad f \otimes v \mapsto \sum q_R^1 \cdot [f(S(q_R^2) \cdot v \cdot S^{-1}(p_R^2))] \cdot p_R^1. \end{aligned}$$

چنان که در [۴، ۱۰، ۳ و ۱۱، ۳] می توان دید، برای هر زوج $M, N \in {}_H \mathbb{M}_H$ به دو روش می توان k -مدول $Hom_k(M, N)$ را به یک ساختار H -مدولی چپ یا راست مجهز کرد. بنابراین علاوه بر ساختار داده شده در قضیه ۶. برای هر دو (H, H) -دو-مدول M و N می توان روی $Hom_k(M, N)$ ساختار (H, H) -دو-مدولی دیگری به صورت (۱۵) تعریف کرد:

$$(h.f.h')(m) := \sum h_2 \cdot [f(S^{-1}(h_1) \cdot m \cdot S(h'_1))] \cdot h'_2, \quad (15)$$

که در آن $h, h' \in H$ ، $m \in M$ و $f \in \text{Hom}_k(M, N)$ در این حالت k -مدول $\text{Hom}_k(M, N)$ با این ساختار را با علامت ${}^t\text{Hom}_k^s(M, N)$ نشان داده و در این حالت داریم:

قضیه ۷. [۴، ۳.۱۲]. فرض کنید H یک جبر شبه-هوف با شبه-آنتی پود (S, α, β) باشد و $M, N, V \in {}_H\mathbb{M}_H$ در این صورت یک یکریختی طبیعی

$${}_H\text{Hom}_H(V \otimes_k^b M, N) \xrightarrow{\psi} {}_H\text{Hom}_H(M, {}^t\text{Hom}_k^s(V, N)).$$

$$f \mapsto \{m \mapsto [v \mapsto f(p_L \cdot (v \otimes m) \cdot q_L)]\},$$

وجود داشته و وارون آن ψ' با این ضابطه است:

$$g \mapsto \{v \otimes m \mapsto \sum q_L^2 \cdot [g(m)(S^{-1}(q_L^1) \cdot v \cdot S(p_L^1))] \cdot p_L^2\},$$

که در آن $p_L = \sum p_L^1 \otimes p_L^2$ و $q_L = \sum q_L^1 \otimes q_L^2$ در (۱۰) و (۱۱) تعریف شده‌اند. این بدان معنا است که زوج

$$V \otimes^b - : {}_H\mathbb{M}_H \rightarrow {}_H\mathbb{M}_H, \quad {}^t\text{Hom}^s(V, -) : {}_H\mathbb{M}_H \xrightarrow{\sim} {}_H\mathbb{M}_H,$$

از تابعگون‌ها یک زوج الحاقی است و یک و هم-یکه این الحاقی در رسته ${}_H\mathbb{M}_H$ بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\eta_M : M \rightarrow {}^t\text{Hom}_k^s(V, V \otimes_k M), \quad m \mapsto [v \mapsto p_L \cdot (v \otimes m) \cdot q_L],$$

$$\varepsilon_M : V \otimes {}^t\text{Hom}_k^s(V, M) \rightarrow M, \quad v \otimes g \mapsto \sum q_L^2 \cdot [g(S^{-1}(q_L^1) \cdot v \cdot S(p_L^1))] \cdot p_L^2$$

روی یک-شبه-دو-جبر H ، یک جبر H -مدولی چپ (راست) به صورت یک جبر در رسته تکوارهای H -مدول‌های چپ (راست) تعریف می‌شود. با توجه به وجود نداشتن خاصیت هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب در شبه-دو-جبر H ، مشابه این تعریف (به زبان رسته‌ای) برای معرفی جبرهای هم-مدولی امکان‌پذیر نیست. اف. هاوسر و اف. نیل در [۱۱] تعریفی صوری از مفهوم جبر هم-مدولی روی شبه-دو-جبر H ارائه دادند که آن‌را می‌توان تعمیمی از مفهوم شبه-دو-جبر تلقی کرد:

۸. **جبرهای هم-مدولی:** فرض کنید $(H, \Delta, \varepsilon, \emptyset)$ یک شبه-دو-جبر باشد. جبر شرکت‌پذیر و یکدار B را یک **جبر هم-مدولی چپ** روی H می‌نامند اگر یک هم‌ریختی k -جبرها مانند $\lambda : B \rightarrow H \otimes B$ و عضوی وارون‌پذیر مانند $\phi_\lambda \in H \otimes H \otimes B$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که:

$$(id \otimes \lambda)(\lambda(b)) \cdot \phi_\lambda = \phi_\lambda \cdot (\Delta \otimes id)(\lambda(b)) \quad \forall b \in B, \quad (L1)$$

$$(1_H \otimes \phi_\lambda) \cdot (id \otimes \Delta \otimes id)(\phi_\lambda) \cdot (\phi \otimes 1_B) = (id \otimes id \otimes \lambda)(\phi_\lambda) \cdot (\Delta \otimes id \otimes id)(\phi_\lambda), \quad (L2)$$

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \lambda = id_B, \quad (L3)$$

$$(id \otimes \varepsilon \otimes id)(\phi_\lambda) = 1_H \otimes 1_B. \quad (L4)$$

برای هر جبر هم-مدولی چپ مانند $(B, \lambda, \phi_\lambda)$ روی یک شبه-دو-جبر H داریم:

$$(\varepsilon \otimes id \otimes id)(\phi_\lambda) = 1_H \otimes 1_B$$

به‌طور مشابه یک جبر هم-مدولی راست روی H عبارت است از یک جبر شرکت‌پذیر و یک‌دار مانند A ، به‌همراه یک هم‌ریختی k -جبرها مانند $\rho: A \rightarrow A \otimes H$ و عضوی وارون‌پذیر مانند $\phi_\rho \in A \otimes H \otimes H$ به‌گونه‌ای که در این شرایط صدق کنند:

$$\phi_\rho \cdot (\rho \otimes id_H) \circ \rho(a) = (id_H \otimes \Delta) \circ \rho(a) \cdot \phi_\rho \quad \forall a \in A. \quad (R1)$$

$$(1_A \otimes \phi) \cdot (id \otimes \Delta \otimes id)(\phi_\rho) \cdot (\phi_\rho \otimes 1_H) = (id \otimes id \otimes \Delta)(\phi_\rho) \cdot (\rho \otimes id \otimes id)(\phi_\rho) \quad (R2)$$

$$(id_A \otimes \varepsilon) \circ \rho = id_A \quad (R3)$$

$$(id_A \otimes \varepsilon \otimes id_H)(\phi_\rho) = 1_A \otimes 1_H. \quad (R4)$$

اگر (A, ρ, ϕ_ρ) یک جبر هم-مدولی راست روی شبه-دو-جبر H باشد، آن‌گاه با استفاده از ویژگی‌های مذکور داریم:

$$(id \otimes id \otimes \varepsilon)(\phi_\rho) = 1_A \otimes 1_H$$

به‌طور مشابه با نمادهای به‌کار رفته برای شرکت‌پذیرساز $\emptyset$ از یک شبه-دو-جبر H ، برای نمایش مؤلفه‌های $(\phi_\lambda) \phi_\rho$ از حروف بزرگ و برای نمایش مؤلفه‌های $(\phi_\lambda^{-1}) \phi_\rho^{-1}$ از حروف کوچک استفاده می‌کنیم. به‌عبارت دیگر داریم:

$$\phi_\rho = \sum X_\rho^1 \otimes X_\rho^2 \otimes X_\rho^3, \quad \phi_\rho^{-1} = \sum x_\rho^1 \otimes x_\rho^2 \otimes x_\rho^3,$$

$$\phi_\lambda = \sum X_\lambda^1 \otimes X_\lambda^2 \otimes X_\lambda^3, \quad \phi_\lambda^{-1} = \sum x_\lambda^1 \otimes x_\lambda^2 \otimes x_\lambda^3,$$

برای هر جبر هم-مدولی راست روی یک شبه-دو-جبر H ، اف. هاوسر و اف. نیل در [۱۱] اعضای $p_\rho, q_\rho \in A \otimes H$ را بدین‌صورت تعریف کردند:

$$p_\rho = \sum p_\rho^1 \otimes p_\rho^2 = \sum x_\rho^1 \otimes x_\rho^2 \beta S(x_\rho^3) \quad (۱۶)$$

$$q_\rho = \sum q_\rho^1 \otimes q_\rho^2 = \sum X_\rho^1 \otimes S^{-1}(\alpha X_\rho^3) X_\rho^2 \quad (۱۷)$$

با توجه به لم ۹، ۱ از [۱۱]، برای هر عضو $a \in A$ داریم:

$$\sum \rho(a(0)) \cdot p_\rho \cdot [1_A \otimes S(a(1))] = p_\rho \cdot [a \otimes 1_H], \quad (۱۸)$$

$$\sum [1_A \otimes S^{-1}(a(1))] \cdot q_\rho \cdot \rho(a(0)) = [a \otimes 1_H] \cdot q_\rho \quad (۱۹)$$

هم‌چنین

$$\sum \rho(q_\rho^1) \cdot p_\rho \cdot [1_A \otimes S(q_\rho^2)] = 1_A \otimes 1_H, \quad (۲۰)$$

$$\sum [1_A \otimes S^{-1}(p_\rho^2)] \cdot q_\rho \cdot \rho(p_\rho^1) = 1_A \otimes 1_H \quad (۲۱)$$

به‌علاوه برای هر جبر هم-مدولی چپ روی شبه-دو-جبر H مانند B ، اعضای $p_\lambda, q_\lambda \in H \otimes B$ به‌صورت (۲۲) و

(۲۳) تعریف می‌شوند:

$$p_\lambda = \sum p_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2 = \sum X_\lambda^2 S^{-1}(X_\lambda^2 \beta) \otimes X_\lambda^3, \quad (۲۲)$$

$$q_\lambda = \sum q_\lambda^1 \otimes q_\lambda^2 = \sum S(x_\lambda^1) \alpha x_\lambda^2 \otimes x_\lambda^3 \quad (۲۳)$$

برای هر عضو $b \in B$ این برابری‌های برقرارند:

$$\sum \lambda(b(0)) \cdot p_\lambda \cdot [S^{-1}(b(-1)) \otimes 1_B] = p_\lambda \cdot [1_H \otimes b], \quad (24)$$

$$\sum [S(b(-1)) \otimes 1_B] \cdot q_\lambda \cdot \lambda(b(0)) = [1_H \otimes b] \cdot q_\lambda. \quad (25)$$

هم‌چنین

$$\sum [S(b(-1)) \otimes 1_B] \cdot q_\lambda \cdot \lambda(b(0)) = [1_H \otimes b] \cdot q_\lambda. \quad (26)$$

و نیز

$$\sum [S(p_\lambda^1) \otimes 1_B] \cdot q_\lambda \cdot \lambda(p_\lambda^2) = 1_H \otimes 1_B. \quad (27)$$

رابطه بین تابع‌های Hom و تانسور برای جبرهای هم-مدولی

فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف و $(B, \lambda, \emptyset_\lambda)$ یک جبر هم-مدولی چپ روی H باشد. در $[\Delta]$ ذکر شد که هم عمل چپ $\lambda: B \rightarrow H \otimes B$ (با ضابطه $\lambda(b) = \sum b(-1) \otimes b(0)$) یک عمل چپ از رسته تکوارهای ${}_H \mathbb{M}$ روی رسته ${}_B \mathbb{M}$ شامل B -مدول‌های چپ بدین‌صورت معرفی می‌کند:

$$-\diamond -: {}_H \mathbb{M} \times {}_B \mathbb{M} \rightarrow {}_B \mathbb{M}, \quad (V, N) \rightarrow V \diamond N := V \otimes N$$

که در آن V یک H -مدول چپ، N یک B -مدول چپ و ساختار B -مدولی $V \otimes N$ به‌ازای هر $v \in V$ ، $b \in B$ و $n \in N$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$b \cdot (v \otimes n) = \sum b(-1) \cdot v \otimes b(0) \cdot n = \lambda(b) \cdot (v \otimes n),$$

حاصل ضرب تانسوری $V \otimes_k N$ به‌همراه ساختار B -مدولی مذکور را با علامت $V \otimes_k^{b'} N$ نشان می‌دهیم.

با این روش برای هر H -مدول چپ V ، خود تابع‌گون

$$V \otimes -: {}_B \mathbb{M} \rightarrow {}_B \mathbb{M}, \quad N \mapsto V \otimes_k^{b'} N$$

به‌دست می‌آید.

هم‌چنین یک ساختار B -مدولی چپ روی $Hom_k(V, N)$ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$(b \cdot f)(v) = \sum b(0) \cdot f(S^{-1}(b(-1)) \cdot v),$$

که در آن $b \in B$ ، $v \in V$ و $f \in Hom_k(V, N)$.

در این صورت k -مدول $Hom_k(V, N)$ با ساختار B -مدولی چپ مذکور را با علامت ${}^t Hom_k(V, N)$

نشان می‌دهیم.

قضیه ۹. [۵. قضیه ۲.۳]. فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه آنتی-پود (S, α, β) و $(B, \lambda, \emptyset_\lambda)$ یک جبر

هم-مدولی چپ باشد، $M, N \in {}_B \mathbb{M}$ ، $V \in {}_H \mathbb{M}$ در این صورت یک یک‌ریختی طبیعی

$$\theta: {}_B Hom(V \otimes_k^{b'} M, N) \rightarrow {}_B Hom(M, {}^t Hom_k(V, N)),$$

$$f \mapsto \{m \mapsto \{v \mapsto f(p_\lambda \cdot (v \otimes m))\}\},$$

وجود دارد که ضابطه تابع وارون θ' از آن بدین‌صورت است:

$$g \mapsto \{v \otimes m \mapsto \sum q_\lambda^2 \cdot [g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1) \cdot v)]\}$$

که $q_\lambda = \sum q_\lambda^1 \otimes q_\lambda^2$ و $p_\lambda = \sum p_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2$ اعضای از $H \otimes B$ هستند که در (۲۲) و (۲۳) تعریف شده‌اند.

به عبارت دیگر زوج

$$V \otimes_k^b - : {}_B \mathbb{M} \rightarrow {}_B \mathbb{M}, \quad {}^t \text{Hom}_k(V, -) : {}_B \mathbb{M} \rightarrow {}_B \mathbb{M}$$

یک زوج الحاقی از تابعگون‌ها است و یک و هم-یکه این زوج بدین صورت به دست می‌آیند:

$$\eta'_M : M \rightarrow {}^t \text{Hom}_k(V, V \otimes_k M), \quad m \mapsto [\nu \mapsto p_\lambda.(\nu \otimes m)],$$

$$\varepsilon'_M : V \otimes {}^t \text{Hom}_k(V, M) \rightarrow M, \quad \nu \otimes f \mapsto \sum q_\lambda^2 [f(S^{-1}(q_\lambda^1).\nu)].$$

برهان. اثبات این حکم در حالت کلی‌تر (برای دو-مدول‌ها) در قضیه ۱۰ می‌آید.

برای یک جبر هم-مدولی چپ $(B, \lambda, \phi_\lambda)$ روی شبه-دو-جبر H هم-عمل چپ $\lambda: B \rightarrow H \otimes B$ یک عمل چپ

از رسته تکوارهای ${}_H \mathbb{M}_B$ روی رسته ${}_B \mathbb{M}_B$ شامل همه (B, B) -دو-مدول‌ها بدین صورت معرفی می‌کند:

$$-\diamond -: {}_H \mathbb{M}_H \times {}_B \mathbb{M}_B \rightarrow {}_B \mathbb{M}_B, \quad (V, N) \mapsto V \diamond N := V \otimes^{b'} N,$$

که $b, a \in B, W \in$ و ساختار (B, B) -دو-مدولی $V \otimes^{b'} N$ را برای هر $b, a \in B, W \in$ و $n \in N$ بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$b.(\nu \otimes n).a := \sum b_{(-1)}. \nu. a_{(-1)} \otimes b_{(0)}. n. a_{(0)} = \lambda(b).(\nu \otimes n). \lambda(a),$$

k -مدول $V \otimes_k^{b'} N$ را با ساختار (B, B) -دو مدولی مذکور را با علامت $V \otimes_k^{b'} N$ نشان می‌دهیم. از این

طریق وجود هر (H, H) -دو مدول مانند V به وجود یک خود-تابعگون

$$V \otimes_k^{b'} -: {}_B \mathbb{M}_B \rightarrow {}_B \mathbb{M}_B, \quad N \mapsto V \otimes_k^{b'} N$$

منجر می‌شود. همچنین اگر H یک شبه-دو جبر با شبه آنتی پود (S, α, β) باشد، یک ساختار (B, B) -دو-مدولی

روی $\text{Hom}_k(V, N)$ بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$(b.f.a)(\nu) = \sum b_{(0)}. [f(S^{-1}(b_{(-1)}).\nu.S(a_{(-1)}))] . a_{(0)}$$

که $b, a \in B, \nu \in V$ و $f \in \text{Hom}_k(V, N)$ در این صورت k -مدول $\text{Hom}_k(V, N)$ به همراه ساختار

(B, B) -دو-مدولی مذکور را با علامت ${}^t \text{Hom}_k(V, N)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰. فرض کنید H یک جبر شبه-هوف با شبه-آنتی پود (S, α, β) و $(B, \lambda, \phi_\lambda)$ یک جبر هم-مدولی چپ

باشد، $V \in {}_H \mathbb{M}_H$ و $M, N \in {}_B \mathbb{M}_B$ ، در این صورت نگاشت

$$\theta: {}_B \text{Hom}_B(V \otimes_k^{b'}, M, N) \rightarrow {}_B \text{Hom}_B(M, {}^t \text{Hom}_k^S(V, N)),$$

$$f \mapsto \{m \mapsto [\nu \mapsto f(p_\lambda.(\nu \otimes m).q_\lambda)]\}$$

یک یکرختی است که ضابطه تابع وارون θ' از آن بدین صورت است:

$$g \mapsto \{\nu \otimes m \mapsto \sum q_\lambda^2 [g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1).\nu.S(p_\lambda^1))] p_\lambda^2\}$$

که $p_\lambda = \sum p_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2$ و $q_\lambda = \sum q_\lambda^1 \otimes q_\lambda^2$ در (۲۲) و (۲۳) تعریف شده‌اند.

به عبارت دیگر زوج

$$V \otimes_k^{b'} -: {}_B \mathbb{M}_B \rightarrow {}_B \mathbb{M}_B, \quad {}^t \text{Hom}_k^S(V, -) : {}_B \mathbb{M}_B \rightarrow {}_B \mathbb{M}_B$$

یک زوج الحاقی از تابعگون‌ها است که یک به صورت

$$\eta'_M : M \rightarrow {}^t \text{Hom}_k^S(V, V \otimes_k M), \quad m \mapsto [\nu \mapsto p_\lambda.(\nu \otimes m).q_\lambda]$$

و هم-یکه آن بدین صورت به دست می‌آید.

$\varepsilon'_M : V \otimes {}^t \text{Hom}_k(V, M) \rightarrow M$, $v \otimes f \mapsto \sum q_\lambda^2 [f(S^{-1}(p_\lambda^1).v.S(p_\lambda^1))] . p_\lambda^2$
برهان. برای هر $f \in {}_B \text{Hom}_B(V \otimes_k^b M, N)$ نشان می‌دهیم که $\theta(f)$ یک نگاشت (B, B) -دو خطی است. برای هر $v \in V$ و $m \in M$ ، $b, a \in B$ داریم:

$$\begin{aligned} [\theta(f)(b.m.a)](v) &= f(p_\lambda.(v \otimes b.m.a).q_\lambda) \\ &= f(\sum p_\lambda^1.v.q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2.b.m.a.q_\lambda^2) \\ &= f(p_\lambda.(1_H \otimes b).(v \otimes m).(1_H \otimes a).q_\lambda) \end{aligned}$$

بنا به (۲۴) و (۲۵)،

$$\begin{aligned} &= f(\sum \lambda(b_{(0)}).p_\lambda.(S^{-1}(b_{(-1)} \otimes 1_B).(v \otimes m).(S(a_{(-1)}) \otimes 1_B).q_\lambda.\lambda(a_{(0)}))) \\ &\text{چون } f \text{ دو خطی است،} \end{aligned}$$

$$= \sum b_{(0)}.[f(p_\lambda^1 S^{-1}(b_{(-1)}).v.S(a_{(-1)} q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2.m.q_\lambda^2)].a_{(0)}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} [b.(\theta(f)(m)).a](v) &= \sum b_{(0)}.[(\theta(f)(m))(S^{-1}(b_{(-1)}).v.S(a_{(-1)}))].a_{(0)} \\ &= \sum b_{(0)}.f(p_\lambda^1 S^{-1}(b_{(-1)}).v.S(a_{(-1)} q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2.m.q_\lambda^2).a_{(0)}) \end{aligned}$$

بدین ترتیب (B, B) -دو خطی بودن $\theta(f)$ ثابت می‌شود.

بالعکس برای هر $v \in V$ ، $m \in M$ ، $b, a \in B$ و هر $g \in {}_B \text{Hom}_B(M, {}^t \text{Hom}_k(V, N))$ داریم:

$$\begin{aligned} [\theta'(g)](b.(v \otimes m).a) &= [\theta'(g)](\sum b_{(-1)}.v.a_{(-1)} \otimes b_{(0)}.m.a_{(0)}) \\ &= \sum q_\lambda^2.[g(b_{(0)}.m.a_{(0)})(S^{-1}(q_\lambda^1)b_{(-1)}.v.a_{(-1)}S(p_\lambda^1))].p_\lambda^2 \\ &= \sum q_\lambda^2.\{[b_{(0)}.g(m)).a_{(0)}](S^{-1}(q_\lambda^1)b_{(-1)}.v.a_{(-1)}S(p_\lambda^1))\}.p_\lambda^2 \\ &= \sum q_\lambda^2.\{b_{(0,0)}.[g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1)b_{(0,-1)}b_{(-1)}.v.a_{(-1)}S(a_{(0,-1)}p_\lambda^1))].a_{(0,0)}\}.p_\lambda^2 \\ &= \sum b.\{q_\lambda^2.[g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1).v.S(p_\lambda^1))].p_\lambda^2\}.a \\ &= b.\{[\theta'(g)](v \otimes m)\}.a. \end{aligned}$$

بنابراین $\theta'(g)$ نیز (B, B) -دو خطی است.

حال نشان می‌دهیم که θ و θ' وارون یکدیگرند: برای هر $v \in V$ ، $m \in M$ و هر $f \in {}_B \text{Hom}_B(M \otimes V, N)$ داریم:

$$\begin{aligned} [(\theta' \circ \theta)(f)](v \otimes m) &= \sum q_\lambda^2.[(\theta(f)(m))(S^{-1}(q_\lambda^1).v.S(p_\lambda^1))].p_\lambda^2 \\ &= \sum q_\lambda^2.[f(p_\lambda^1 S^{-1}(q_\lambda^1).v.S(p_\lambda^1) q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2.m.q_\lambda^2)].p_\lambda^2 \\ &= \sum f(\lambda(q_\lambda^2).p_\lambda.(S^{-1}(q_\lambda^1) \otimes 1_B).(v \otimes m).(S(p_\lambda^1) \otimes 1_B).q_\lambda.\lambda(p_\lambda^2)) \\ &= \sum f((1_H \otimes 1_B).(v \otimes m).(1_H \otimes 1_B)) = f(v \otimes m). \end{aligned}$$

از طرف دیگر برای هر $v \in V$ ، $m \in M$ و هر $g \in {}_B \text{Hom}_B(M, {}^t \text{Hom}_k(V, N))$ داریم:

$$[(\theta \circ \theta')(g)](m)(v) = \theta'(g)(p_\lambda.(v \otimes m).q_\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \theta'(g)(\sum p_{\lambda}^1 \cdot v \cdot q_{\lambda}^1 \otimes p_{\lambda}^2 \cdot m \cdot q_{\lambda}^2) \\
&= \sum q_{\lambda}^2 \cdot [g(p_{\lambda}^2 \cdot m \cdot q_{\lambda}^2)(S^{-1}(q_{\lambda}^1) p_{\lambda}^1 \cdot v \cdot q_{\lambda}^1 S(p_{\lambda}^1))] \cdot p_{\lambda}^2 \\
&= \sum q_{\lambda}^2 \cdot \{[p_{\lambda}^2 \cdot g(m) \cdot q_{\lambda}^2](S^{-1}(q_{\lambda}^1) p_{\lambda}^1 \cdot v \cdot q_{\lambda}^1 S(p_{\lambda}^1))\} \cdot p_{\lambda}^2 \\
&= \sum q_{\lambda}^2 (p_{\lambda}^2)_{(0)} \cdot \{g(m)(S^{-1}(q_{\lambda}^1(p_{\lambda}^2)_{(-1)}) p_{\lambda}^1 \cdot v \cdot q_{\lambda}^1 S((q_{\lambda}^2)_{(-1)} p_{\lambda}^1))\} \cdot (q_{\lambda}^2)_{(0)} p_{\lambda}^2 \\
(2.26), (2.27) &= g(m)(v)
\end{aligned}$$

بنابراین θ یک‌ریختی است و نگاشت وارون آن θ' است.

حال فرض کنید A یک جبر هم-مدولی راست روی شبه-دو-جبر H باشد. رسته $\mathbb{M}_A$ شامل همه A -مدول‌های راست یک رسته تکواریه ای نیست. با این حال هم-عمل راست

$$\rho: A \rightarrow A \otimes H, \quad a \mapsto \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)}$$

یک عمل راست از رسته تکواریه ای $\mathbb{M}_H$ روی رسته $\mathbb{M}_A$ به شکل زیر معرفی می‌کند:

که ساختار A -مدولی راست $N \otimes_k V$ برای اعضای دلخواه $a \in A, v \in V$ و $n \in N$ بدین صورت است:

$$(n \otimes v) \cdot a = \sum n \cdot a_{(0)} \otimes v \cdot a_{(1)} = (n \otimes v) \cdot \rho(a).$$

در این صورت A -مدول $N \otimes_k V$ با ساختار A -مدولی مذکور را با علامت $N \otimes_k^{b'} V$ نشان می‌دهیم. یک‌ریختی طبیعی

$$(- \diamond -) \diamond - \xrightarrow{\psi} - \diamond (- \otimes -)$$

برای H -مدول‌های راست $V, W \in \mathbb{M}_H$ و A -مدول راست N و بازای اعضای $v \in V, w \in W$ و $n \in N$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\Psi_{N, V, W}: (N \diamond V) \diamond W \rightarrow N \diamond (V \otimes W), \quad (n \otimes v) \otimes w \mapsto [n \otimes (v \otimes w)] \cdot \phi_p^{-1},$$

برابری

$$(\text{id}_{N \diamond V, W, Z}) \circ \Psi_{N, V \otimes W, Z} \circ (\Psi_{N, V, W \diamond Z}) = \Psi_{N, V, W \otimes Z} \circ \Psi_{N \diamond V, W, Z},$$

نتیجه مستقیم برابری (R2) در تعریف جبر هم-مدولی راست است.

از این طریق برای هر H -مدول راست مانند V یک خود-تابعگون

$$- \otimes_k^{b'} V: \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A, \quad N \mapsto N \otimes_k^{b'} V$$

به دست می‌آید.

حال فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه آنتی پود (S, α, β) باشد. یک ساختار A -مدولی راست برای $\text{Hom}_k(V, N)$ بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$(f \cdot a)(v) = \sum f(v \cdot S^{-1}(a_{(1)})) \cdot a_{(0)},$$

که $a \in A, v \in V$ و $f \in \text{Hom}_k(V, N)$ در این صورت A -مدولی راست مذکور را

با علامت $\text{Hom}_k^t(V, N)$ نشان می‌دهیم.

با روندی مشابه با برهان قضیه ۱۰ می‌توان ثابت کرد که:

قضیه ۱۱. فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه آنتی پود (S, α, β) و (A, ρ, ϕ_ρ) یک جبر هم-مدولی راست

روی H باشد. به ازای هر $V \in \mathbb{M}_H$ و $M, N \in \mathbb{M}_A$ یک‌ریختی طبیعی

$$Hom_A(M \otimes_k^b V, N) \xrightarrow{\psi} Hom_A(M, Hom_k^t(V, N)),$$

$$f \mapsto \left\{ m \mapsto \left[v \mapsto f((m \otimes v).q_\rho) \right] \right\}$$

وجود دارد و ضابطه نگاشت وارون ψ' از آن بدین صورت است:

$$g \mapsto \left\{ (m \otimes v) \mapsto g(m) \left(v.S^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ p_\rho \end{pmatrix} \right) \right\}. p_\rho^1$$

که $p_\rho = \sum p_\rho^1 \otimes p_\rho^2$ و $q_\rho = \sum q_\rho^1 \otimes q_\rho^2$ از اعضای $A \otimes H$ هستند که در (۱۶) و (۱۷) تعریف شده‌اند. به عبارت دیگر زوج

$$- \otimes_k^b V : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A, \quad Hom_k^t(V, -) : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A$$

یک زوج الحاقی از خود-تابعگون‌ها است. یک و هم-یکه این زوج الحاقی در رسته $\mathbb{M}_A$ بدین صورت داده می‌شوند:

$$\eta_M : M \rightarrow Hom_k^t(V, M \otimes_k V), \quad m \mapsto \left[v \mapsto (m \otimes v).q_\rho \right]$$

$$\varepsilon_M : Hom_k^t(V, M) \otimes V \rightarrow M, \quad (f \otimes v) \mapsto \sum f(v.S^{-1}(p_\rho^2)) \cdot p_\rho^1.$$

برای هر شبه-دو-جبر H ، می‌دانیم که ${}_H\mathbb{M}_H$ رسته‌ای تکوارهای است. فرض کنید (A, ρ, ϕ_ρ) یک جبر هم-مدولی راست روی H باشد. در این صورت برای هر (A, A) -دو-مدول $N \in {}_A\mathbb{M}_A$ و هر (H, H) -دو-مدول ${}_H\mathbb{M}_H$ $V \in N \otimes_k V$ ضرب تانسوری دوباره یک (A, A) -دو-مدول بوده است و ساختار دو-مدولی آن بدین صورت تعریف می‌شود:

$$b.(n \otimes v).a = \sum b_{(\cdot)} \cdot n.a_{(\cdot)} \otimes b_{(\cdot)} \cdot v.a_{(\cdot)}$$

هم‌چنین رسته تکوارهای ${}_H\mathbb{M}_H$ از راست روی رسته ${}_A\mathbb{M}_A$ بدین صورت عمل می‌کند:

$$-\diamond -: {}_A\mathbb{M}_A \times {}_H\mathbb{M}_H \rightarrow {}_A\mathbb{M}_A, \quad (N, V) \mapsto N \otimes_k V.$$

از این طریق برای هر (H, H) -دو-مدول V ، خود-تابعگون

$$- \otimes_k V : {}_A\mathbb{M}_A \rightarrow {}_A\mathbb{M}_A, \quad N \mapsto N \otimes_k V$$

به دست می‌آید.

هم‌چنین می‌توان ساختاری (A, A) -دو-مدولی روی $Hom_k(V, N)$ بدین صورت تعریف کرد:

$$(b.f.a)(v) = \sum b_{(\cdot)} \cdot \left[f(S(b_{(\cdot)}) \cdot v.S^{-1}(a_{(\cdot)})) \right] \cdot a_{(\cdot)}$$

که $f \in Hom_k(V, N)$ و $v \in V, a, b \in A$

حاصل ضرب تانسوری $N \otimes_k V$ به همراه ساختار (A, A) -دو-مدولی داده شده در بالا را با علامت $N \otimes_k^b V$

نشان می‌دهیم. هم‌چنین k -مدول $Hom_k(V, N)$ به انضمام ساختار (A, A) -دو-مدولی داده شده در بالا را با علامت $Hom_k(V, N)$ نشان می‌دهیم.

با روندی مشابه با آنچه در برهان قضیه ۱۰ مشاهده کردیم، می‌توان ثابت کرد که:

قضیه ۱۲. فرض کنید H یک جبر شبه-هوف با شبه-آنتی‌پود (S, α, β) و (A, ρ, ϕ_ρ) یک جبر هم-مدولی راست روی H باشد. برای هر $V \in {}_H\mathbb{M}_H$ و هر $M, N \in {}_A\mathbb{M}_A$ یک‌ریختی طبیعی

$${}_A \text{Hom}_A(M \otimes_k^{b'} V, N) \xrightarrow{\psi} {}_A \text{Hom}_A(M, {}_A \text{Hom}_k^{s', t'}(V, N)),$$

$$f \mapsto \{m \mapsto [v \mapsto \sum f(p_\rho \cdot (m \otimes v) \cdot q_\rho)]\},$$

وجود دارد و ضابطه نگاشت وارون Ψ' از آن بدین صورت است:

$$g \mapsto \left\{ m \otimes v \mapsto \sum q_\rho^1 \cdot \left[g(m)(S(q_\rho^2) \cdot v \cdot S^{-1}(p_\rho^2)) \right] \cdot p_\rho^1 \right\},$$

که $p_\rho = \sum p_\rho^1 \otimes p_\rho^2$ و $q_\rho = \sum q_\rho^1 \otimes q_\rho^2$ از $A \otimes H$ هستند که در (۱۶) و (۱۷) تعریف شده اند. این بدان معنا است که زوج

$$- \otimes_k^{b'} V : {}_A \mathbb{M}_A \rightarrow {}_A \mathbb{M}_A, \quad {}_A \text{Hom}_k^{s', t'}(V, -) : {}_A \mathbb{M}_A \rightarrow {}_A \mathbb{M}_A,$$

یک زوج الحاقی از خود-تابعگونی های رسته ${}_A \mathbb{M}_A$ است. یک و هم-یکه این زوج به ترتیب عبارتند از:

$$\eta_M : M \rightarrow {}_A \text{Hom}_k^{s', t'}(V, M \otimes V), \quad m \mapsto [v \mapsto [p_\rho \cdot (m \otimes v) \cdot q_\rho]],$$

$$\varepsilon_M : {}_A \text{Hom}_k^{s', t'}(V, M) \otimes V \rightarrow M, \quad f \otimes v \mapsto \sum q_\rho^1 \cdot \left[f(S(q_\rho^2) \cdot v \cdot S^{-1}(p_\rho^2)) \right] \cdot p_\rho^1.$$

سؤال باز: فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف، $(\beta, \lambda, \phi_\lambda)$ یک جبر هم-مدولی چپ و (A, ρ, ϕ_ρ) یک جبر هم-مدولی راست روی H باشند:

۱. آیا یک عمل از رسته تکوارهای ${}_H \mathbb{M}_H$ روی رسته ${}_B \mathbb{M}_A$ یا رسته ${}_A \mathbb{M}_B$ می توان تعریف کرد؟

۲. آیا خود-تابعگونی های تانسور و Hom روی رسته ${}_B \mathbb{M}_A$ یا رسته ${}_A \mathbb{M}_B$ می توان تعریف کرد؟ در این صورت آیا روابط الحاقی بین چنین تابعگونی هایی قابل تعریف است؟

سپاس گذاری

برخود لازم می دانم که مراتب سپاس صمیمانه خود را از داوران محترم که با ارزیابی و بررسی دقیق و پیشنهادات ارزنده خود موجب بهبود کیفیت این مقاله شدند، ابراز نمایم.

منابع

1. Abe E., "Hopf Algebras", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1977).
2. Anderson F., Fuller K., "Rings and Categories of Modules", Springer, Berlin (1974).
3. Bagheri S., Wisbauer R., "Hom-Tensor relations for two-sided Hopf modules over quasi-Hopf algebras", Comm. Algebra 40 (2012) 3257-3287.
4. Bagheri S., "Adjunctions of Hom and Tensors as endofunctors of (Bi-) module categories over quasi-Hopf algebras", Comm. Algebra 42 (2014) 488-510.
5. Bagheri S., "Hom-Tensor relations for (quasi-) comodule algebras", J. Math. Sci. 186 (5) . (2012) 701-705/https://doi.org/10.1007/S10958-012-1017-7.
6. Barr M., Wells C., "Toposes, Triples and Theories", Springer (1985).

7. Borceux F., "Handbook of categorical Algebra 1, Categories and Structures", Encyclopedia of Mathematics and its Applications 51, Cambridge Univ. Press. (1994).
8. Borceux F., "Handbook of categorical Algebra 2, Categories and Structures", Encyclopedia of Mathematics and its Applications 51, Cambridge Univ. Press. (1994).
9. Brzeziński T., Wisbauer R., "Corings and Comodules", London Math. Soc. LNS 309, Cambridge University Press (2003).
10. Drinfeld V. G., "Quasi-Hopf algebras", Leningrad Math. J. 1, (1990) 1419-1457.
11. Hausser F., Nill F., "Diagonal crossed products by duals of quasi-quantum groups", Rev. Math. Phys. 11, (1999) 533-629.
12. Hausser, F., Nill, F., "Doubles of quasi-quantum groups", Comm. Math. Phys. 199 547-589 (1999).
13. Hausser F., Nill F., "Integral theory for quasi-Hopf Algebras", arXiv:Math., QA/9904164 (1999).
14. Kassel K., "Quantum Groups", Springer, Berlin (1995).
15. Mac Lane S., "Category for the working mathematician", Springer (1971).
16. Majid S., "Foundations of Quantum Group Theory", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
17. Pareigis B., "Non-additive ring and module theory II, C-categories, C-functors and C-morphisms", Publ. Math. Debrecen 24 (1977) 351-361.
18. Pareigis B., "Reconstruction of hidden symmetries", J. Alg. 183(1996) 90-154.
19. Schauenburg P., "Actions of monoidal categories and generalized Hopf smash products", J. Alg. 270 (2003) 521-563.
20. Sweedler M. E., "Hopf Algebras", Benjamin, New York (1969).
21. Wisbauer R., "Foundations of Module and Ring Theory", Gordon and Breach Reading (1991).