مقایسهٔ آزمون بیزی و بسامدی برای پارامتر واریانس توزیع نرمال در حضور پارامتر مزاحم، در حالات دوطرفه و یک‌طرفه

بهزاد فلاحی‌فرد، رحیم چینی‌پرداز*، سعید حبیب الهی‌تبار؛
دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه آمار

دریافت ۹۳/۱۱/۲۰ پذیرش ۹۵/۴/۲

چکیده

در این مقاله به بررسی آزمونِ واریانس جامعهٔ نرمال با میانگین مجهول، به دو روش معنی‌داری و بیزی می‌پردازیم. ابتدا تحت یک پیشین خاص، احتمال پسین فرضیه صفر آزمون دوطرفه، به‌دست‌آمده و با مقدار احتمال مقایسه می‌شود. سپس بزرگ‌ترین کران پایین احتمال پسین برای آزمون دوطرفه روی برخی رده‌هایی از توزیع‌های پیشین، با مقدار احتمال مقایسه می‌شود. در مرحلهٔ بعدی مقدار احتمال و احتمال پسین فرضیه صفر برای آزمون یک‌طرفه محاسبه شده است. در نهایت مشاهده می‌شود که در آزمون دوطرفه نتایج بیزی و معنی‌داری باهم سازگار نیستند درحالی‌که نوعی توافق بین این دو دیدگاه در آزمون یک‌طرفه دیده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مقدار احتمال، پارامتر مزاحم، کران پایین احتمال پسین.

مقدمه

فرض می‌کنیم $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نمونه‌ای تصادفی مشاهده شده از جامعه‌ای با تابع چگالی $f(x|\lambda)$, $\lambda \in \Lambda \subseteq R$ باشد. برای آزمون $H_0: \lambda \in \Lambda_0$ در مقابل $H_1: \lambda \in \Lambda_1$ آماردانان بیزی از احتمال پسین[1] درست بودن H_0 یا عامل بیز[2]، و آماردانان بسامدی[3] معمولاً از معیار مقدار احتمال[4] استفاده می‌کنند و برای برخی از توزیع‌ها نشان داده‌اند به‌ازای مقدار احتمال ثابت با افزایش تعداد نمونه، احتمال پسینِ درست بودن فرضیه H_0، به‌سمت یک میل می‌کند (لیندلی[5] ۱۹۵۷ و برگر و دلامپادی[6] ۱۹۸۷).

لیندلی (۱۹۵۷) آزمون نقطه‌ای در مقابل دوطرفه را، برای میانگین توزیع نرمال، با در نظر گرفتن یک پیشین ناآگاهی بخش[7] انجام داد و تعارض بین این دو روش را نشان داد. در تأیید کار لیندلی، جفریز[8] (۱۹۶۱)، بر اساس یک توزیع پیشین مزدوج[9] احتمال پسین برای میانگین را به‌دست آورد و نشان داد که احتمال پسین H_0 همیشه از مقدار احتمال، بیش‌تر است. در قدم بعدی، آماردانان به مقایسه این دو روش برای تعداد نمونه ثابت و رده‌ای از توزیع‌های

---

*نویسندهٔ مسئول chinipardaz _r@scu.ac.ir

1. Posterior Probability
2. Bayes Factor
3. Frequentist
4 . P-value
5. Lindley
6. Berger and Delampady
7. Non-informative Prior
8. Jeffreys
9. Conjugate Prior

پیشین پرداختند. سپس بزرگ‌ترین کران پایین احتمال پسین، تحت ردهٔ موردنظر از پیشین‌ها را با مقدار احتمال مقایسه کردند. ادوارد[1] و دیگران (۱۹۶۳) با استفاده از ردهٔ همهٔ توزیع‌های پیشین ممکن، برای آزمون دوطرفه میانگینِ توزیع نرمال، نشان دادند که هنوز کران پایین احتمال پسین از مقدار احتمال بزرگ‌تر است. به‌دنبال این نتایج تحقیقات دیگری با استفاده از رده‌های معقولی از توزیع‌های پیشین در آزمون‌های دوطرفه برای توزیع‌های دوجمله‌ای، نرمال، نمایی و پوآسن به‌ترتیب برگر و دلامپادی (۱۹۸۷)، برگر و سلک[2] (۱۹۸۷)، پیپل[3] (۱۹۸۸)، چینی پرداز[4] (۲۰۰۳) انجام دادند. هم‌چنین برخی تحقیقات نیز برای ایجاد توافق بین این دو شیوه انجام شده است، عمدهٔ این کارها در آزمون‌های یک‌طرفه صورت گرفته که می‌توان به کارهای برگر و کسلا[5] (۱۹۸۷)، چینی پرداز و نوربلوچی[6] (۲۰۰۳) (۲۰۰۳) اشاره کرد.

همهٔ مواردی که از آن‌ها نام برده شد، مسئلهٔ وجود توافق یا تعارض بین آزمون‌های معنی‌داری و بیزی را، بدون در نظر گرفتن پارامتر مزاحم[7] در مدل بررسی کرده‌اند. ین[8] (۲۰۱۱) آزمون یک‌طرفه را در توزیع نمایی و چینی پرداز و مهری[9] (۲۰۱۵) آزمون دوطرفه را در توزیع پارتو در حضور پارامتر مزاحم در نظر گرفته و به بررسی توافق یا تعارض بین این دو شیوه پرداخته‌اند. نتیجهٔ این بررسی‌ها وجود تعارض بین دو شیوهٔ بیزی و بسامدی در آزمون‌های دوطرفه بود. هدف این مقاله بررسی توافق یا تعارض برای آزمون دوطرفه و یک‌طرفهٔ پارامتر واریانسِ توزیع نرمال در حضور پارامتر مزاحم (میانگین مجهول) به شیوه بسامدی و بیزی است.

بخش دوم شامل فرمول‌بندی مسئله است. بخش سوم به آزمون دوطرفه واریانسِ توزیع نرمال با در نظر گرفتن یک پیشین خاص برای آن می‌پردازد. در این بخش برای پارامتر مزاحم، توزیع پیشین نرمال در نظر گرفته شده است. ازآنجا که در این بخش، همواره مقدار احتمال پسین از مقدار احتمال بیش‌تر است در مقابل این اندیشه که گرفتن یک توزیع پیشین خاص برای پارامتر مورد آزمون ممکن است یک‌جانبه‌نگری نسبت به فرضیه H_0 محسوب شود، در بخش چهارم آزمون دوطرفه واریانس، وقتی‌که توزیع پیشین پارامتر آزمون عضو رده‌ای از توزیع‌های پیشین است در نظر گرفته می‌شود. بخش پنجم مقاله، به آزمون یک‌طرفهٔ پارامتر واریانس در حضور پارامتر مزاحم به شیوهٔ بسامدی و بیزی و مقایسهٔ این دو می‌پردازد. در بخش ششم نیز به بحث و نتیجه‌گیری بر اساس نتایجی که به‌دست‌آمده است پرداخته می‌شود.

فرمول‌بندی

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال $N(\theta, \lambda)$ است که در آن هر دو پارامتر θ و λ مجهول‌اند، آزمون فرضیه‌های

$$\begin{aligned} H_0 &: \lambda = \lambda_0 \\ H_1 &: \lambda \neq \lambda_0 \end{aligned} \tag{1}$$

1. Edwards
2. Berger and Sellke
3. Pepple
4. Chinipardaz
5. Casella and Berger
6. Noorbaloohi
7. Nuisance Parameter
8. Yin
9. Chinipardaz and Mehri

را در نظر بگیرید. نسبت درست‌نمایی[1] برای آزمون (۱) عبارت است:

$$\frac{f_{H_0}(\mathbf{x})}{f_{H_1}(\mathbf{x})}=\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{2\lambda}}$$

که با توجه به آن، فرضیه H_0 رد می‌شود اگر $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2<k_1$ یا $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2>k_2$ $(k_1<k_2)$ باشد. بنابراین دامنهٔ سمت راست یا چپ $T(X)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ علیه فرضیه H_0 هستند. هم‌چنین $T(\mathrm{X})$ تابعی از آماره‌های بسندهٔ[2] $(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ نیز است. بر این اساس $T(\mathbf{X})$ آمارهٔ آزمون معنی‌داری است که مقادیر بزرگ و کوچک آن علیه H_0 هستند. با توجه به این‌که $\frac{T(X)}{\lambda_0}$ تحت H_0 دارای توزیع χ^2_{n-1} است، مقدار احتمال از رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}P-value&=2\min\left\{P_{H_0}\left(T(\mathbf{X})\le t(\mathbf{x})\right),P_{H_0}\left(T(\mathbf{X})\ge t(\mathbf{x})\right)\right\}\\&=2\min\left\{P_{H_0}\left(\chi^2_{n-1}\le\frac{t(\mathbf{x})}{\lambda_0}\right),P_{H_0}\left(\chi^2_{n-1}\ge\frac{t(\mathbf{x})}{\lambda_0}\right)\right\}\end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن $t(\boldsymbol{x})$ مقدار مشاهده شدهٔ $T(\mathbf{X})$ است (ویلیامسون[3] ۲۰۰۴).

برای انجام آزمون دوطرفهٔ (۱) به روش بیزی، ابتدا فرض می‌شود که فرضیه‌های H_0 و H_1 به‌ترتیب دارای احتمال‌های پیشین[4] π_0 و $1-\pi_0$ باشند، با توجه به وجود پارامتر مزاحم، احتمال پسین H_0 تابعی از پارامتر مزاحم مزاحم خواهد بود. برای رفع این مشکل، یک توزیع پیشین برای آن درنظر می‌گیرند.
اگر $\pi(\theta\mid H_0)$ و $\pi(\theta\mid\lambda,H_1)$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ توزیع پیشین پارامتر مزاحم تحت H_0 و H_1 باشند آن‌گاه احتمال پسین فرضیه H_0 وقتی $\mathbf{x}$ مشاهده شده است عبارت است از:

$$P(H_0\mid\mathbf{x})=P(H_0\mid\bar{x},t)=\left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\times\frac{m(\bar{x},t\mid H_1)}{m(\bar{x},t\mid H_0)}\right]^{-1} \quad (۳)$$

که $(\bar{x},t)$ مقدار مشاهده‌شدهٔ آمارهٔ $(\bar{X},T(\mathbf{X}))$ است که رابطهٔ یک‌به‌یک با آمارهٔ بسندهٔ $(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ دارد، و

$$m(\bar{x},t\mid H_0)=\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda\mid\bar{x},t)\pi(\theta\mid H_0)d\theta \quad (۴)$$

$$m(\bar{x},t\mid H_1)=\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda\mid\bar{x},t)\pi(\theta\mid\lambda,\ H_1)\pi(\lambda\mid\ H_1)d\theta d\lambda \quad (۵)$$

که $L(\theta,\lambda\mid\bar{x},t)$ نشان‌دهندهٔ تابع درست‌نمایی بر اساس آمارهٔ بسندهٔ $(\bar{X},T)$ است و $\pi(\lambda\mid H_1)$ تابع چگالی λ تحت H_1 است. چنان‌که گفته شد در دیدگاه بیزی احتمال‌های پیشین π_0 و $1-\pi_0$ را به‌ترتیب به فرضیه‌های H_0 و H_1 نسبت می‌دهند. فرض می‌کنیم جرم احتمال $1-\pi_0$ روی فضای H_1 مطابق با چگالی $\pi(\lambda\mid H_1)$ پراکنده شده باشد؛ از این‌رو تابع چگالی λ روی کل فضا، بدین‌صورت است:

$$\pi(\lambda)=\pi_0 I_{\{\lambda_\cdot\}}(\lambda)+(1-\pi_0)\pi(\lambda\mid H_1)I_{\Lambda-\{\lambda_\cdot\}}(\lambda)$$

---
1. Likelihood Ratio
2. Sufficient Statistic
3 .Williamson
4. Prior Probabilities

که I تابع نشان‌گر است.

اگر به‌جای آزمون (۱)، فرضیه‌های یک‌طرفهِ‌ی

$$\begin{aligned} H_0' &: \lambda \le \lambda_0 \\ H_1' &: \lambda > \lambda_0 \end{aligned} \tag{۶}$$

آزمون شوند، در این صورت مقادیر سمت راست آمارهٔ $T(X)$ علیه فرضیهٔ H_0 هستند، پس مقدار احتمال به‌صورت (7) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P-value &= P_{H_0}\left(T(\mathbf{X}) \ge t(\mathbf{x})\right) \\ &= P_{H_0}\left(\chi^2_{n-1} \ge \frac{t(\mathbf{x})}{\lambda_0}\right) \end{aligned} \tag{۷}$$

برای انجام آزمون (۶) به شیوهٔ بیزی فرض می‌شود که λ و θ دارای توزیع پیشین توأم به به‌صورت (۸) باشند:

$$\pi(\theta,\lambda) = \pi(\theta \mid \lambda)\pi(\lambda) \tag{۸}$$

در این صورت:

$$\begin{aligned} P(H_0' \mid \boldsymbol{x}) = P(\lambda \le \lambda_0 \mid \boldsymbol{x}) &= \int_0^{\lambda_0} \pi\left(\lambda \mid \boldsymbol{x}\right) d\lambda \\ &= \int_0^{\lambda_0}\int_{-\infty}^{\infty} \pi\left(\theta,\lambda \mid \boldsymbol{x}\right) d\theta d\lambda \\ &= \frac{\int_0^{\lambda_0}\int_{-\infty}^{\infty} L\left(\theta,\lambda \mid \bar{x},t\right)\pi\left(\theta \mid \lambda\right)\pi\left(\lambda\right) d\theta d\lambda}{\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L\left(\theta,\lambda \mid \bar{x},t\right)\pi\left(\theta \mid \lambda\right)\pi\left(\lambda\right) d\theta d\lambda} \end{aligned} \tag{۹}$$

در دو بخش بعدی، آزمون (۱) به دو شیوه بیزی و معنی‌داری بررسی می‌شود.

تعارض بین مقدار احتمال و احتمال پسین در آزمون دوطرفهٔ واریانس، با استفاده از یک پیشین خاص

فرضیه‌های (۱) را در نظر می‌گیریم هرگاه $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ مشاهده‌ای از $N(\theta,\lambda)$ باشد، آن‌گاه

$$L(\theta,\lambda \mid \bar{x},t) = f_{\bar{X},T}(\bar{x},t \mid \theta,\lambda) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\lambda}}\, e^{-\frac{n}{2\lambda}(\bar{x}-\theta)^2} \times \left(\frac{t}{4\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e^{-\frac{t}{2\lambda}}}{t\Gamma(\frac{n-1}{2})} \tag{۱۰}$$

برای آزمون دوطرفهٔ (۱) به‌شیوهٔ بیزی معمولاً فرض می‌شود که λ دارای توزیع گاما معکوس (پیشین مزدوج)، به‌طوری‌که $\lambda_0=E(\lambda|H_1)=(\frac{1}{\beta(\alpha-1)})$ (دگروت[1] ۱۹۷۰) باشد.

---
1. DeGroot

$$\pi(\lambda \mid H_1)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\lambda^{-(\alpha+1)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\beta\lambda}} \quad ,\ \alpha>0,\ \beta>0\ ,\ \frac{1}{\beta(\alpha-1)}=\lambda. \qquad (۱۱)$$

ازآن‌جاکه تابع درست‌نمایی، تابعی از پارامتر مجهول θ است، به‌منظور پیدا کردن توزیع حاشیه‌ای $(\bar{x},t)$ با در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین (۱۲) برای پارامتر θ، به تجمیع اثر پارامتر می‌پردازیم (روبرت[1]، ۲۰۰۷).

$$\begin{aligned}\pi(\theta \mid H_0) &\equiv N(\mu,\lambda_0)\\ \pi(\theta \mid \lambda, H_1) &\equiv N(\mu,\lambda)\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که در آن μ معلوم است. بر اساس روابط (۴) و (۵) داریم:

$$m(\bar{x},t \mid H_0)=\sqrt{\frac{n}{2\pi\lambda_0(n+1)}}\left(\frac{t}{4\lambda_0}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{t}\exp\left\{-\frac{t}{2\lambda_0}-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{n+1}\right\} \qquad (۱۳)$$

و

$$m(\bar{x},t \mid H_1)=\frac{\sqrt{\frac{2n}{\pi(n+1)}}}{Beta\left(\frac{n-1}{2},\alpha\right)}\frac{\left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n-3}{2}}}{\left(\frac{\beta}{2}t+\frac{\beta}{2}\frac{n}{n+1}(\bar{x}-\mu)^2+1\right)^{\alpha+\frac{n}{2}}},\ \beta=\frac{1}{\lambda_0(\alpha-1)} \qquad (۱۴)$$

$$P(H_0 \mid \bar{x},t)=\left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\frac{(\beta)^{\frac{n}{2}}\Gamma(\alpha+\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)}\frac{e^{\frac{t}{2\lambda_0}+\frac{z}{2(n+1)}}}{\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{\beta z}{2(n+1)}+\frac{\beta t}{2\lambda_0}\right)^{(\alpha+\frac{n}{2})}}\right],\ z=\frac{n(\bar{x}-\mu)}{\lambda_0},\ \beta=\frac{1}{\lambda(a-1)} \qquad (۱۵)$$

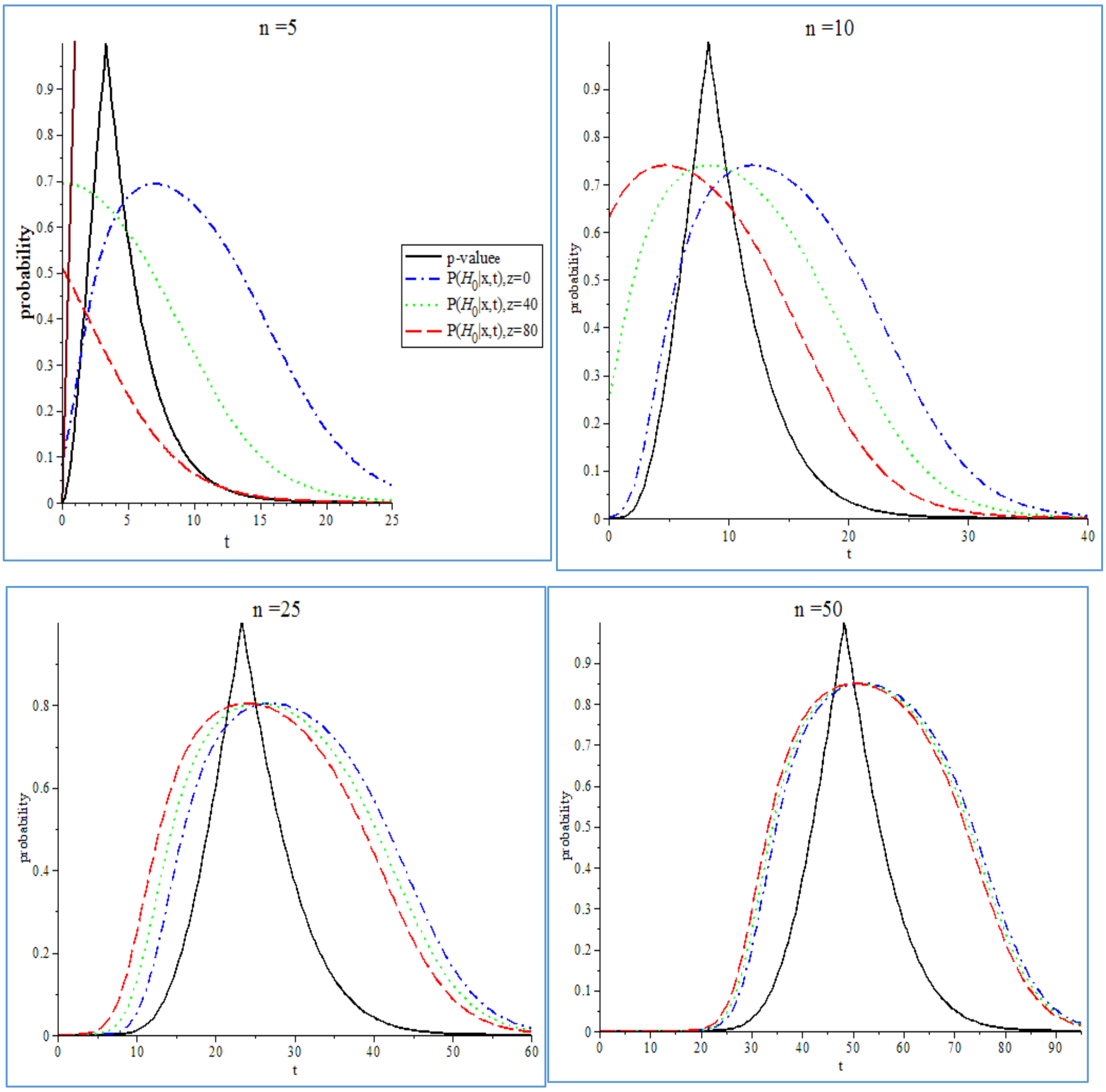
که در اینجا t مقدار مشاهده‌شده $T(X)$ است.

شکل۱ مقایسهٔ بین مقدار احتمال و احتمال پسین فرضیه صفر را نشان می‌دهد ازآن‌جاکه $P(H_0 \mid \bar{x},t)$ به دو مقدار z و t وابسته است، نمودار $P(H_0 \mid \bar{x},t)$ برای مقادیر مختلف z و t رسم شده است هرگاه n زیاد نباشد، به ازای $P-value$های کوچک- که دلیلی بر رد H_0 به شیوهٔ بسامدی (معنی‌داری) است- $P(H_0 \mid \bar{x},t)$ بزرگ‌تر از $P-value$ است و با افزایش n، $P(H_0 \mid \bar{x},t)$ از تمامی مقادیر $P-value$ بزرگ‌تر خواهد بود. این نتیجه بیان‌گر این است که در مواقعی که معیار مقدار احتمال برای آزمون (۱) تمایل به رد فرضیه H_0 دارد، معیار احتمال پسین دلیل کافی بر رد H_0 ارائه نمی‌دهد و برای n های بزرگ در بعضی موارد حتی $P(H_0 \mid \bar{x},t)$ تمایل به پذیرش H_0 دارد.

مقایسهٔ آزمون دوطرفه واریانس به شیوهٔ بسامدی و بیزی در ردهٔ توزیع‌های پیشین

برای بسیاری از آماردانان استفاده از یک توزیع پیشین خاص برای پارامتر مورد آزمون، یک‌جانبه‌نگری نسبت به فرضیه $H_.$ محسوب می‌شود. بنابراین برای مقایسهٔ آزمون‌های معنی‌داری و بیزی، به‌جای استفاده از یک توزیع پیشین

1. Robert



شکل ۱. **مقایسهٔ بین مقدار احتمال و احتمال پسین فرضیه صفر با استفاده از توزیع‌هاپیشین (۱۱) و (۱۲)**

معین، رده‌هایی از توزیع‌های پیشین در نظر گرفته و سپس بزرگ‌ترین کران پایین احتمال پسین فرضیه $H_\cdot$، روی این رده با مقدار احتمال مقایسه می‌شود. هرگاه پارامتر مزاحم در مدل وجود داشته باشد این کران پایین تحت تأثیر پارامتر مزاحم است. راه‌حلی مناسب برای رفع این مشکل استفاده از یک توزیع پیشین برای پارامتر مزاحم (θ) و رده‌ای از توزیع‌های پیشین برای پارامتر مورد آزمون (λ) است. یعنی اگر رابطهٔ

$$\pi(\theta,\lambda \mid H_1)=\pi(\theta \mid \lambda, H_1)\pi(\lambda \mid H_1)$$

را برای توزیع پیشین (θ,λ) تحت فرض H_1 در نظر بگیریم؛ آن‌گاه $\pi(\lambda \mid H_1)\in G$ را در نظر می‌گیریم، که G رده‌ای مناسب از توزیع‌های پیشین است. هم‌چنین باید یک توزیع پیشین خاص را به‌صورت $\pi(\theta \mid \lambda, H_1)$ در نظر گرفت. ازآن‌جاکه در حالت کلی اطلاعات خاصی در مورد θ نداریم از توزیع پیشین ناآگاهی بخش (۱۶) که جرم را روی نواحی خاصی پراکنده نمی‌کند استفاده می‌کنیم.

$$\pi(\theta \mid H_0)=\pi(\theta \mid \lambda, H_1)=1\ ,\quad \theta\in\mathbb{R} \tag{۱۶}$$

$$\underline{P}_G(H_0 \mid \bar{x},t)=\inf_{\pi\in G} P(H_0 \mid \bar{x},t)=\left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\frac{\sup_{\pi\in G} m(\bar{x},t \mid H_1)}{m(\bar{x},t \mid H_0)}\right]^{-1} \qquad (۱۷)$$

در این صورت

که $m(\bar{x},t \mid H_0)$ و $m(\bar{x},t \mid H_1)$ از روابط (۴) و (۵) به‌دست می‌آیند.

رده‌های گوناگونی برای توزیع پیشین λ می‌توان در نظر گرفت. این مقاله به چهار رده مناسب از این توزیع‌های پیشین پرداخته است:

$G_A=$ {ردهٔ تمام توزیع‌های پیشین ممکن}

$G_C=$ {ردهٔ توزیع‌های پیشین مزدوج با میانگین λ}

$G_{ME}=$ { ردهٔ توزیع‌های پیشین با میانهٔ λ }

$G_{US}=$ { ردهٔ توزیع‌های پیشین تک‌نمایی و متقارن حول λ }

این رده‌ها با استفاده از بررسی‌های برگر و سلک (۱۹۸۷) و برگر و دلامپادی (۱۹۸۷) به‌دست‌آمده‌اند. آن‌ها این رده‌ها را برای آزمون کردن پارامتر، بدون حضور پارامتر مزاحم در مدل، در نظر گرفته‌اند.

۱. کران پایین برای G_A

قضیه ۱: برای آزمون فرضیه $H_0: \lambda=\lambda_0$ در مقابل $H_1: \lambda\neq\lambda_0$ اگر $\pi(\lambda \mid H_1)\in G_A$ و توزیع پارامتر مزاحم - ناآگاهی بخش (۱۶)- باشد:

$$\underline{P}_{G_A}(H_0 \mid \bar{x},t)=\left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\frac{m(\bar{x},t \mid \hat{\lambda},H_1)}{m(\bar{x},t \mid H_0)}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\left(\frac{\lambda_0 n}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{e}^{\frac{t-n\lambda_0}{2\lambda_0}}\right]^{-1} \qquad (۱۸)$$

که با توجه به (۱۶) و (۴) داریم:

$$m(\bar{x},t \mid H_0)=\left(\frac{t}{4\lambda_0}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{e^{\frac{-t}{2\lambda_0}}}{t\Gamma(\frac{n-1}{2})} \qquad (۱۹)$$

واضح است که $m_\pi(\bar{x},t \mid H_1)$ نسبت به λ، به‌ازای برآورد ماکسیمم درست‌نمایی یعنی $\hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}$، ماکسیمم می‌شود و ازاین‌رو $sup_{G_A} m(\bar{x},t \mid H_1)=m(\bar{x},t \mid H_1,\hat{\lambda})=\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta,\hat{\lambda})d\theta$ در ستون اول جدول ۱ مقادیر $\underline{P}_G(H_0 \mid \bar{x},t)$ به‌ازای مقادیر مختلف n به‌دست آورده شده است. با مقایسه این ستون و مقدار احتمال در این جدول مشخص می‌شود که مقادیر کران پایین احتمال پسین برای G_A بسیار بزرگ‌تر از مقدار احتمال هستند.

۲. کران پایین برای G_{ME}

قضیه ۲: برای آزمون $H_0: \lambda=\lambda_0$ در مقابل $H_1: \lambda\neq\lambda_0$ اگر $\pi(\lambda \mid H_1)\in G_{Me}$ و توزیع پارامتر مزاحم ناآگاهی بخش و به‌صورت (۱۶) باشد، آن‌گاه:

$$\underline{P}_{G_{Me}}(H_0\,|\,\bar{x},t)=\left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_0 n}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{t-n\lambda_0}{2\lambda_0}}\left(1+(\frac{t}{n\lambda_0})\mathrm{e}^{\frac{n\lambda_0-t}{2\lambda_0}}\right)\right]^{-1} \qquad (۲۰)$$

برهان: این رده، توزیع‌های پیشینی را شامل می‌شود که نیمی از جرم توزیع پیشینِ پارامترِ آزمون را به فضای کم‌تر از $\lambda_.$ و نیمی دیگر را به فضای بزرگ‌تر از $\lambda_.$ اختصاص می‌دهند، یعنی:

$$G_{Me}=\left\{\pi:\int_0^{\lambda_.}\pi(\lambda\,|\,H_1)\,d\lambda=\int_{\lambda_0}^{\infty}\pi(\lambda\,|\,H_1)\,d\lambda=\frac{1}{2}\right\} \qquad (۲۱)$$

جدول ۱. کران پایین احتمال پسین برای کلاسی از توزیع‌های پیشین وقتی $\pi_0=\frac{1}{2}$ ، $P-value=0.05$ **و** $\lambda_0=1$

n	t	$\underline{P}_{G_A}(H_.\,|\,\bar{x},t)$	$\underline{P}_{G_{Me}}(H_.\,|\,\bar{x},t)$	$\underline{P}_{G_{Us}}(H_.\,|\,\bar{x},t)$	$\underline{P}_{G_C}(H_.\,|\,\bar{x},t)$
2	5.03	0.258	0.340	0.410	0.500
3	7.38	0.215	0.301	0.326	0.496
	0.05	0.067	0.119	0.197	0.089
4	9.35	0.197	0.283	0.364	0.485
	0.21	0.074	0.129	0.208	0.108
5	11.15	0.186	0.271	0.352	0.474
	0.48	0.081	0.139	0.218	0.127
10	19.02	0.165	0.248	0.335	0.441
	2.7	0.096	0.161	0.244	0.178
15	26.1	0.158	0.240	0.324	0.423
	5.63	0.102	0.169	0.252	0.202
20	32.85	0.153	0.234	0.322	0.411
	8.90	0.105	0.173	0.259	0.217
50	70.22	0.143	0.222	0.311	0.381
	31.55	0.113	0.184	0.272	0.256
100	128.42	0.138	0.216	0.306	0.364
	73.36	0.117	0.190	0.278	0.276
400	456.24	0.132	0.210	0.299	0.343
	345.56	0.122	0.197	0.286	0.298
1000	1088.48	0.131	0.207	0.297	0.335
	913.28	0.124	0.199	0.290	0.420
2000	2124.8	0.130	0.206	0.300	0.331
	1877	0.125	0.200	0.284	0.311

فرض کنید G_{Me} مجموعه‌ای از چگالی‌ها روی بازهٔ $(0,\infty)$ با میانهٔ $\lambda_.$ باشد، در این صورت:

$$\sup m(\bar{x},t\,|H_1)=\sup_{(g_1,g_2)}\int_0^{\lambda_0}\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda\,|\bar{x},t)g_1(\lambda)d\theta d\lambda+\int_{\lambda_0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda\,|\bar{x},t)g_2(\lambda)d\theta d\lambda$$

$$=\sup_{g_1}\int_0^{\lambda_0}\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda\,|\bar{x},t)d\theta g_1(\lambda)d\lambda+\sup_{g_2}\int_{\lambda_0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda\,|\bar{x},t)d\theta g_2(\lambda)d\lambda \qquad (۲۲)$$

که در آن g_1 و g_2 به‌ترتیب روی $(0,\lambda_0)$ و $(\lambda_.,\infty)$نامنفی هستند. فرض کنید در حالت اول

$$>\lambda_0)\frac{t}{n}=\hat{\lambda}(=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}$$

با توجه به رابطهٔ (۲۱) داریم :

$$\begin{aligned}\sup_{g_1}\int_0^{\lambda_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda\mid\bar{x},t)d\theta\right)g_1(\lambda)d\lambda &= \int_0^{\lambda_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda_0\mid\bar{x},t)\,d\theta\right)g_1(\lambda)d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda_0\mid\bar{x},t)\,d\theta\int_0^{\lambda_0}g_1(\lambda)d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda_0\mid\bar{x},t)\,d\theta \qquad (۲۳) \\ &= \frac{C}{2}\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\lambda_0}}\end{aligned}$$

که

$$C=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{t}{\lambda_0}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \qquad (۲۴)$$

در روابط بالا $\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda|\bar{x},t)d\theta$ تابعی صعودی از λ بر بازهٔ $(0,\lambda_0)$است و به‌ازای $\lambda=\lambda_0$ ماکسیمم می‌شود. از طرفی چون $\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda|\bar{x},t)d\theta$ماکسیمم خود را در $\lambda=\hat{\lambda}$اختیار می‌کند خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sup_{g_2}\int_{\lambda_0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{L}(\theta,\lambda\mid\bar{\mathrm{x}},\mathrm{t})\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{g}_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda &= \left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{L}(\theta,\hat{\lambda}\mid\bar{\mathrm{x}},\mathrm{t})\,\mathrm{d}\theta\right]\int_{\lambda_0}^{\infty}\mathrm{g}_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{\mathrm{C}}{2}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{t}}\right)^{\frac{\mathrm{n-1}}{2}}\mathrm{e}^{(-\frac{\mathrm{n}}{2})} \qquad (۲۵)\end{aligned}$$

با جای‌گذاری (۲۵) و (۲۳) در (۲۲) و سپس (۲۲) و (۱۹) در (۱۷)، (۲۰) را به‌دست می‌آوریم.
برای حالت دوم، یعنی $\lambda_0 > \hat{\lambda}$ نیز، به طریق مشابه رابطهٔ (۲۰) به‌دست می‌آید.

با توجه به ستون دوم جدول ۱ اختلاف بین مقدار احتمال و $\underline{P}_{G_{Me}}(H_0\mid\bar{x},t)$ به‌وضوح مشخص است. چون $G_{Me}\subseteq G_A$ ، پس $\underline{P}_{G_{Me}}(H_0\mid\bar{x},t)\geq\underline{P}_{G_A}(H_0\mid\bar{x},t)$ و این امر تعارض بیش‌تری بین مقدار احتمال و احتمال پسین را نشان می‌دهد.

۳. کران پایین برای G_{US}

ازآن‌جاکه توزیع نرمال حول $\lambda=\lambda_0$ متقارن نیست برای محاسبه بزرگ‌ترین کران پایین روی G_{US} باید تبدیلی مناسب روی λصورت گیرد. با پیروی از پیل (۱۹۸۸) و چینی پرداز و مهری (۲۰۱۵) که برای توزیع‌های نامتقارن تبدیلی را پیشنهاد کرده‌اند، تبدیل مناسب در این‌جا $\mathrm{u}(\lambda)=\ln(\frac{\lambda}{\lambda_0})$ با برد $\mathbb{R}$ انتخاب می‌شود. فرض کنید h یک تابع چگالی متقارن از u باشد به‌طوری‌که:

$$\int_{-\infty}^{0}h(u)du=\frac{1}{2}=\int_0^{\infty}h(u)du$$

بنابراین توزیع پیشین λ به‌صورت (۲۶) است:

$$\pi(\lambda \mid H_1) = h\big(u(\lambda)\big)\frac{d(u(\lambda))}{d\lambda} \tag{۲۶}$$

هم‌چنین $\pi(\lambda \mid H_1)$ میانهٔ λ_0 است زیرا:

$$\int_0^{\lambda_0} \pi(\lambda \mid H_1) d\lambda = \int_0^{\lambda_0} h\big(u(\lambda)\big)\frac{d\big(u(\lambda)\big)}{d\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{0} h(u)du = \frac{1}{2} \tag{۲۷}$$

حال قضیهٔ ۳ را داریم:

قضیه ۳: برای آزمون $H_0 : \lambda = \lambda_0$ در مقابل $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ اگر $\pi(\lambda \mid H_1) \in G_{US}$ آن‌گاه کران پایین احتمال پسین H_0 عبارت است از:

$$\underline{P}_{G_{US}}(H_0 \mid \bar{x}, t) = \left[1 + \frac{1-\pi_0}{\pi_0}\sup_{k>0}\frac{1}{2k}\int_{-k}^{k}\exp\left(-\frac{n-1}{2}u + (1-e^{-u})\frac{t}{2\lambda_0}\right)du\right]^{-۱} \tag{۲۸}$$

برهان: اگر h یک تابع چگالی تک‌نمایی و متقارن حول صفر و H رده‌ای از این تابع‌های چگالی باشد، با در نظر گرفتن توزیع پیشین λ به‌صورت (۲۶) و با توجه به رابطهٔ (۲۷) داریم:

$$\sup_{\pi \in G_{US}} m(\bar{x}, t \mid H_1) = sup_{\pi \in G_{US}} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta, \lambda \mid \bar{x}, t)\pi(\theta \mid \lambda, H_1)\pi(\lambda \mid H_1) d\theta d\lambda$$

$$= C \times \sup_{h \in H}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^{\frac{n-1}{2}}\exp\left(-\frac{n-1}{2}u - \frac{t}{2}e^{-u}\right)h(u)du \tag{۲۹}$$

که C در (۲۴) داده شده است، با توجه به این‌که توزیع تک‌نمایی و متقارن حول صفر، آمیخته‌ای از توزیع‌های یک‌نواخت حول صفر است کران پایین احتمال پسین تحت ردهٔ G_{US} برابر کران پایین احتمال پسین تحت ردهٔ توزیع‌های پیشین یک‌نواخت $U(-k,k)$ خواهد بود (گوش و همکاران ۲۰۰۶) یعنی:

$$\inf_{G_{US}} P(H_0 \mid \bar{x}, t) = \inf_{U(-k,k)} P(H_0 \mid \bar{x}, t)$$

که در آن $U(-k,k)$ بیان‌گر خانوادهٔ توزیع‌های یک‌نواخت در فاصلهٔ $k>0, (-k,k)$ است. پس (۲۶) را می‌توان به‌صورت (۳۰) نوشت:

$$\sup_{\pi \in G_{US}} m(\bar{x}, t \mid H_1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{t}{\lambda_0}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \times \sup_{k>0}\int_{-k}^{k}\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^{\frac{n-1}{2}}\exp\left(-\frac{n-1}{2}u - \frac{t}{2\lambda_0}e^{-u}\right)\frac{1}{2k}du \tag{۳۰}$$

با جای‌گذاری رابطه (۳۰) و (۱۹) در رابطه (۱۷) اثبات کامل می‌شود. ستون سوم جدول ۱ مقادیر بزرگ‌ترین کران پایین احتمال پسین H_0 را روی ردهٔ G_{US} را نشان می‌دهد. در این رده نیز اختلاف بین دو روش آزمون، به‌وضوح دیده می‌شود.

۴. کران پایین برای G_C

چنان‌که در بخش سوم بیان شد برای پارامتر λ می‌توان از توزیع پیشین مزدوج استفاده کرد تا کران پایین احتمال پسین به‌صورت فرم بسته به‌دست آید. ازآن‌جاکه لازم است مقدار احتمال با کران پایین احتمال پسین مقایسه شود برای حداقل کردن مقدار پارامترهای توزیع پیشین لازم است به‌صورت مناسبی انتخاب شود.

$G_C=\left\{\pi:\ \pi(\lambda|H_1)\equiv IG(\alpha,\frac{1}{\beta})\right\}$ باشد که در آن تابع چگالی گاما معکوس، $IG(\alpha,\frac{1}{\beta})$ در بخش ۳ آمده است. قضیهٔ زیر محاسبهٔ کران پایین احتمال پسین را نشان می‌دهد.

قضیه ۴: برای آزمون $H_0:\lambda=\lambda_0$ در مقابل $H_1:\lambda\neq\lambda_0$ اگر $\pi(\lambda\mid H_1)\in G_C$، کران پایین احتمال پسین H_0 عبارت است از:

$$\underline{P}_{G_C}(H_0\mid\bar{x},t)=\left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\sup_{\alpha>1}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\lambda\beta)^{\frac{n-1}{2}}e^{\frac{t}{2\lambda}}}{\left(\frac{t\beta}{2}+1\right)^{\frac{n-1}{2}+\alpha}}\right]^{-1},\ \beta=\frac{1}{\lambda(\alpha-1)} \qquad (۳۱)$$

برهان: با توجه به (۴) و (۵) داریم:

$$m(\bar{x},t\mid H_1)=\frac{1}{Beta(\frac{n-1}{2},\alpha)}\frac{(t\beta/4)^{\frac{n-1}{2}}}{t(t\beta/2+1)^{\frac{n-1}{2}+\alpha}},\quad \frac{1}{\beta(\alpha-1)}=\lambda_0 \qquad (۳۲)$$

با قرار دادن (۳۲) و (۱۹) در (۱۷) داریم:

$$P(H_0\mid\bar{x},t)=\left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\lambda\beta)^{\frac{n-1}{2}}e^{\frac{t}{2\lambda}}}{\left(\frac{t\beta}{2}+1\right)^{\frac{n-1}{2}+\alpha}}\right]^{-1},\beta=\frac{1}{\lambda_0(\alpha-1)} \qquad (۳۳)$$

بنابراین کران پایین احتمال پسین (۳۳) برابر (۳۱) است.

ستون چهارم از جدول ۱ مقادیر بزرگ‌ترین کران پایین احتمال پسین فرضیه صفر را روی G_C نشان می‌دهد. این مقادیر بیش‌ترین اختلاف را با مقدار احتمال نسبت به سایر رده‌ها نشان می‌دهند. با توجه به این‌که در چهار رده توزیع‌های پیشین G_C از بقیه رده‌ها کوچک‌تر است، تفاوتِ بیش‌تر آن با مقدار احتمال، قابل‌انتظار است.

وجود توافق بین مقدار احتمال و احتمال پسین در آزمون یک‌طرفهٔ واریانس

۱. آزمون یک‌طرفه واریانس در حضور پارامتر واریانس

فرض شود که $X_1,X_2,\ldots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از $N(\theta,\lambda)$ با θ مجهول است و می‌خواهیم آزمون‌های (۳۴) را انجام دهیم:

$$\begin{aligned}H_0&:\lambda\leq\lambda_0\\ H_1&:\lambda>\lambda_0\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

۱-۱. آزمون معنی‌داری

برای آزمون فرضیات (۳۴) به‌شیوهٔ معنی‌داری، واضح است که مقادیر بزرگ (دامنهٔ سمت راست) $T(X)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ علیه فرضیه H_0 است بنابراین

$$P-value=\sup P_{\lambda\le\lambda_0}(T(\boldsymbol{X})\ge t(\boldsymbol{x}))=P_{\lambda_0}(T(\boldsymbol{X})\ge t(\boldsymbol{x}))$$

$$=P_{\lambda_0}(\chi^2_{n-1}\ge\frac{t(\boldsymbol{x})}{\lambda_0})=\int_{\frac{t}{\lambda_0}}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n-1}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}u^{\frac{n-1}{2}-1}e^{\frac{-u}{2}}\,du$$

با تغییر متغیره $v=\frac{t}{u}$ داریم:

$$P-value=\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_0^{\lambda_0}(\frac{1}{v})^{\frac{n-1}{2}+1}e^{(-\frac{t}{2v})}\,dv$$

۱-۲. آزمون بیزی

فرض شود که $\pi(\theta\mid\lambda)=1,\ \theta\in\mathbb{R},\ \pi(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ یا به‌عبارت‌دیگر $\pi(\theta,\lambda)=\frac{1}{\lambda},\ \theta\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{R}^+$

$$\pi(\theta\mid\boldsymbol{x})\propto\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\lambda\mid\bar{x},t)\frac{1}{\lambda}d\theta=c(\frac{1}{w})^{\frac{n}{2}+1}e^{-\frac{t}{2w}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{n}{2\lambda}(\theta-\bar{x})^2}d\theta \tag{۳۵}$$

بر اساس (۹) خواهیم داشت:

$$P(H_0\mid\boldsymbol{x})=P(\lambda\le\lambda_0\mid\boldsymbol{x})$$

$$=\frac{\int_0^{\lambda_0}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\lambda})^{\frac{n}{2}+1}e^{-\frac{t}{2\lambda}}e^{-\frac{n}{2\lambda}(\theta-\bar{x})^2}d\theta d\lambda}{\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\lambda})^{\frac{n}{2}+1}e^{-\frac{t}{2\lambda}}e^{-\frac{n}{2\lambda}(\theta-\bar{x})^2}d\theta d\lambda} \tag{۳۶}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\int_0^{\lambda_0}(\frac{1}{\lambda})^{\frac{n-1}{2}+1}e^{-\frac{t}{2\lambda}}d\lambda}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\Gamma(\frac{n-1}{2})(\frac{2}{t})^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$=(\frac{t}{2})^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_0^{\lambda_0}(\frac{1}{w})^{\frac{n-1}{2}+1}e^{-\frac{t}{2\lambda}}d\lambda$$

$$=P-value$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که برخلاف آزمون دوطرفه برای پارامتر واریانس که اختلاف بین آزمون معنی‌داری و بیزی وجود داشت، در آزمون یک‌طرفه پارامتر واریانس، می‌توان پیشینی را یافت که بر اساس آن مقدار احتمال و احتمال پسین فرضیه H_0 برابر باشند. بر این اساس، می‌توان گفت که در حضور پارامتر مزاحم، بین آزمون معنی‌داری و بیزی، مشابه حالتی که پارامتر مزاحم وجود ندارد، می‌توان به توافق رسید.

۳. مقایسهٔ یک‌طرفهٔ واریانس‌های دو جامعهٔ نرمال

این توافق حتی در مقایسهٔ یک‌طرفه واریانس‌های دو جامعه نرمال مستقل نیز دیده می‌شود که فرضیه «وجود توافق بین شیوه بیزی و بسامدی در آزمون‌های یک‌طرفه» را قوی‌تر می‌کند. برای نشان دادن آن فرض کنید که

$X_1, X_2, ..., X_m$ نمونه‌ای تصادفی از $N(\theta_1, \lambda_1)$ باشد و $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ نمونه‌ای تصادفی از $N(\theta_2, \lambda_2)$؛ که θ_1، θ_2 و λ_1، λ_2 همگی مجهول‌اند. آزمون یک‌طرفهٔ (۳۷) را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} H_0 &: \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \le c_0 \\ H_1 &: \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > c_0 \end{aligned}, (c_0 \ge 1) \tag{۳۷}$$

۴. آزمون معنی‌داری مقایسه واریانس دو جامعه

مطابق با روش معنی‌داری آماره‌ای مناسب برای آزمون (۳۷)، به‌صورت شهودی عبارت است از $S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \frac{n-1}{m-1}\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2} = \frac{n-1}{m-1}\frac{T_1}{T_2}$ که مقادیر بزرگ آن، علیه فرضیه H_0 هستند در ضمن این آماره تابعی از آمارهٔ بسندهٔ $(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{i=1}^{m} X_i^2, \sum_{j=1}^{n} Y_j, \sum_{j=1}^{n} Y_j^2)$ نیز نیست؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} P-Value &= \sup_{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\le c_0} P\left(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \ge S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right) = \sup_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\le \frac{1}{c_0}} P\left(F_{m-1,n-1} \ge \frac{\lambda_2}{\lambda_1} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right) \\ &= P_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{1}{c_0}}\left(F_{m-1,n-1} \ge \frac{S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{c_0}\right) \\ &= P\left(F_{n-1,m-1} \le \frac{c_0}{S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\right) \end{aligned}$$

اما

$$= P\left(F_{n-1,m-1} \le \frac{c_0}{s}\right) = \int_0^{\frac{c_0}{s}} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{n-1}{m-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{u^{\frac{n-1}{2}}}{\left(1+\frac{n-1}{m-1}u\right)^{\frac{m+n-2}{2}}} du$$

با تغییر متغیر v= us و با توجه به این‌که $s = \frac{n-1}{m-1}\frac{t_1}{t_2}$ داریم:

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n-2}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{c_0} \frac{v^{\frac{n-1}{2}-1}}{(1+\frac{t_2}{t_1}v)^{\frac{m+n-2}{2}}} d\gamma \tag{۳۸}$$

به‌روش بیزی فرض می‌کنیم که:

$$\pi(\theta_1,\theta_2 \mid \lambda_1,\lambda_2) = 1,\ (\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\pi(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2},\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

ازاین‌رو:

$$\pi\left(\lambda_1,\lambda_2 \mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\pi\left(\lambda_1 \mid \boldsymbol{x}\right)\pi(\lambda_2 \mid \boldsymbol{y})$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta_1,\lambda_1 \mid \bar{x},t_1)\frac{1}{\lambda_1}d\theta_1}{m(\boldsymbol{x})}\cdot\frac{\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta_2,\lambda_2 \mid \bar{y},t_2)\frac{1}{\lambda_2}d\theta_2}{m(\boldsymbol{y})}$$
$$=C.K.\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{m}}}{m(\boldsymbol{x})}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{m-1}{2}+1}e^{-\frac{t_1}{2\lambda_1}}\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}{m(\boldsymbol{y})}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{\frac{n-1}{2}+1}e^{-\frac{t_2}{2\lambda_2}} \qquad (۳۹)$$

که $m(\boldsymbol{x})$ و $m(\boldsymbol{y})$ به‌ترتیب توزیع‌های حاشیه‌ای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ هستند و

$$C=\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\left(\frac{m-1}{4}\right)^{\frac{m-1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{m-1}{2})}\left(\frac{t_1}{m-1}\right)^{(\frac{m-1}{2}-1)},\ K=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{n-1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{t_2}{n-1}\right)^{(\frac{n-1}{2}-1)}$$

$$t_2=\sum_{j=1}^{n}(y_j-\bar{y})^2,\ t_1=\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2$$

پس اگر تعریف کنیم $\boldsymbol{\gamma}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ آن‌گاه:

$$\pi(\gamma)=\int_0^{\infty}|\lambda_2|\pi_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\gamma\lambda_2,\lambda_2 \mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)d\lambda_2$$
$$=\frac{C.K}{m(\boldsymbol{x})m(\boldsymbol{y})}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{mn}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}-1\right)\left(\frac{2}{t_1}\right)^{(\frac{m+n}{2}-1)}\frac{\gamma^{\frac{n-1}{2}-1}}{\left(1+\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{m+n}{2}-1}}$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\gamma^{\frac{n-1}{2}-1}}{\left(1+\frac{t_2}{t_1}\gamma\right)^{\frac{m+n}{2}-1}} \qquad (۴۰)$$

پس:

$$P(H_0 \mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=P\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\le c_0 \mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{c_0}\frac{\gamma^{\frac{n-1}{2}-1}}{(1+\frac{t_2}{t_1}\gamma)^{\frac{m+n}{2}-1}}d\gamma \qquad (۴۱)$$

بنابراین با توجه به (۳۸):

$$P-value=P(H_0 \mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

برای حالت $c_0<1$ با وارون کردن فرضیات، $\frac{1}{c_0}\ge 1$ خواهد بود و واضح است که به نتیجه‌ای مشابه می‌رسیم.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به شیوه بیزی و بسامدی، آزمون دوطرفه و یک‌طرفه پارامتر واریانس توزیع نرمال انجام شده است و میانگین توزیع نقش پارامتر مزاحم را دارد. در مرحلۀ نخست آزمون دوطرفه انجام شده است بدین‌ترتیب که با در نظر گرفتن یک پیشین خاص با افزایش تعداد نمونه احتمال پسین فرضیه صفر، به‌ازای مقدار احتمال ثابت و کوچک - که دلیل بر رد H_0 به‌شیوۀ بسامدی (معنی‌داری) است- افزایش می‌یابد و از فرضیه H_0 حمایت می‌کند. در گام بعدی، تحت تعداد نمونه ثابت و مقدار احتمال ثابت و کوچک، کران پایین احتمال پسین فرضیه صفر را، وقتی توزیع پیشین پارامتر مورد آزمون عضو رده‌ای از توزیع‌های پیشین است؛ به‌دست‌آمده و از مقدار احتمال بزرگ‌تر است. این امر در آزمون‌های دوطرفه اختلاف بین شیوه بیزی و بسامدی را آشکارتر می‌کند. در سومین مرحله برای آزمون یک‌طرفه پارامتر واریانس، یک پیشین خاص برای آزمون بیزی پیشنهاد شده است و نشان داده شده است که احتمال پسین و مقدار احتمال برابر هستند؛ یعنی در این حالت نوعی توافق بین دو شیوه مشاهده می‌شود. به‌طورکلی می‌توان این نتیجه را گرفت که برای آزمون دوطرفه، در رد کردن فرضیه H_0 به شیوۀ معنی‌داری باید احتیاط بیش‌تری کرد و بنا بر توصیه برگر و سلک (۱۹۸۷) وقتی به شیوۀ معنی‌داری تمایل به رد H_0 داریم، بهتر است روش‌های دیگری نیز بررسی شوند. در آزمون‌های یک‌طرفه چنان‌چه فرضیه H_0 رد شود می‌توان امیدوار بود که این فرضیه به شیوه بیزی نیز حمایت نمی‌شود.

منابع

1. O.Berger J., "Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis", 2nd ed. Berlin: Springer (1985).
2. Berger J.O., Delampady M., "Testing precise hypotheses", (with discussion) Stat. Sci. 2 (1987) 317-352.
3. Berger J. O., Sellke T., "Testing a point null hypotheses: the irreconcilability of P value and evidence", J. Am. Stat. Assoc. 82 (1987) 112-122.
4. Casella G., Berger R. L., "Reconciling Bayesian and Frequentist Evidence in the One-Sided testing problem", (with discussion). J.Amer. Statist. Assoc.,Vol., 82 (1987) 106-135.
5. Chinipardaz R., Noorbaloochi S., "Reconcilability of P-Values and Posterior Probability in Nonregular Distributions", Far East J. Theo.Stat. Vol. 10 (2) (2003) 111-122.
6. Chinipardaz R., "The Discrepancy of P-values and Posterior Probability in Poisson Distribution", Pak. J. Stat., 19 (2003) 301-313.
7. Chinipardaz R., Mehri K., "Irreconcilability of P-value and Bayesian Measure in two-sided Hypotheses: Pareto Distribution with the Presence of Nuisance Parameter", Communication in Statistics- Theory and Method (in press 2015).
8. DeGroot M. H., "Lindley's paradox: Comment, J. Am. Stat. Assoc., 378 (1982) 336-339.

9. Delampady M. , "Lower bounds on bayes factors for interval null hypotheses", J. Am. Stat. Assoc., 84 (1989) 120-124.

10. Edwards W., Lindman H., Savage L. J., "Bayesian statistical inference for psychological research, Psycholo. Rv., 70 (1963) 193-242.

11. Ghosh J. K., Delampady M., Samanta T., "An Introduction to Bayesian Analysis", New York: Springer (2006).

12. Ghosh J. K., Purkayastha S., Samanta T., "Role of P-values and Other Measures of Evidence in Bayesian Analysis", In: Dey, D.K and Rao, C.R. (eds) Handbook of Statistics 25, Bayesian Thinking: Modeling and Computation, (2005) 151-170.

13. Jeffreys H., "Theory of probability", 3rd ed. London: Oxford University Press (1961).

14. Lindley D. V., "A statistical paradox", Biometrika, 44 (1957) 187-192.

15. Pepple P. A., "Bayesian testing of an exponential point null hypothesis", Communications in Statistics-Theory and Methods, 17 (10) (1988) 3483-3503 .

16. Robert P. C., "The Bayesian Choice From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation", New York: Springer (2007).

17. Williamson P. P., "Comparison of Testing Proc edures Utilizing p-values and Bayes Fa ctors in Some Common Situations, Journal of Statistical Computation and Simulation", 74 (2004) 833-850.

18. Yin Y., "Generalized P-values and Bayesian evidence in the One-sided testing problems under exponential distributions", Stat. Neerlandica, 65 (2011) 319-336.