تحلیل برآوردگر بیزی مورد انتظار و برآوردگر بیزی سلسله مراتبی برای پارامتر یک سیستم قابلیت اطمینان حاصل از توزیع رایلی تحت نمونه سانسور فزایندۀ نوع دوم

عین‌الله دیری*
دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائمشهر، گروه آمار

دریافت: ۹۷/۰۳/۲۴ پذیرش: ۹۸/۰۸/۱۸

چکیده

هان (۲۰۰۴) برای اولین بار، تعریف جدیدی از برآوردگرهای بیزی را با نام *"برآوردگرهای بیزی مورد انتظار "* مطرح کرد. این رویکرد جدید، تعمیم روش *"بیز سلسله مراتبی"* بود که لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲) مطرح کردند از این رو، هدف اصلی ما در این تحقیق، بررسی و مقایسه برآوردگر بیزی مورد انتظار و برآوردگر بیزی سلسله مراتبی برای پارامتر یک سیستم قابلیت اطمینان حاصل از توزیع احتمال رایلی تحت داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم می‌باشد. به همین منظور، ویژگی‌های برآوردگر بیزی مورد انتظار و برآوردگر بیزی سلسله مراتبی را در غالب سه قضیه بیان می‌کنیم، در این قضایا نشان می‌دهیم که مقادیر برآوردگرهای بیزی مورد انتظار و برآوردگر بیزی سلسله مراتبی تحت توزیع‌های پیشین مختلف به سمت صفر همگرا هستند.

واژه‌های کلیدی: برآوردگر بیزی مورد انتظار، توزیع رایلی، توزیع پیشین، توزیع سلسله مراتبی.

مقدمه

توزیع رایلی حالت خاصی از توزیع وایبول می‌باشد. توزیع رایلی یکی از پرکاربردترین توزیع‌هایی است که در قابلیت اطمینان به‌کار می‌رود. برای اولین بار، لرد رایلی توزیع احتمال رایلی را معرفی و خواص این توزیع را مورد بررسی قرار داد. توزیع رایلی در مدل‌سازی آماری به‌صورتی وسیع مورد استفاده قرار می‌گیرد، همچنین این مدل احتمالی در دستگاه‌های الکتریکی دارای خلا و مهندسی ارتباطات نقش به‌سزایی دارد. توزیع احتمال رایلی معمولاً در مواردی به کار گرفته می‌شود که متغیر تحت بررسی دارای دو مؤلفۀ مستقل از هم است؛ به طوری که هر دو دارای توزیع نرمال با واریانس مشابه باشند. برای مطالعۀ بیشتر می‌توان به کتاب توزیع‌های یک متغیرۀ پیوسته از بالا کریشنان و جانسون (۱۹۹۴) مراجعه کرد. تابع چگالی احتمال توزیع رایلی با پارامتر مقیاس θ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f(x|\theta) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \quad , \qquad x,\theta > 0 \tag{۱}$$

همچنین تابع توزیع احتمال(تجمعی) رایلی به صورت زیر می‌باشد.

$$F(x|\theta) = 1 - e^{-\theta x^2}, \qquad x,\theta > 0 \tag{۲}$$

ایدۀ توزیع پیشین سلسله مراتبی را اولین بار لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲) مطرح کردند و سپس هان (۱۹۹۷) ساختار توزیع‌های پیشین سلسله مراتبی را تعمیم و کاربردهای آن را مطرح کرد. در این راستا مقالات متعددی به چاپ رسید، برای مطالعه بیشتر و مشاهده کاربردهای روش بیزی سلسله مراتبی می‌توان به، هان (۱۹۹۸) برای برآورد نرخ شکست در توزیع

*نویسندۀ مسئول e.deiri53@Qaemiau.ac.ir

نمایی، لینگ و شی (۱۹۹۹) برای برآورد پارامترهای توزیع پاسکال، هان و لی (۱۹۹۹) برای برآورد قابلیت اطمینان سیستم و هان (۱۹۹۹) برای برآورد نرخ شکست مورد استفاده قرار دادند، اشاره کرد.

در رویکرد سلسله مراتبی که لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲) مطرح کردند، ابرپارامتر موجود در توزیع پیشین θ، به عنوان یک متغیر تصادفی با یک توزیع خاص در نظر گرفته می‌شود. در این روش فرض کنید b یک ابر پارامتر از پارامترهای توزیع θ باشد. فرض کنید θ دارای تابع چگالی پیشین $\pi_1(\theta|b)$ و ابر پارامتر b دارای تابع چگالی پیشین $\pi_2(b)$ باشد در این صورت تابع چگالی سلسله مراتبی θ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\pi(\theta) = \int_{\Lambda} \pi_1(\theta|b)\pi_2(b)db \ , \qquad b \in \Lambda \tag{۳}$$

اخیراً نتایجی در ارتباط با داده‌های بقا با استفاده از بیز سلسله مراتبی به دست آمده است که همگی آن‌ها شامل انتگرال‌های پیچیده می‌باشد برای رفع این مشکل می‌توان از چندین روش محاسباتی مانند MCMC کمک گرفت ولی با این وجود هنوز هم انتگرال گیری برای مسایل کاربردی بسیار نامناسب خواهد بود. در نهایت برای رفع این مشکل هان (۲۰۰۴) با تعمیم روش بیز سلسله مراتبی، ایده جدیدی با نام برآوردگرهای بیزی مورد انتظار را معرفی کرد. در سال‌های اخیر نویسندگان زیادی، مقالاتی در زمینه نظری و کاربردی برآوردگرهای بیزی سلسله مراتبی و بیزی مورد انتظار ارائه کردند. به همین منظور برای مطالعه بیشتر رویکرد بیزی مورد انتظار می‌توان به، هان و دینگ (۲۰۰۴) برای برآورد پارامترهای احتمال شکست و نرخ شکست، هان (۲۰۰۵) برای برآورد پارامترهای قابلیت اطمینان، هان (۲۰۰۷) برای برآورد احتمال شکست مورد استفاده قرار دادند، اشاره کرد.

در زمینه کاری تحلیل بقا، کنترل کیفیت و قابلیت اطمینان تولیدات صنعتی، برای بررسی و تحلیل آزمون‌های طول عمر محصولات با بالاترین قابلیت اطمینان، مهندسین اغلب با مجموعه داده‌های ناقص و بریده شده با اندازه نمونه کوچک یا داده‌های سانسور شده سر و کار دارند. تمامی این نوع داده‌ها قطعاً باعث ایجاد مشکلاتی در برآورد پارامترهای مربوط به طول عمر محصولات با استفاده از تکنیک‌های کلاسیک آماری می‌شود، در مقابل می‌توان روش‌های آمار بیزی مانند آمار بیزی سلسله مراتبی را که توسط لیندلی، اسمیت و هان مطرح شده (۱۹۷۷)، برای بررسی این‌گونه داده‌ها به کار برد. هر چند در این روش‌ها نیز به دلیل وجود انتگرال‌های پیچیده، از روش‌های محاسباتی استفاده می‌شود. در این مقاله به ویژه از روشی جدید به نام " برآورد بیز مورد انتظار" که نخستین بار توسط مینگ هان (۲۰۰۴) معرفی شده است بر اساس داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم استفاده می‌کنیم. قضایای به کار رفته در این مقاله ثابت می‌کند که به صورت حدی دو برآوردگر، بیز مورد انتظار و بیز سلسله مراتبی به یک مقدار میل می‌کنند بنابراین تفاوت معنی‌داری به صورت مجانبی بین آنها وجود ندارد و نیز نباید غافل از این بود که محاسبهٔ برآورد بیزی مورد انتظار به مراتب ساده بوده در حالی که برآورد بیزی سلسله مراتبی مرتبط با محاسبهٔ انتگرال بوده که غالباً آسان نخواهد بود.

به همین منظور ما در این مقاله، تحت داده‌هایی که از طرح سانسور فزاینده نوع دوم به دست آمده‌اند، برای پارامتر مقیاس توزیع رایلی هر دو روش برآوردگرهای بیزی سلسله مراتبی و برآوردگر بیزی مورد انتظار را به طور همزمان برای توزیع‌های پیشین مختلف مورد بحث و بررسی قرار داده و در نهایت رفتار مجانبی این برآوردگرهای پیشنهادی را با هم مقایسه می‌کنیم. همچنین بعضی از محققان هر دو روش برآوردگرهای بیزی سلسله مراتبی و بیزی مورد انتظار را به طور همزمان برای پارامترهای مدل تحقیق مورد بررسی و مقایسه قرار دادند. برای مطالعه بیشتر استفاده همزمان از این برآوردگرها می‌توان به، هان (۲۰۰۶) برای احتمال تغییر وضعیت مجانبی، جی‌ان‌هو و زی‌اویان (۲۰۰۸) برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و ویژگیهای مجانبی برآوردگرهای پیشنهادی، هان (۲۰۰۸) برای برآورد نرخ شکست، هان (۲۰۰۹) برای برآورد نرخ شکست تحت داده‌های سانسور شده، وانگ و ماوو (۲۰۰۹) برای برآورد پارامترهای توزیع دوجمله‌ای و خواص مجانبی برآوردگرهای پیشنهادی، آندو

(۲۰۱۰) برای مدل معادلات همزمان، وانگ و یوآن (۲۰۱۰) برای برآورد احتمال شکست در قابلیت اطمینان، زین هوم و دیگران (۲۰۱۱) برای برآورد پارامترهای توزیع بور نوع XII تحت داده‌های سانسور شده نوع دوم، هان (۲۰۱۱)، (۲۰۱۵) برآورد پارامترقابلیت اطمینان در توزیع دوجمله‌ای و اسفندیاری و دیگران (۱۳۹۵) برای برآورد پارامترنسبت در توزیع دوجمله-ای، مورد استفاده قرار دادند، اشاره کرد. همچنین برای مقایسهٔ برآوردگر بیزی مورد انتظار با برآوردگرهای کلاسیک مانند برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم می‌توان به مقالهٔ محمد راشد (۲۰۱۷) مراجعه کنید.

بنا بر نظریهٔ پیشنهادی هان (۲۰۰۴)، فرض کنید b ابر پارامتر موجود در توزیع پیشین θ باشد. برای رسیدن به توزیع پسین معقول‌تر، باید شرایطی که در آن تابع چگالی پیشین θ تابعی نزولی است را اعمال کنیم، یعنی

$$D = \left\{ b \mid \frac{d\pi(\theta|b)}{d\theta} < 0 \right\} \tag{۴}$$

سپس با فرض پیوسته بودن برآوردگر بیز θ یعنی $\hat{\theta}_B$ ، برآوردگر بیزی مورد انتظار برابر است با امید ریاضی برآوردگر بیز تحت توزیع چگالی پیشین b (در صورت وجود)، به عبارت دیگر (برای مشاهده اثبات این مطالب و توضیح‌های بیشتر به هان (۲۰۱۱ و ۱۹۷۷) مراجعه شود)

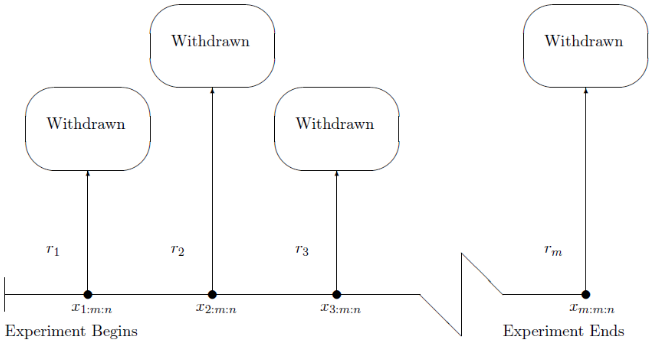
$$\hat{\theta}_{EB} = \int_D \hat{\theta}_B\,(b)\,\pi(b)\,db \tag{۵}$$

که در آن D دامنهٔ متغیر تصادفی b و $\hat{\theta}_B(b)$ برآوردگر بیز θ و $\pi(b)$ نیز تابع چگالی پیشین b روی D است. ساختار مقالهٔ حاضر در هشت بخش ارائه شده است. در بخش دوم، تعاریف اولیه و فرمول‌های لازم برای محاسبهٔ روش پیشنهادی برآوردگرهای بیزی و پارامترهای قابلیت اطمینان بیان شده است. در بخش سوم، با اعمال شرایط مناسب توزیع پیشین $\pi(\theta|b)$، را ارائه می‌دهیم و همچنین قضیه‌ای برای برآوردگرهای بیزی مورد انتظار، تحت توزیع‌های پیشین مختلف برای ابرپارامترهای توزیع پیشین $\pi(b)$، ارائه می‌دهیم؛ همهٔ نتایج این بخش برای برآورد پارامتر توزیع رایلی است. در بخش چهارم، قضیه‌ای برای محاسبهٔ برآوردگر بیزی سلسله مراتبی از پارامتر قابلیت اطمینان سیستم حاصل از توزیع رایلی تحت سه توزیع پیشین مختلف به دست آمده است. در بخش پنجم، قضیه‌ای برای بیان رفتار مجانبی برآوردگرهای پیشنهادی تحت توزیع‌های پیشین مختلف (برآوردگرهای بیزی سلسله مراتبی و برآوردگرهای بیزی مورد انتظار) و رابطهٔ بین این برآوردگرها پرداخته شده است. در بخش ششم این مقاله با استفاده از نرم افزار R تحت چهار طرح سانسور و با ۱۰۰۰۰ تکرار کارایی برآوردگرهای پیشنهادی را با هم مقایسه می‌کنیم، نتایج حاصل در جدول (۲) آورده شده است. همچنین در بخش هفتم با استفاده از داده‌های واقعی و طرح‌های سانسور ارایه شده در جدول (۱) به بررسی کارایی بین برآوردگرها پرداختیم، این نتایج در جداول (۳) الی (۸) آورده شده‌اند. در نهایت، در بخش هشتم به نتیجه‌گیری و پیشنهادها می‌پردازیم.

۱. برآوردگر بیز و سانسور فزاینده نوع دوم

در آزمون‌های طول عمر و قابلیت اطمینان، واحدهایی که مورد آزمایش قرار می‌گیرند گاهی قبل از شکست (از کار افتادگی)، گم می‌شوند و یا از آزمایش خارج می‌شوند، چنین واحدهایی معمولاً واحدهای سانسور شده نامیده می‌شوند. معروف‌ترین طرح‌های سانسور عبارتند از، طرح سانسور نوع اول و طرح سانسور نوع دوم، اما یکی از نقاط ضعف روش‌های سانسور معمول نوع اول و نوع دوم این است که آنها در حذف واحدها در نقطهٔ شکست، انعطاف‌پذیر نیستند، در همین راستا نوع جدیدی از طرح های سانسور که تعمیم یافته طرح سانسور نوع دوم است این مشکل را برطرف کرد و آن را طرح سانسور فزایندهٔ نوع دوم می‌نامند و این امر در سال‌های اخیر موجب محبوبیت آن شده است.

طرح نمونه‌گیری سانسور فزایندهٔ نوع دوم به غیر از آزمون‌های طول عمر صنعتی بلکه در روانشناسی بالینی نیز به کار گرفته می‌شود. حذف واحدها در طرح نمونه‌گیری سانسورهای فزاینده نوع دوم این اجازه را به ما می‌دهد که تا قبل از پایان آزمایش، واحدها را حذف کنیم. بالاکریشنان و آگگاروالا (۲۰۰۰) کتابی با عنوان داده‌های سانسور شده، نوشته‌اند که در آن انواع سانسورها و کاربردهایشان مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین برای مطالعهٔ بیشتر می‌توان به کاندو (۲۰۰۸) و کاندو و پرادهان (۲۰۰۹) و چن و دیگران (۲۰۰۹) و منابع ذکر شده مراجعه کرد. ایلیوپولاس و کرامر (۲۰۱۰) یک طرح کلی را برای داده‌های سانسور شده فزاینده نوع دوم ارائه کردند که در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل۱. نمایش نمونه m تایی از طرح سانسور شده فزایندهٔ نوع دوم، که در آن $x_{r_1:m,n}, x_{r_2:m,n}, \dots, x_{r_m:m,n}$ زمان‌های شکست (واحدهای نمونه) و $r_1, r_2, \dots, r_m$ بیانگر اعداد متناظر از واحدهای حذف شده در آزمایش

طرح نمونه‌گیری سانسور فزایندهٔ نوع دوم بدین صورت می‌باشد، فرض کنید در یک آزمایش طول عمر، n واحد تحت آزمایش در زمان صفر قرار دارند و می‌خواهیم m تا شکست (مرگ) مشاهده شود. هنگامی که اولین شکست مشاهده شد (یعنی زمان مشاهدهٔ اولین واحد نمونه $x_{r_1:m,n}$)، r_1 تا از واحدهای باقی مانده به طور تصادفی انتخاب شده و از آزمایش خارج می‌شوند. در زمان مشاهدهٔ دومین شکست (یعنی زمان مشاهدهٔ دومین واحد نمونه $x_{r_2:m,n}$)، r_2 تا از $n - r_1 - 1$ واحدهای باقیمانده به طور تصادفی انتخاب شده و از آزمایش خارج می‌شوند. در نهایت، در زمان مشاهدهٔ شکست mام (یعنی زمان مشاهده mامین واحد نمونه $x_{r_m:m,n}$)، تمام واحدهای باقی مانده یعنی $r_m = n - m - r_1 - r_2 - \dots - r_{m-1}$ تا از واحدهای آزمایش حذف می‌شوند. در این طرح سانسور، تمامی مقادیر سانسور یعنی $r_1, r_2, \dots, r_m$ همه از پیش مشخص شده‌اند.

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه تصادفی به حجم n از توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال داده شده در (۱) باشد. فرض کنید نمونه $X = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ نمونه‌ای مرتب شده از داده‌های طول عمر و حاصل از سانسور فزاینده نوع دوم به حجم m با طرح سانسور $R = (R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_m = r_m)$ باشد. در این صورت تابع درست‌نمایی از θ برابر است با، (بالاکریشنان و آگگاروالا ۲۰۰۰)

(۶)

$$
\begin{aligned}
L(\underline{x}|\theta) &= A\prod_{i=1}^{m} f\left(x_{(i)}|\theta\right)\left[1 - F\left(x_{(i)}|\theta\right)\right]^{r_i} \\
&= \prod_{i=1}^{m}\left(2\theta x_{(i)} e^{-\theta x_{(i)}{}^2}\right)\left[1 - \left(e^{-\theta x_{(i)}{}^2}\right)\right]^{r_i} \\
&= A(2\theta)^m\left\{\prod_{i=1}^{m} x_{(i)}\right\} e^{-\theta\sum_{i=1}^{m}(1+r_i)x_{(i)}{}^2} \\
&= A(2\theta)^m\left\{\prod_{i=1}^{m} x_{(i)}\right\} e^{-\theta T}
\end{aligned}
$$

که در آن

$$A = n(n - r_1 - 1) \dots \left(n - \sum_{i=1}^{m-1} r_i - m + 1\right)$$

در رویکرد بیزی، θ به عنوان یک متغیر تصادفی با توزیع معلوم(توزیع پیشین) در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله، توزیع پیشین مزدوج به فرم زیر در نظر گرفته شده است.

(۷)

$$\pi(\theta|a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\, \theta^{a-1}\, e^{-b\theta} \ , \qquad \theta > 0$$

که در آن $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$ تابع گاما با ابر پارامترهای $a > 0, b > 0$ می‌باشد.

در روش بیزی ابرپارامترهای a, b مجهول ولی مقداری ثابت می‌باشند، در این صورت توزیع چگالی پسین θ به صورت زیر به دست می‌آید.

(۸)

$$\begin{aligned}\pi(\theta|T) &= \frac{\pi(\theta|a,b)\, L(\underline{x}|\theta)}{\int_0^\infty \pi(\theta|a,b)\, L(\underline{x}|\theta)\, d\theta} \\ &= \frac{\frac{b^a}{\Gamma(a)}\, \theta^{a-1}\, e^{-b\theta} A(2\theta)^m \{\prod_{i=1}^m x_{(i)}\} e^{-\theta T}}{\int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)}\, \theta^{a-1}\, e^{-b\theta} A(2\theta)^m \{\prod_{i=1}^m x_{(i)}\} e^{-\theta T}\, d\theta} \\ &= \frac{(b+T)^{m+1}}{\Gamma(m+a)}\, \theta^m e^{-\theta(b+T)} \\ &\sim \Gamma\left(\alpha = m + a, \beta = \frac{1}{b+T}\right)\end{aligned}$$

که در آن، m حجم نمونه حاصل از طرح سانسور فزاینده نوع دوم و $\mathrm{n - m}$ تعداد واحدهای حذف شده می‌باشد و

$$T = \sum_{i=1}^{m} (1 + r_i) {X_{(i)}}^2, \quad \sum_{i=1}^{m} r_i = \mathrm{n - m}$$

بنابراین توزیع چگالی پسین θ، یک توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = m + a$ و $\beta = \frac{1}{b+T}$ است، در این صورت برآوردگر بیز پارامتر θ، تحت تابع زیان درجه دوم به صورت زیر تعریف می‌شود.

(۹)

$$\hat{\theta}_{\mathrm{B}} = \delta_B^{\pi}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}(\theta|T) = \alpha\beta = \frac{\mathrm{m + a}}{\mathrm{b + T}}.$$

۲. برآوردگر بیزی مورد انتظار

در محاسبهٔ برآوردگر بیز θ، ابرپارامترهای موجود در آن به عنوان متغیرهای مجهول ولی ثابت فرض شده‌اند. اما در رویکرد سلسله مراتبی لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲)، این پارامترها به عنوان متغیرهای تصادفی در مدل ظاهر می‌شوند تا تابع چگالی پسین معقول‌تری داشته باشیم. برای رسیدن به چنین تابع چگالی پسینی، هان (۱۹۷۷) نشان داد که تابع چگالی پیشین باید تابعی نزولی از θ باشد. پس با مشتق‌گیری از تابع پیشین داریم،

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\pi(\theta|a,b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}e^{-b\theta}\theta^{a-2}\{(a-1)-b\theta\}=0$$
$$\rightarrow\theta=\frac{a-1}{b}$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\pi(\theta|a,b)=\begin{cases}<0 & \theta>\frac{a-1}{b}\\ =0 & \theta=\frac{a-1}{b}\\ >0 & \theta<\frac{a-1}{b}\end{cases}$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\pi(\theta|a,b)<0\Leftrightarrow 0<a<1, b>0, \theta>0$$

بنابراین

$$D=\{(a,b)|\,0<a<1,\;\; b>0\} \tag{۱۰}$$

حال با محدودیت به دست آمده برای ابرپارامترها، شرایط لازم برای توزیع احتمال پسین مناسب‌تر فراهم شده است. اما در این محدودیت متغیر b بیکران است و برای رفع این مشکل، فرض می‌کنیم متغیر b توسط مقدار عددی و معلوم c مغلوب شده باشد، زیرا برگر (۱۹۸۲) بیان کرد که نیرومند بودن برآوردگر نیازی به بزرگ بودن آن ندارد (برای مطالعهٔ بیشتر به اسفندیاری و دیگران (۱۳۹۵) مراجعه شود)، بدون از دست دادن حالت کلی و برای سادگی کار، می‌توان فرض کرد $a=1$ و $0<b<c$. با اعمال این محدودیت تابع چگالی پیشین گامای θ به توزیع نمایی با پارامتر b تبدیل می‌شود. در این صورت ضابطهٔ تابع چگالی پیشین به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\pi(\theta|b)=\mathrm{b}\,e^{-b\theta}\quad,\;\; 0<b<c,\;\; \theta>0 \tag{۱۱}$$

در قضیه‌های (۱)، (۲) و (۳) با استفاده از سه توزیع پیش فرض، برای بررسی و تأثیر توزیع‌های مختلف پیشین، بر روی برآوردگر بیزی مورد انتظار پارامتر مقیاس توزیع رایلی تحت نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم، مورد بررسی قرار گرفته است.

قضیهٔ ۱. برای تابع چگالی احتمال رایلی داده شده در رابطهٔ (۱)، اگر تابع چگالی پیشین به صورت رابطهٔ (۱۱) داده شده باشد، آن‌گاه:

الف) تحت تابع زیان درجهٔ دوم خطا، برآوردگر بیز پارامتر θ برابر است با،

$$\hat{\theta}_{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{m}+1}{\mathrm{b}+\mathrm{T}} \tag{۱۲}$$

ب) برای توابع چگالی احتمال پیشین مختلف b،

$$\pi_1(b)=\frac{2(c-b)}{c^2}\;,\;\; 0<b<c \tag{۱۳}$$

$$\pi_2(b)=\frac{1}{c}\;,\;\;\; 0<b<c \tag{۱۴}$$

$$\pi_3(b) = \frac{2b}{c^2}\ , \ \ 0 < b < c \tag{۱۵}$$

برآوردگر بیزی مورد انتظار به ترتیب برابر است با

$$\hat{\theta}_{EB1} = \frac{2(m+1)}{c^2}\left[(c+T)\ ln\left(\frac{c+T}{T}\right) - c\right] \tag{۱۶}$$

$$\hat{\theta}_{EB2} = \frac{m+1}{c}\ \ln\left(\frac{c+T}{T}\right) \tag{۱۷}$$

$$\hat{\theta}_{EB3} = \frac{2(m+1)}{c^2}\left[c - T\ln\left(\frac{c+T}{T}\right)\right] \tag{۱۸}$$

برهان (الف): با قرار دادن $a = 1$ در برآوردگر بیز $\hat{\theta}_B$ داده شده در رابطهٔ (۹)، نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید، پس،

$$\hat{\theta}_B = \frac{m+1}{b+T}$$

برهان (ب): برای برآوردگر بیز $\hat{\theta}_B$ داده شـــده در رابطهٔ (۱۲) و با توجه به تعریف برآوردگر بیز مورد انتظار $\hat{\theta}_{EB}$ در رابطهٔ (۵) داریم،

$$\hat{\theta}_{EB} = \int_D \hat{\theta}_B\,(b)\ \pi(b)\ db\ \ \ , \qquad D = \{(a,b)\ |a = 1, 0 < b < c\}$$

بنابراین، برآوردگر بیز مورد انتظار برای تابع چگالی احتمال داده شده در رابطهٔ (۱۳)، با استفاده از تعریف به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{EB1} &= \int_D \hat{\theta}_B\,(b)\ \pi_1(b)\ db \\ &= \int_0^c \frac{m+1}{b+T}\ \frac{2(c-b)}{c^2}\ db \\ &= \frac{2(m+1)}{c^2}\int_0^c \frac{(c-b)}{b+T}\ \ db \\ &= \frac{2(m+1)}{c^2}\left[(c+T)\ ln\left(\frac{c+T}{T}\right) - c\right]\end{aligned}$$

همچنین به طور متشـابه، برای محاســبهٔ برآوردگر بیز مورد انتظار $\hat{\theta}_{EB}$ تحت تابع چگالی پیشــین داده شـده در رابطهٔ (۱۴) داریم،

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{EB2} &= \int_D \hat{\theta}_B\,(b)\ \pi_2(b)\ db \\ &= \int_0^c \frac{m+1}{b+T}\ \frac{1}{c}\ db \\ &= \frac{m+1}{c}\ \ln\left(\frac{c+T}{T}\right)\end{aligned}$$

در نهایت برآوردگر بیز مورد انتظار $\hat{\theta}_{EB}$ برای تابع چگالی پیشین (۱۵)، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{\mathrm{EB3}} &= \int_D \hat{\theta}_B\,(b)\,\pi_1(b)\,db \\ &= \int_0^{\mathrm{c}} \frac{\mathrm{m}+1}{\mathrm{b}+\mathrm{T}}\,\frac{2\mathrm{b}}{c^2}\,\mathrm{db} \\ &= \frac{2(\mathrm{m}+1)}{c^2}\left[c-\mathrm{T}\ln\left(\frac{\mathrm{c}+\mathrm{T}}{\mathrm{T}}\right)\right].\end{aligned}$$

۱.۲. برآوردگر بیزی سلسله مراتبی: اگر b ابرپارامتری در پارامتر θ و متغیر تصادفی θ دارای تابع چگالی پیشین $\pi_1(\theta|b)$ و تابع چگالی پیشین ابرپارامتر b به صورت $\pi_2(\mathrm{b})$ باشد، در این صورت بنابر پیشنهاد لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲) تابع چگالی پیشین سلسله مراتبی متناظر با θ برابر است با

$$\pi(\theta) = \int_\Lambda \pi_1(\theta|b)\pi_2(b)db\ , \qquad b\in\Lambda$$

فرض کنید تابع چگالی پیشین θ یعنی $\pi(\theta|b)$ به صورت (۱۱) تعریف شده و همچنین فرض کنید توابع چگالی پیشین b به صورت (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) تعریف شده باشند. در این صورت توابع چگالی پیشین سلسله مراتبی متناظر با چگالی‌های b برابر است با:

$$\pi_4(\theta) = \frac{2}{c^2}\int_0^c b(c-b)e^{-b\theta}\ db \tag{۱۹}$$

$$\pi_5(\theta) = \frac{1}{c}\int_0^c be^{-b\theta}\ db \tag{۲۰}$$

$$\pi_6(\theta) = \frac{2}{c^2}\int_0^c b^2e^{-b\theta}\ db \tag{۲۱}$$

قضیهٔ ۲: فرض کنید تابع چگالی احتمال رایلی (۱) داده شده باشد، اگر توابع چگالی پیشین سلسله مراتبی θ به صورت (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) باشند. آن‌گاه تحت تابع زیان توان دوم خطا، برآوردگرهای بیزی سلسله مراتبی متناظر با هر یک از توابع پیشین θ به ترتیب برابر است با:

$$\hat{\theta}_{\mathrm{HB1}} = (m+1)\frac{\int_0^c \frac{b(c-b)}{(b+T)^{m+2}}\ db}{\int_0^c \frac{b(c-b)}{(b+T)^{m+1}}\ db} \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned}&= (m+1)\left\{\frac{c+2T}{m}\left[\frac{1}{T^m}-\frac{1}{(T+c)^m}\right]-\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{T^{m-1}}-\frac{1}{(T+c)^{m-1}}\right]\right.\\ &\qquad\left.-\frac{T(c+T)}{m+1}\left[\frac{1}{T^{m+1}}-\frac{1}{(T+c)^{m+1}}\right]\right\}\\ &\Big/\left\{\frac{c+2T}{m-1}\left[\frac{1}{T^{m-1}}-\frac{1}{(T+c)^{m-1}}\right]-\frac{1}{m-2}\left[\frac{1}{T^{m-2}}-\frac{1}{(T+c)^{m-2}}\right]\right.\\ &\qquad\left.-\frac{T(c+T)}{m}\left[\frac{1}{T^m}-\frac{1}{(T+c)^m}\right]\right\}\end{aligned}$$

و

$$\hat{\theta}_{\mathrm{HB2}}=(m+1)\frac{\int_0^c \frac{b}{(b+T)^{m+2}}\,db}{\int_0^c \frac{b}{(b+T)^{m+1}}\,db} \quad (۲۳)$$

$$=(m+1)\left\{\frac{1}{m}\left[\frac{1}{T^m}-\frac{1}{(T+c)^m}\right]-\frac{T}{m+1}\left[\frac{1}{T^{m+1}}-\frac{1}{(T+c)^{m+1}}\right]\right\}$$

$$/\left\{\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{T^{m-1}}-\frac{1}{(T+c)^{m-1}}\right]-\frac{T}{m}\left[\frac{1}{T^m}-\frac{1}{(T+c)^m}\right]\right\}$$

و

(۲۴)

$$\hat{\theta}_{\mathrm{HB3}}=(m+1)\frac{\int_0^c \frac{b^2}{(b+T)^{m+2}}\,db}{\int_0^c \frac{b^2}{(b+T)^{m+1}}\,db}$$

$$=(m+1)\left\{\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{T^{m-1}}-\frac{1}{(T+c)^{m-1}}\right]-\frac{2T}{m}\left[\frac{1}{T^m}-\frac{1}{(T+c)^m}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{T^2}{m+1}\left[\frac{1}{T^{m+1}}-\frac{1}{(T+c)^{m+1}}\right]\right\}$$

$$/\left\{\frac{1}{m-2}\left[\frac{1}{T^{m-2}}-\frac{1}{(T+c)^{m-2}}\right]-\frac{2T}{m-1}\left[\frac{1}{T^{m-1}}-\frac{1}{(T+c)^{m-1}}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{T^2}{m}\left[\frac{1}{T^m}-\frac{1}{(T+c)^m}\right]\right\}$$

برهان: بنابر تعریف فرمول بیز، ابتدا تابع چگالی پسین، تحت هر یک از توابع چگالی پیشین سلسله مراتبی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$h_4(\theta|T)=\frac{\pi_4(\theta)\,L(\underline{x}|\theta)}{\int_0^\infty \pi_4(\theta)\,L(\underline{x}|\theta)\,d\theta}$$

$$=\frac{\frac{2}{c^2}\int_0^c b(c-b)e^{-b\theta}\;dbA(2\theta)^m\{\prod_{i=1}^m x_{(i)}\}e^{-\theta T}}{\int_0^\infty \frac{2}{c^2}\int_0^c b(c-b)e^{-b\theta}\;dbA(2\theta)^m\{\prod_{i=1}^m x_{(i)}\}e^{-\theta T}\,d\theta}$$

$$=\frac{\theta^m e^{-\theta T}\int_0^c b(c-b)e^{-b\theta}\;db}{\int_0^c \frac{\Gamma(m+1)}{(b+T)^{m+1}}b(c-b)\;db}$$

به طور متشابه داریم

$$h_5(\theta|T)=\frac{\pi_5(\theta)\,L(\underline{x}|\theta)}{\int_0^\infty \pi_5(\theta)\,L(\underline{x}|\theta)\,d\theta}$$

$$=\frac{\theta^m e^{-\theta T}\int_0^c be^{-b\theta}\;db}{\int_0^c \frac{\Gamma(m+1)}{(b+T)^{m+1}}b\;db}$$

و

$$h_6(\theta|T) = \frac{\pi_6(\theta)\, L(\underline{x}|\theta)}{\int_0^\infty \pi_6(\theta)\, L(\underline{x}|\theta)\, d\theta}$$
$$= \frac{\theta^m e^{-\theta T} \int_0^c b^2 e^{-b\theta}\ db}{\int_0^c \frac{\Gamma(m+1)}{(b+T)^{m+1}} b^2\ db}$$

می‌دانیم برآورد بیزی θ تحت تابع زیان توان دوم خطا، برابر است با امید ریاضی توزیع پسین. در این صورت متناظر با توزیع‌های پسین $h_6, h_5\ , h_4$ داریم،

$$\hat{\theta}_{\mathrm{HB1}} = \delta_B^{H_1}(\mathrm{T}) = \int_0^\infty \theta\ h_4(\theta|T)\, d\theta$$
$$= \int_0^\infty \theta \frac{\theta^m e^{-\theta T} \int_0^c b(c-b) e^{-b\theta}\ db}{\int_0^c \frac{\Gamma(m+1)}{(b+T)^{m+1}} b(c-b)\ db}$$
$$= (m+1) \frac{\int_0^c \frac{b(c-b)}{(b+T)^{m+2}}\ db}{\int_0^c \frac{b(c-b)}{(b+T)^{m+1}}\ db}$$

به طور متشابه داریم،

$$\hat{\theta}_{\mathrm{HB2}} = \delta_B^{H_2}(\mathrm{T}) = \int_0^\infty \theta\ h_5(\theta|T)\, d\theta$$
$$= (m+1) \frac{\int_0^c \frac{b}{(b+T)^{m+2}}\ db}{\int_0^c \frac{b}{(b+T)^{m+1}}\ db}$$

و

$$\hat{\theta}_{\mathrm{HB3}} = \delta_B^{H_3}(\mathrm{T}) = \int_0^\infty \theta\ h_6(\theta|T)\, d\theta$$
$$= (m+1) \frac{\int_0^c \frac{b^2}{(b+T)^{m+2}}\ db}{\int_0^c \frac{b^2}{(b+T)^{m+1}}\ db}$$

۲.۲. ویژگی‌های برآوردگر بیز مورد انتظار و بیز سلسله مراتبی: هدف ما در این بخش، بررسی رفتار مجانبی برآوردگرها و بررسی رابطهٔ برآوردگرهای پیشنهادی، برآوردگر بیز مورد انتظار و برآوردگر بیز سلسله مراتبی در قضایای (۱) و (۲) تحت توزیع‌های پیش فرض داده شده در رابطهٔ (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) است. اولین مطلب قابل بحث، بررسی رابطهٔ بین برآوردگرهای به دست آمده در قضیهٔ (۱) یعنی $\hat{\theta}_{\mathrm{EB1}}$، $\hat{\theta}_{\mathrm{EB2}}$ و $\hat{\theta}_{\mathrm{EB3}}$ بر اساس مقادیر برآوردگر بسنده کامل T و رفتار حدی این برآوردگرها برای زمانی است که، برآوردگر T به قدر کافی بزرگ باشد، یعنی $\mathrm{T} \to \infty$. دومین مطلب قابل بحث، بررسی رابطه بین برآوردگرهای به دست آمده در قضیهٔ (۱) یعنی $(i = 1, 2, 3)$, $\hat{\theta}_{\mathrm{EB}i}$ و

برآوردگرهای به دست آمده از قضیهٔ (۲) یعنی $\hat{\theta}_{\mathrm{HB}i}\,,\ (i=1,2,3)$ تحت توزیع‌های پیش فرض می‌باشد. مطالب بیان شده فوق در قضیهٔ (۳) ارائه شده است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید شرایط قضیه‌های (۱) و (۲) برقرار باشند و همچنین فرض کنید $\hat{\theta}_{\mathrm{EB}i}\,,\ (i=1,2,3)$ برآوردگرهای بیز مورد انتظار و $\hat{\theta}_{\mathrm{HB}i}\,,(i=1,2,3)$ برآوردگرهای بیز سلسله مراتبی نسبت به توابع پیشین داده شده باشند. در این صورت به ازای $0<c<T$ داریم:

الف) $\hat{\theta}_{\mathrm{EB1}}>\hat{\theta}_{\mathrm{EB2}}>\hat{\theta}_{\mathrm{EB3}}$

ب) $\lim\limits_{T\to\infty}\hat{\theta}_{\mathrm{EB1}}=\lim\limits_{T\to\infty}\hat{\theta}_{\mathrm{EB2}}=\lim\limits_{T\to\infty}\hat{\theta}_{\mathrm{EB3}}$

ج) $\lim\limits_{T\to\infty}\hat{\theta}_{\mathrm{EB}i}=\lim\limits_{T\to\infty}\hat{\theta}_{\mathrm{HB}i}\,,\qquad (i=1,2,3)$

برهان: (الف) بنا بر نتایج قضیهٔ (۱) و رابطه‌های (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{\mathrm{EB1}}-\hat{\theta}_{\mathrm{EB2}}&=\frac{2(m+1)}{c^2}\left[(c+T)\,ln\left(\frac{c+T}{T}\right)-c\right]-\frac{\mathrm{m}+1}{\mathrm{c}}\ln\left(\frac{\mathrm{c}+\mathrm{T}}{\mathrm{T}}\right)\\
&=\frac{\mathrm{m}+1}{\mathrm{c}}\,ln\left(\frac{c+T}{T}\right)+\frac{2(m+1)}{c^2}T ln\left(\frac{c+T}{T}\right)-\frac{2(m+1)}{c}\\
&=\frac{\mathrm{m}+1}{c^2}\left\{(c+2T)ln\left(\frac{c+T}{T}\right)-2c\right\}\\
&=\frac{\mathrm{m}+1}{c^2}\left\{(c+2T)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{c}{T}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}-2c\right\},\qquad \frac{c}{T}<1\\
&=\frac{\mathrm{m}+1}{c^2}\Bigg\{(c+2T)\Bigg(\left(\frac{c}{T}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{T}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{c}{T}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{T}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{c}{T}\right)^5\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{6}\left(\frac{c}{T}\right)^6+\cdots\Bigg)-2c\Bigg\}\\
&=\frac{\mathrm{m}+1}{c^2}\Bigg\{\left(\frac{c^2}{T}-\frac{1}{2}\frac{c^{\,3}}{T^2}+\frac{1}{3}\frac{c^{\,4}}{T^3}-\frac{1}{4}\frac{c^{\,5}}{T^4}+\frac{1}{5}\frac{c^{\,6}}{T^5}-\frac{1}{6}\frac{c^{\,7}}{T^6}+\cdots\right)\\
&\qquad +\left(2c-\frac{c^2}{T}+\frac{2}{3}\frac{c^{\,3}}{T^2}-\frac{1}{2}\frac{c^{\,4}}{T^3}+\frac{2}{5}\frac{c^{\,5}}{T^4}-\frac{1}{3}\frac{c^{\,6}}{T^5}+\cdots\right)-2c\Bigg\}\\
&=\frac{\mathrm{m}+1}{c^2}\Bigg\{\left(-\frac{1}{2}\frac{c^{\,3}}{T^2}+\frac{1}{3}\frac{c^{\,4}}{T^3}+\frac{2}{3}\frac{c^{\,3}}{T^2}-\frac{1}{2}\frac{c^{\,4}}{T^3}\right)\\
&\qquad +\left(-\frac{1}{4}\frac{c^{\,5}}{T^4}+\frac{1}{5}\frac{c^{\,6}}{T^5}+\frac{2}{5}\frac{c^{\,5}}{T^4}-\frac{1}{3}\frac{c^{\,6}}{T^5}\right)+\cdots\Bigg\}\\
&=\frac{\mathrm{m}+1}{c^2}\left\{\left(\frac{1}{6}\frac{c^{\,3}}{T^2}+\frac{1}{6}\frac{c^{\,4}}{T^3}\right)+\left(\frac{3}{20}\frac{c^{\,5}}{T^4}-\frac{2}{15}\frac{c^{\,6}}{T^5}\right)+\cdots\right\}\\
&=\frac{\mathrm{m}+1}{c^2}\left\{\frac{1}{6}\frac{c^{\,3}}{T^2}\left(1-\frac{c}{T}\right)+\frac{1}{60}\frac{c^{\,5}}{T^4}\left(9-8\frac{c}{T}\right)+\cdots\right\}>0
\end{aligned}$$

به طور متشابه می‌توان نشان داد،

$$\hat{\theta}_{\mathrm{EB2}}-\hat{\theta}_{\mathrm{EB3}}>0$$

برهان (ب):

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\left(\hat{\theta}_{EB1}-\hat{\theta}_{EB2}\right) &= \lim_{T\to\infty}\left(\hat{\theta}_{EB2}-\hat{\theta}_{EB3}\right)\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{m+1}{c^2}\left\{\frac{1}{6}\frac{c}{T^2}^3\left(1-\frac{c}{T}\right)+\frac{1}{60}\frac{c}{T^4}^5\left(9-8\frac{c}{T}\right)+\cdots\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_{EB1}=\lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_{EB2}=\lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_{EB3}$$

برهان (ج): می‌دانیم اگر t متغیری پیوســته و انتگرال‌پذیر ریمان بر بازه $[a\,,b]$ باشــد، آن‌گاه بنا بر قضــیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال‌ها، مقدار b_1ی در بازهٔ $[a\,,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt=f(b_1)$$

در این صورت چون b متغیری پیوسته و انتگرال پذیر ریمان است داریم

$$\begin{aligned}\int_0^c\frac{b(c-b)}{(T+b)^{m+2}}\,db &= \frac{1}{(T+b_1)^{m+2}}\int_0^c b(c-b)\,db\\ &= \frac{c^3}{6}\frac{1}{(T+b_1)^{m+2}}\end{aligned}$$

به طور مشابه بنابر قضیه مقدار میانگین، مقدار b_2ی در بازه $[0\,,c]$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}\int_0^c\frac{b(c-b)}{(T+b)^{m+1}}\,db &= \frac{1}{(T+b_2)^{m+1}}\int_0^c b(c-b)\,db\\ &= \frac{c^3}{6}\frac{1}{(T+b_2)^{m+1}}\end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری و ساده کردن $\hat{\theta}_{HB1}$ داریم

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{HB1} &= (m+1)\frac{\int_0^c\frac{b(c-b)}{(b+T)^{m+2}}\,db}{\int_0^c\frac{b(c-b)}{(b+T)^{m+1}}\,db}\\ &= (m+1)\frac{\frac{c^3}{6}\frac{1}{(T+b_1)^{m+2}}}{\frac{c^3}{6}\frac{1}{(T+b_2)^{m+1}}}\\ &= \frac{m+1}{T+b_1}\left(\frac{T+b_2}{T+b_1}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

با حدگیری از طرفین خواهیم داشت

$$\lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_{HB1} = \lim_{T\to\infty}\frac{m+1}{T+b_1}\left(\frac{T+b_2}{T+b_1}\right)^{m+1} = 0$$

به طور مشابه داریم

$$\lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_{HB2} = \lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_{HB3} = 0$$

با استفاده از بسط ماک لورن برای $\frac{c}{T} < 1$ داریم

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{EB1} &= \frac{2(m+1)}{c^2}\left[(c+T)\, ln\left(\frac{c+T}{T}\right) - c\right] \\
&= \frac{2(m+1)}{c^2}\left[(c+T)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{c}{T}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1} - c\right] \\
&= \frac{2(m+1)}{c^2}\left[(c+T)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{c}{T}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1} - c\right] \\
&= \frac{2(m+1)}{c^2}\Bigg\{(c+T)\Bigg(\left(\frac{c}{T}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{T}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{c}{T}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{c}{T}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{c}{T}\right)^5 \\
&\qquad - \frac{1}{6}\left(\frac{c}{T}\right)^6 + \cdots\Bigg) - c\Bigg\} \\
&= \frac{2(m+1)}{c^2}\Bigg\{\left(\frac{c^2}{T} - \frac{1}{2}\frac{c^3}{T^2} + \frac{1}{3}\frac{c^4}{T^3} - \frac{1}{4}\frac{c^5}{T^4} + \frac{1}{5}\frac{c^6}{T^5} - \frac{1}{6}\frac{c^7}{T^6} + \cdots\right) \\
&\qquad + \left(c - \frac{1}{2}\frac{c^2}{T} + \frac{1}{3}\frac{c^3}{T^2} - \frac{1}{4}\frac{c^4}{T^3} + \frac{1}{5}\frac{c^5}{T^4} - \frac{1}{6}\frac{c^6}{T^5} + \cdots\right) - c\Bigg\} \\
&= \frac{2(m+1)}{c^2}\Bigg\{\left(\frac{c^2}{T} - \frac{1}{2}\frac{c^3}{T^2} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{T} + \frac{1}{3}\frac{c^3}{T^2}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{3}\frac{c^4}{T^3} - \frac{1}{4}\frac{c^5}{T^4} - \frac{1}{4}\frac{c^4}{T^3} + \frac{1}{5}\frac{c^5}{T^4}\right) + \cdots\Bigg\} \\
&= \frac{2(m+1)}{c^2}\left\{\left(\frac{c^2}{2T} - \frac{1}{6}\frac{c^3}{T^2}\right) + \left(\frac{1}{12}\frac{c^4}{T^3} - \frac{1}{20}\frac{c^5}{T^4}\right) + \cdots\right\} \\
&= \frac{2(m+1)}{c^2}\left\{\frac{1}{6}\frac{c^2}{T}\left(3 - \frac{c}{T}\right) + \frac{1}{60}\frac{c^4}{T^3}\left(5 - 3\frac{c}{T}\right) + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

با حد گیری از طرفین داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_{EB1} &= \lim_{T\to\infty}\frac{2(m+1)}{c^2}\left\{\frac{1}{6}\frac{c^2}{T}\left(3 - \frac{c}{T}\right) + \frac{1}{60}\frac{c^4}{T^3}\left(5 - 3\frac{c}{T}\right) + \cdots\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

به طور مشابه داریم

$$\lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_{EB2} = \lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_{EB3} = 0$$

۲.۳. شبیه‌سازی: در این بخش برای مقایسهٔ کارایی برآوردگرهای پیشنهادی از معیار RMSE با استفاده از نرم‌افزار R با ۱۰۰۰۰ تکرار می‌پردازیم. برای محاسبهٔ RMSE برآوردگرهای پیشنهادی در این تحقیق از چهار طرح مختلف سانسور

فزاینده نوع دوم ارائه شده در جدول (۱) استفاده می‌کنیم، که در آن برای تولید نمونه‌های سانسور نوع دوم با طرح‌های سانسور $R=(r_1,r_2,\dots,r_m)$ از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم. نتایج حاصل، تحت چهار طرح سانسور فزایندهٔ نوع دوم در جدول (۲) ارائه شده است.

الگوریتم شبیه‌سازی برای تولید نمونه تصادفی سانسور نوع دوم فزاینده به حجم m از توزیع رایلی با پارامتر θ به صورت زیر است:

گام اول: ابتدا نمونه‌ای به حجم m از توزیع یکنواخت بر بازهٔ $(0,1)$ تولید می‌کنیم، یعنی

$$W_i \sim U(0,1)\,, \qquad i=1,\dots,m$$

گام دوم: متغیرهای V_iها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$V_i = W_i^{\frac{1}{(i+R_m+R_{m-1}+\cdots+R_{m-i+1})}}\,, \qquad i=1,\dots,m$$

گام سوم: نمونه سانسور فزاینده نوع دوم از توزیع یکنواخت بر بازه $(0,1)$ به صورت زیر تولید می‌کنیم.

$$U_{(i)} = 1 - V_m V_{m-1} \dots V_{m-i+1} \sim U(0,1)\,, \qquad i=1,\dots,m$$

گام چهارم: نهایتاً نمونه سانسور فزاینده نوع دوم از توزیع رایلی با پارامتر θ به صورت زیر به دست می‌آید

$$X_{(i)} = \sqrt{\frac{1}{\theta} ln\big(1-U_{(i)}\big)}\,, \qquad i=1,\dots,m$$

برای محاسبهٔ معیار $RMSE$ برای برآوردگرهای پیشنهادی مراحل (۱) تا (۴) الگوریتم فوق را K بار تکرار می‌کنیم سپس قرار می‌دهیم

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{k}\big(\theta-\hat{\theta}_j\big)^2}$$

نتایج حاصل از جدول (۲) بیان کنندهٔ آن است که در تمام چهار طرح پیشنهادی، برآوردگرهای بیز مورد انتظار کاراتر از برآوردگر بیز سلسله مراتبی است زیرا در تمام حالات داریم، $RMSE\big(\hat{\theta}_{\mathrm{EB}i}\big) < RMSE\big(\hat{\theta}_{\mathrm{Hbi}}\big),\ i=1,2,3$.

جدول(۱): اندازهٔ نمونهٔ مؤثر و طرح سانسور فزایندهٔ نوع دوم

شماره	(اندازه نمونه موثر، اندازه نمونه)	طرح سانسور فزاینده نوع دوم
(۱)	(۲۵ ،۲۳)	R=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2)
(۲)	(۲۵ ،۱۳)	R=(0,0,3,0,0,2,0,0,4,0,2,1,0)
(۳)	(۲۵ ،۱۲)	R=(0,0,4,2,0,0,4,0,0,0,3,0)
(۴)	(۲۵ ،۱۰)	R=(0,,4,,0,2,4,0,0,3)

جدول شماره (۲): مقادیر شبیه سازی شده، ریشه توان دوم خطا، تحت چهار نمونه سانسور فزاینده نوع دوم

اندازه نمونه موثر	$RMSE(\hat{\theta}_{B})$	$RMSE(\hat{\theta}_{EB1})$	$RMSE(\hat{\theta}_{EB2})$	$RMSE(\hat{\theta}_{EB3})$	$RMSE(\hat{\theta}_{HB1})$	$RMSE(\hat{\theta}_{HB2})$	$RMSE(\hat{\theta}_{HB3})$
m =23	*0.0002039728*	*0.0002039738*	*0.0002039729*	*0.0002039721*	*0.0002061021*	*0.000203972*	*0.0002029176*
m = 13	*0.0001340539*	*0.0001340546*	*0.000134054*	*0.0001340534*	*0.0001326499*	*0.0001340533*	*0.00013476*
m =12	*9.548849e-05*	*9.548885e-05*	*9.548854e-05*	*9.548823e-05*	*9.386207e-05*	*9.548819e-05*	*9.631907e-05*
m =11	*9.14374e-05*	*9.143786e-05*	*9.143745e-05*	*9.143704e-05*	*9.014101e-05*	*9.143706e-05*	*9.208824e-05*

۳. مثال کاربردی

در این بخش به برآورد پارامتر مقیاس توزیع رایلی به روش‌های مختلف تحت چهار طرح سانسور فزاینده نوع دوم پرداخته می‌شود. با استفاده از داده‌های واقعی در جدول (۳) که از ون و همکارانش (۲۰۱۱) ارائه شده در این بخش به برآورد پارامتر مقیاس توزیع رایلی می‌پردازیم. همچنین برای برآورد پارامترها با استفاده از برآوردگرهای پیشنهادی از داده‌های واقعی استفاده شده است. داده‌های واقعی که ما در این مقاله از آن‌ها استفاده کردیم ون و همکارانش (۲۰۱۱) نشان دادند که این داده‌ها دارای توزیع رایلی می‌باشند همچنین در همان مقاله چهار نمونه مختلف با استفاده از طرح سانسور فزاینده نوع دوم ارائه شده است که در جداول (۴) الی (۷) مشاهده می‌کنید. در نتیجه نمونه‌های ممکن حاصل از این چهار طرح و نمونه کامل در جداول (۳) الی (۷) آورده شده است. در نهایت، مقادیر برآوردگرهای پیشنهادی تحت چهار طرح نمونه سانسور فزاینده نوع دوم، در جدول (۸) ارائه شده است. همان طور که انتظار می‌رفت این مقادیر همانند نتایج بند (الف) از قضیهٔ (۳) بیانگر آن است که در تمامی حالات مقادیر برآوردگر بیزی مورد انتظار، کمتر از مقادیر بیزی سلسله مراتبی است.

جدول شماره (۳): نمونه کامل به حجم $n = 25$ از داده‌های واقعی توزیع رایلی

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{i:m:n}$	7.88	28.92	33.00	41.52	42.12	45.60	48.48	51.84	51.96
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x_{i:m:n}$	54.12	55.56	67.80	67.80	67.80	68.64	68.64	68.88	84.12
i	19	20	21	22	23	24	25		
$x_{i:m:n}$	93.12	9.64	105.12	105.84	127.92	128.04	173.40		

جدول شماره (۴): نمونه حاصل از طرح سانسور شماره (۱)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{i:m:n}$	17.88	28.92	33.00	41.52	42.12	45.60	48.48	51.84	51.96
r_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x_{i:m:n}$	54.12	55.56	67.80	67.80	67.80	68.64	68.64	68.88	84.12
r_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	19	20	21	22	23				
$x_{i:m:n}$	93.12	9.64	105.12	105.84	127.92				
r_i	0	0	0	0	0				

جدول شماره (۵): نمونه حاصل از طرح سانسور شماره (۲)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{i:m:n}$	17.88	28.92	33.00	42.12	45.60	48.48	51.84	51.96	67.80
r_i	0	0	3	0	0	2	0	0	4
i	10	11	12	13					
					127.92$x_{i:m:n}$		68.64	84.12	93.12
r_i	0	2	1	0					

جدول شماره (۶): نمونه حاصل از طرح سانسور شماره (۳)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{i:m:n}$	17.88	28.92	33.00	51.84	51.96	67.80	68.64	93.12	98.64
r_i	0	0	4	2	0	0	4	0	0
i	10	11	12						
							127.92$x_{i:m:n}$	105.12	105.84
r_i	0	3	0						

جدول شماره (۷): نمونه حاصل از طرح سانسور شماره (۴)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{i:m:n}$	17.88	28.92	33.00	51.84	51.96	67.80	68.64	98.64	105.12
r_i	0	0	4	2	0	2	4	0	0
i	10								
$x_{i:m:n}$	105.84								
r_i	3								

جدول شماره (۸): مقادیر برآوردگرها، تحت چهار نمونه سانسور فزاینده نوع دوم

طرح سانسور	$\hat{\theta}_B$	$\hat{\theta}_{EB1}$	$\hat{\theta}_{EB2}$	$\hat{\theta}_{EB3}$	$\hat{\theta}_{HB1}$	$\hat{\theta}_{HB2}$	$\hat{\theta}_{HB3}$
(۱)	0.9744044	0.9743237	0.9743945	0.9744653	0.9743827	0.9744514	0.9744911
(۲)	0.9631918	0.9628467	0.9631395	0.9634367	0.9630331	0.9633023	0.9634915
(۳)	0.9781831	0.9780434	0.9780434	0.9782844	0.9781384	0.9782535	0.9783232
(۴)	0.9744044	0.9743237	0.9743945	0.9744653	0.9743827	0.9744514	0.9744911

۴. نتیجه‌گیری

هدف اصلی ما در این مقاله، بررسی رابطهٔ بین برآوردگرهای بیزی مورد انتظار و برآوردگر بیزی سلسله مراتبی پارامتر مقیاس توزیع رایلی تحت داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم بود، به همین منظور ابتدا تحت تابع زیان درجه دوم خطا، برآوردگر بیزی پارامتر θ را برای توزیع رایلی با توزیع پیشین مزدوج گاما و نمونه تصادفی حاصل از طرح سانسور فزاینده نوع دوم به دست آوردیم، سپس با در نظر گرفتن سه توزیع مختلف برای ابر پارامترهایی که در توزیع پیشین ظاهر شده برآوردگرهای بیزی سلسله مراتبی و برآوردگرهای بیزی مورد انتظار را به ترتیب در قضایای (۱) و (۲) ارائه شده‌اند و در نهایت برای بررسی رفتار مجانبی برآوردگرهای بیزی سلسله مراتبی و برآوردگر بیزی مورد انتظار و بررسی رابطهٔ بین برآوردگرهای به دست آمده قضیهٔ (۳) ارائه شد. همان طور که انتظار می‌رفت چون برآوردگرهای بیزی مورد انتظار، برآوردگرهای تعمیم یافته روش سلسله مراتبی هستند در نتیجه رفتار این برآوردگرها در حالت مجانبی یکسان بود. روش دیگری برای اثبات قضایای (۱)، (۲) و (۳) را می‌توان در مقاله راشد (۲۰۱۷) دید.

References

۱. حسن اسفندیاری‌فر، پرویز نصیری، علی شادرخ، موسی گلعلی‌زاده لهی (۱۳۹۵)، برآورد پارامتر نسبت در توزیع دوجمله‌ای با استفاده از توزیع پیشین تعدیل شده- پژوهش‌های ریاضی ۲ (۲)۱-۱۲.

2. M. Han, (1997), The structure of hierarchical prior distribution and its applications, Chinese Operations Research and Management Science 6 (3), 31–40.

3. D.V. Lindley, A.F., (1972), Smith, Bayes estimation for the linear model, Journal of the Royal Statistical Society-Series B 34, 1–41.

4. Johnson N L, Kotz S, and Balakrishman S., (1994), Continues Univariate Distributions, 456.

5. Han M., (1998), The hierarchical Bayesian estimation of failure-rate of exponential distribution of zero-failure data. Journal of Engineering Mathematics. 15 (4): 135-138.

6. Ling Wei, Yimin Shi., (1999), Bayesian estimation of the Pascal distribution's parameter, Pure and Applied Mathematics, 15 (2): 13-16.

7. M. Han, Y.Q. Li, (1999), Hierarchical Bayesian estimation of the products reliability based on zero-failure data, Journal of Systems Science and Systems Engineering 8 (4) ,467–471.

8. Han M., (1999), The synthesize hierarchical Bayesian estimation of failure rate of zero-failure data, Operations Research and Management Science. 8 (1): 1-5.

9. Han M and Ding Y., (2004), Synthesized expected Bayesian method of parametric estimate. Journal of Systems Science and Systems Engineering. 13 (1): 98-111, http://dx.doi.org/10.1007/s11518-006-0156-0.

10. Ming Han., (2005), Synthetic Expected Bayesian Estimation. Acta Mathematica Scientia, 25A (5): 678-684.

11. Han M., (2007), Expected Bayesian estimation of failure probability and its character. Acta Mathematica Scientia, 3: 0-13.

12. Han Ming., (2006), E-Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of Estate Probability [J]. Operations Research and Management Science, 15 (5): 70-74.

13. Wang Jianhua, Xia Xiaoyan., (2008), The property of Hierarchical Bayesian and E-Bayesian Estimation of Exponent Distribution's Parameter [J].Mathematica Applicata, 21S: 33-36.

14. Han M., (2008), E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate. Applied Mathematics, A Journal of Chinese Universities, 23 (4): 399-407.

15. Ming Han. E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate, Applied Mathematical Modelling, 2009, 33 (4): 1915-1922.

16. Wang Jianhua, Mao Juan. (2009), The Property of Hierarchical Bayesian and E-Bayesian Estimation of Binomial Distribution's Parameter [J] Pure and Applied Mathematics. 25 (2): 223-230.

17. T. Ando, A. Zellner, Hierarchical Bayesian analysis of the seemingly unrelated regression and simultaneous equations models using a combination of direct Monte Carlo and importance sampling techniques, Bayesian Analysis 5 (1) (2010) 65–96.

18. Wang Jianhua, Yuan Li. Properties of Hierarchical Bayesian and E-Bayesian Estimations of the Failure Probability in Zero-failure Date[J].Chinese Journal of Engineering Mathematics, (2010) 27 (1):78-84.

19. Zeinhum F. Jaheen, Hassan M. Okasha., (2011), E Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2.censoring Applied Mathematical Modelling 35, 4730–4737.

20. Ming Han., (2011), E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution, Applied Mathematical Modelling, 35 (5): 2419-2424.

21. Han Ming. Estimation of Reliability Derived from Binomial Distribution in Zero-Failure Data. 2015, 20 (4): 454-457.

22. Balakrishnan N, Aggarwala R (2000). Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications. Birkhauser, Boston.

23. Rashad M. EL-Sagheer., (2017), "E-Bayesian Estimation for Rayleigh Model Using Progressive Type-II Censoring Data". Journal of Statistical Theory and Applications, Vol. 16, No. 2, 239–247.

24. Kundu D (2008). Bayesian Inference and Reliability Sampling Plan for Weibull Distribution." Technometrics, 50, 144-154.

25. Kundu D, Pradhan B (2009). Bayesian Inference and Life Testing Plans for Generalized Exponential Distribution." Science in China, Series A: Mathematics, 52 (6), 1373-388.

26. Cramer E, Iliopoulos G (2010). Adaptive Progressive Type-II Censoring." Test, 19 (2), 342-358.

27. Berger J. O., (1985), "Statistical decision theory and Bayesian analysis (second Ed)", New York, springer-verlag.

28. Wen.C.L, Jong.W.W, Mei.L.H, Liang.S.L, Ruei.L.C., (2011), Assessing the lifetime performance index of Rayleigh products based on the Bayesian estimation under progressive type II right censored samples, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 1676–1688