رده‌بندی کلاف کروی مماس مجهز به ساختار تقریبا ب- مرتبط

اسماعیل پیغان*، فرشاد فیروزی
دانشگاه اراک

دریافت: ۹۸/۰۵/۱۳ پذیرش: ۹۸/۰۹/۲۶

چکیده

در ابتدا، کلاف کروی مماس بر یک منیفلد ریمانی (M, g) به عنوان یک منیفلد با بعد $(2n+1)$ در نظر گرفته می‌شود و در پی آن، ما این کلاف کروی را به یک متریک طبیعی به انضمام یک ساختار تقریباً ب- مرتبط مجهز می‌کنیم. در گام بعدی، مؤلفه‌های تانسور ساختاری متناظر با این کلاف کروی را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه، با توجه به رده‌بندی ساختارهای تقریباً ب- مرتبط (که ما آن را به ایجاز، رده‌بندی هم‌بسته[1] می‌نامیم)، به رده‌بندی کلاف کروی مماس مجهز به ساختار تقریباً ب- مرتبط طبیعی اهتمام می‌ورزیم و رده‌هایی را که کلاف کروی مماس با ساختار یادشده به آن‌ها تعلق دارد، به دست می‌آوریم. هم‌چنین، ما روابطی بر حسب تانسورهای انحنا به دست می‌دهیم که با برقراری آن‌ها، کلاف کروی با ساختار مذکور می‌تواند به هر یک از این رده‌های یازده‌گانه تعلق داشته باشد.

واژه‌های کلیدی: ساختار تقریبا مرتبط، کلاف کروی، متریک طبیعی

مقدمه

مسأله رده‌بندی، از دیرباز یکی از مفاهیم بنیادی در علوم ریاضیات و فیزیک بوده است. نیوتن در قرن هفدهم به رده‌بندی قوانین فیزیک برای اجسام بزرگ پرداخت و نزدیک به دو قرن بعد از وی، مکانیک کوانتومی خواص پدیده‌های فیزیکی در ابعاد میکروسکوپیک را آشکار کرد. اهمیت رده‌بندی در این است که این مفهوم، قوانین و اصولی را تبیین می‌کند که برای تمام اعضای متعلق به آن رده، صادق است. به بیان دیگر، هر عضوی که به ردهٔ مشخصی تعلق داشته باشد، قوانین مربوط به آن رده را به ارث می‌برد. در ریاضیات و به خصوص در مطالعهٔ هندسه منیفلدهای ریمانی، رده‌بندی منیفلدها می‌تواند شمار زیادی از ویژگی‌های آنها را آشکار کند. اگر منیفلدی به ردهٔ خاصی از رده‌بندی منیفلدها تعلق داشته باشد، بدون بررسی آن منیفلد به یقین می‌توان چنین گفت که آن منیفلد خواص و ویژگی‌های ردهٔ مذکور را داراست. در این مقاله ما با استفاده از متریک‌های طبیعی به رده‌بندی کلاف کروی مجهز به ساختار تقریبا ب- مرتبط می‌پردازیم. به این معنا که مشخص می‌کنیم که کلاف کروی مجهز به ساختار مذکور به کدام رده از منیفلدهای تقریباً ب- مرتبط تعلق دارد. بدیهی است که پس از آشکار شدن ردهٔ کلاف کروی مجهز به ساختار تقریبا ب- مرتبط، کلاف کروی همهٔ خواص مربوط به آن رده را به ارث می‌برد، بدون آن‌که نیاز به انجام محاسبات طولانی و طاقت‌فرسا در جهت اثبات این خواص باشد. همچنین می‌توان با جایگزینی متریک طبیعی این مقاله با هر متریک طبیعی دلخواه و نیز با جایگزینی منیفلد پایه با هر منیفلد دلخواه مثال‌های زیادی از برقراری قضایای مطرح شده در

*نویسندهٔ مسئول e-peyghan@araku.ac.ir

[1] Relevant Classification

این مقاله برای مطالعهٔ موردی ارائه کرد. هر چند که نقطهٔ قوت مسالهٔ رده‌بندی در این است که فارغ از پژوهش حالات خاص، این رده‌بندی برای همهٔ منیفلدها و همهٔ متریک‌های طبیعی برقرار است.

در مقالهٔ حاضر از یک رده‌بندی شامل یازده رده برای منیفلدهای تقریباً ب- مرتبط بهره می‌گیریم. این رده‌بندی تاکنون سوژهٔ مطالعهٔ بسیاری از پژوهشگران واقع شده است. نویسنده در [۲۷]، قضایای مهمی در باب طبقه‌بندی بیانچی دربارهٔ ردهٔ $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4$ که ما در مقاله حاضر آن را با $\mathcal{U}_1$ معرفی کرده‌ایم، و کلاف کروی با متریک طبیعی و ساختار تقریباً ب- مرتبط به آن تعلق دارد، ارائه داده است. وی همچنین در [۲۸] چندین گزاره دربارهٔ ویژگی‌های ردهٔ $\mathcal{U}_1$ مطرح کرده است و نیز اثبات کرده است که ردهٔ $\mathcal{U}_1$ نسبت به تبدیلات گروه $C_{1,4}$ پایای همدیس است. افزون بر این، در [۲۹] قضایای مهمی درباب فرم بنیادی نوع دوم و خاصیت تماماً ژئودزیک رده $\mathcal{U}_1$ مطرح شده است. همهٔ این شواهد نشان می‌دهد که با اثبات این حکم که کلاف کروی مجهز به ساختار تقریبا ب- مرتبط به ردهٔ $\mathcal{U}_1$ تعلق دارد، می‌توان بسیاری از خواص این رده را فوراً و به راحتی به کلاف کروی مذکور منتسب کرد. در واقع اهمیت اساسی مسأله رده‌بندی نیز در این است که به محض مشخص شدن رده، می‌توان خواص رده را به همهٔ اعضای آن نسبت داد.

مفهوم متریک *ترفیع*[1] یکی از مفاهیم قدیمی و ریشه‌دار در هندسهٔریمانی است که تا به امروز دست‌مایهٔ کار بسیاری از ریاضی‌دانان بوده است. به طور خاص، متریک‌های ترفیع روی کلاف کروی مماس بدل به سوژهٔ مورد علاقه‌ای برای هندسه‌دانان شده است و پژوهش‌های قابل تأملی در این حیطه به انجام رسیده است. نگاه ویژهٔ ریاضی‌دانان به متریک‌های ترفیع، به یقین وام‌دار نبوغ شگفت‌انگیز ساساکی[2] در انجام نخستین پژوهش‌ها در زمینهٔ متریک‌های ترفیع روی کلاف مماس است. تحقیقات او در این گستره، الهام‌بخش شمار زیادی از ریاضی‌دانان برای انجام مطالعات موشکافانه‌ای در قلمرو متریک‌های ترفیع، به منظور معرفی گونه‌های جدید این نوع متریک‌ها روی کلاف مماس بوده است. از زمان طرح ایدهٔ ایجاد متریک ترفیع بر روی کلاف مماس توسط ساساکی، تلاش‌های ریاضی‌دانان برای گسترش این عرصه از هندسه به طور روزافزون ادامه داشت و در نهایت در [۵]، کلی‌ترین شکل متریک ترفیع (که امروزه به متریک طبیعی[3] مشهور شده است)، به اهتمام عباسی[4] و همکارانش اِرائه شد. پس از رونمایی مفهوم متریک طبیعی، پژوهش‌های زیادی برای مطالعهٔ کلاف مماس توسط هندسه‌دانان ریمانی انجام گرفت، که ماحصل آن به دست آوردن دید عمیقی از رفتار کلاف‌های مماس و کروی بود. از جمله پژوهش‌های ارزشمندی که در این زمینه به ثبت رسیده است، می‌توان به تحقیقات عباسی و همکارانش در [۱, ۴, ۲, ۳] اشاره کرد. شایان ذکر است که پژوهشگران نامی دیگری از جمله کواسکی[5] در [۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰]، بوکس[6] در [۷, ۸ , ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۱] و کالواروسو[7] در [۱۳] مطالعات سودمندی را در این حوزهٔ پرکاربرد از ریاضیات به ثمر رسانیده‌اند.

مفهوم *ساختار تقریباً مرتبط*، یکی دیگر از مضامین قدیمی و سوژه‌های دیرینهٔ پژوهش در زمینهٔ هندسهٔ دیفرانسیل منیفلدهاست که پیدایش آن به همت پژوهش‌های ساساکی انجام گرفت. او برای نخستین بار این مفهوم را در [۳۰] معرفی کرد و از آن پس، ساختارهای تقریباً مرتبط موضوع مطالعه و مبحث شمار زیادی از پژوهش‌ها در حوزهٔ هندسهٔ

[1] Lifted metric
[2] Sasaki
[3] Natural metric
[4] Abbassi
[5] Kowalski
[6] Boeckx
[7] Calvaruso

دیفرانسیل منیفلدها بوده است. چند تن از پژوهشگران در [۱۵]، یک ساختار تقریباً مرتبط را به ب- متریک ضمیمه کردند، و یک رده‌بندی از این ساختار را بر حسب مشتق کوواریان تانسورهای ساختاری از نوع (۱,۱) ارائه دادند. این رده‌بندی که آن را به اختصار رده‌بندی هم‌بسته می‌نامیم، شامل یازده رده است. پس از ارائه این رده‌بندی، مَنِو[1]، توجهات گستردهٔ خود را به آن معطوف کرد و در شناسایی هر چه دقیق‌تر این رده‌های یازده‌گانه مجاهدت ورزید. برخی از مطالعات وی در این راستا را می‌توان در [۲۵, ۲۱, ۲۳, ۲۶, ۲۲, ۲۴] مشاهده نمود.

ما در این مقاله، یک ساختار تقریباً مرتبط برآمده از یک متریک طبیعی شبه‌ریمانی بر روی کلاف کروی T_1M را به ویژگی ب- متریک مجهز می‌کنیم و در پی آن، در صدد رده‌بندی این ساختار با توجه به رده بندی هم‌بسته برمی‌آییم. به دیگر سخن، رده‌هایی از رده‌بندی هم‌بسته که ساختار مذکور بر روی کلاف کروی مماس به آن‌ها تعلق دارد، به صورت دقیق مُسجل می‌شود.

روند نگارش این مقاله بدین شرح است که در بخش ۲، به معرفی و مطالعهٔ متریک‌های طبیعی روی کلاف مماس و کلاف کروی مماس یک منیفلد ریمانی (M, g) می‌پردازیم و به دنبال آن، در بخش ۳، رفتار تانسورهای ساختاری وابسته به ساختار تقریباً ب- مرتبط روی کلاف کروی مماس، مورد نقد و مطالعه قرار می‌گیرد. سعی ما بر این بوده است که این دو بخش، چارچوب منطقی و هندسی کاملی را برای وارد شدن به بخش واپسین طراحی کند. در بخش انتهایی، به رده‌بندی کلاف کروی مجهز به ساختار تقریباً ب- مرتبط می‌پردازیم و افزون بر این، ما روابطی را برحسب تانسورهای انحنا ارائه می‌دهیم که با برقراری آن‌ها، کلاف کروی مماس با ساختار مذکور می‌تواند به هر یک از رده‌های یازده‌گانهٔ رده‌بندی هم‌بسته تعلق داشته باشد.

۱. متریک‌های طبیعی روی کلاف کروی

در این بخش، به ارائه برخی از اطلاعات و تعاریف اساسی مورد نیاز از متریک‌های طبیعی بر روی کلاف مماس و کلاف کروی مماس می‌پردازیم.

۱.۱ متریک‌های طبیعی روی کلاف مماس: فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی از بعد $(n+1)$ باشد. التصاق لوی‌چویتای وابسته به متریک g را با نماد ∇ نشان می‌دهیم. فضای مماس $(\mathrm{T}M)_{(x,u)}$ از کلاف مماس $\mathrm{T}M$ در نقطهٔ (x,u) به صورت زیر قابل تجزیه است.

$$(\mathrm{T}M)_{(x,u)} = \mathcal{H}_{(x,u)} \oplus \mathcal{V}_{(x,u)},$$

که مقصود از $\mathcal{H}$ و $\mathcal{V}$، به ترتیب فضاهای افقی و عمودی با توجه به التصاق لوی‌چویتای ∇ می‌باشد. در واقع، به ازای هر بردار $X \in M_x$، یک بردار منحصر به فرد $X^h \in \mathcal{H}_{(x,u)}$ (که آن را ترفیع افقی[2] از X به $(x,u) \in \mathrm{T}M$ می‌نامیم) وجود دارد، به طوری که $\pi_* X^h = X$، که در این رابطه $\pi: \mathrm{T}M \to M$ نگاشت تصویر طبیعی است. ایضاً، ترفیع عمودی[3] بردار $X \in M_x$، بردار $X^v \in \mathcal{V}_{(x,u)}$ است به قسمی که به ازای همهٔ توابع f روی M، رابطهٔ $X^v(\mathrm{d}f) =$

[1] Manev
[2] Horizontal lift
[3] Vertical lift

Xf برقرار باشد. در آخرین تساوی، نماد d بر عملگر مشتق‌گیری خارجی[1] دلالت می‌کند. گفتنی‌ست که در این‌جا، یک‌فرمی‌های $\mathrm{d}f$ روی M به دید توابعی روی $\mathrm{T}M$ در نظر گرفته می‌شوند ($(\mathrm{d}f)(x,u) = uf$). نگاشت $X \to X^h$ یک ایزومورفیسم بین دو فضای برداری M_x و $\mathcal{H}_{(x,u)}$ می‌باشد. همچنین، $X \to X^v$ نیز یک نگاشت ایزومورفیسم بین فضاهای برداری M_x و $\mathcal{V}_{(x,u)}$ است. افزون بر این، می‌توان هر بردار مماس $Z \in (\mathrm{T}M)_{(x,u)}$ را بر حسب مولفه‌های افقی و عمودی به فرم $Z = X^h + Y^v$ نوشت که در این تساوی، بردارهای $X, Y \in M_x$ به صورت منحصربه‌فرد مشخص می‌شوند. میدان برداری عمودی کانونی[2] روی $\mathrm{T}M$ در مختصات موضعی به صورت $\mathcal{U} = u^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ تعریف می‌شود. در اینجا $\mathcal{U}$ به انتخاب مختصات موضعی بستگی ندارد و به صورت سرتاسری روی $\mathrm{T}M$ تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن مختصات موضعی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ روی منیفلد M، برای هر نقطهٔ $x \in M$ و $u = u^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_x \in \mathrm{T}M_x$، مشاهده می‌شود که $u^v_{(x,u)} = u^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^v_{(x,u)} = \mathcal{U}_{(x,u)}$، و میدان برداری شار ژئودزیک[3] روی کلاف مماس $\mathrm{T}M$، به صورت یکتا به وسیله رابطهٔ $u^h_{(x,u)} = u^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^h_{(x,u)}$ مشخص می‌شود ([۱]).

در [۴]، به تفصیل در باب متریک‌های طبیعی روی کلاف مماس یک منیفلد ریمانی (M,g) سخن گفته شده است. به منظور ایجاد یک بستر هندسی مطلوب برای بخش‌های آتی، به ذکر قضیه‌ی زیر از همان مرجع می‌پردازیم.

گزارهٔ ۱.۱. ([۴]). فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی و G یک متریک طبیعی روی کلاف مماس $\mathrm{T}M$ باشد. در این صورت شش تابع هموار $\alpha_i, \beta_i: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ i = 1,2,3$ وجود دارند، به قسمی که به ازای هر $u, X, Y \in M_x$ رابطهٔ

$$\begin{cases} G_{(x,u)}(X^h, Y^h) = (\alpha_1 + \alpha_3)(r^2) g(X,Y) + (\beta_1 + \beta_3)(r^2) g(X,u) g(Y,u), \\ G_{(x,u)}(X^h, Y^v) = G_{(x,u)}(X^v, Y^h) = \alpha_2(r^2) g(X,Y) + \beta_2(r^2) g(X,u) g(Y,u), \\ G_{(x,u)}(X^v, Y^v) = \alpha_1(r^2) g(X,Y) + \beta_1(r^2) g(X,u) g(Y,u), \end{cases} \tag{1}$$

هنگامی‌که $r^2 = g(u,u)$، برقرار باشد.

ملاحظهٔ ۱.۱. در تمام این مقاله از نمادگذاری

$$\phi_i(t) = \alpha_i(t) + t\beta_i(t),$$
$$\alpha(t) = \alpha_1(t)(\alpha_1 + \alpha_3)(t) - \alpha_2^2(t), \quad \phi(t) = \phi_1(t)(\phi_1 + \phi_3)(t) - \phi_2^2(t),$$

برای هر $t \in \mathbb{R}^+$ استفاده می‌نماییم. می‌توان مثال‌های زیادی را از متریک‌های ریمانی بر روی کلاف مماس برشمرد، که از متریک‌های طبیعی به دست می‌آیند. برای نمونه، متریک ساساکی گونه‌ای از متریک‌های طبیعی است که به ازای مقادیر زیر به دست می‌آید.

---
[1] Exterior differentiation operator
[2] Canonical vertical vector field
[3] Geodesic flow vector field

$$\alpha_1(t) = 1, \qquad \alpha_2(t) = \alpha_3(t) = \beta_1(t) = \beta_2(t) = \beta_3(t) = 0.$$

به عنوان نمونهٔ دیگری از متریک‌های طبیعی، می‌توان به متریک چیگر-گرومول[۱] اشاره کرد که به ازای

$$\alpha_2(t) = \beta_2(t) = 0, \qquad \alpha_1(t) = \beta_1(t) = -\beta_3(t) = \frac{1}{1+t}, \qquad \alpha_3(t) = \frac{t}{1+t},$$

از رابطهٔ (۱) به دست می‌آید.

۲.۱. متریک‌های طبیعی روی کلاف کروی مماس

کلاف کروی مماس یکه روی یک منیفلد ریمانی (M,g)، با ابرفضای $\mathrm{T}_1M = \{(x,u) \in \mathrm{T}M \mid g_x(u,u) = 1\}$ در کلاف مماس $\mathrm{T}M$ تعریف می‌شود. همچنین، فضای مماس بر کلاف کروی T_1M در یک نقطهٔ $(x,u) \in \mathrm{T}_1M$، به واسطهٔ رابطهٔ زیر مشخص می‌شود ([۱]).

$$(\mathrm{T}_1M)_{(x,u)} = \{X^h + Y^v | X \in M_x, Y \in \{u\}^\perp \subset M_x\}.$$

هر متریک القایی $\tilde{G}$ روی کلاف کروی T_1M توسط متریک طبیعی G روی $\mathrm{T}M$، یک متریک طبیعی شبه‌ریمانی روی کلاف کروی T_1M است. بنابر [۱۴]، متریک طبیعی $\tilde{G}$ روی کلاف کروی توسط مقادیر چهار تابع حقیقی مقدار ثابت ذیل مشخص می‌شود.

$$a = \alpha_1(1), \qquad b = \alpha_2(1), \qquad c = \alpha_3(1), \qquad d = (\beta_1 + \beta_3)(1).$$

فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی با بعد $(n+1)$ باشد. ما کار خود را با در نظر گرفتن یک پایهٔ متعامد $\{e_0 = u, e_1, \dots, e_n\}$ روی $x \in M$ آغاز می‌کنیم و در پی آن، با معرّفی $\tilde{\delta}_0 = e_0^h = u^h$، $\tilde{\delta}_i = e_i^h$ و $\tilde{\partial}_i^T = e_i^v$ برای $i = 1, \dots, n$، متریک طبیعی $\tilde{G}$ روی کلاف کروی یکهٔ T_1M به طور کامل به فرم

$$\begin{cases} \tilde{G}_{(x,u)}(\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_j) = (a+c)g_x(\partial_i, \partial_j) + d g_x(\partial_i, u) g_x(\partial_j, u), \\ \tilde{G}_{(x,u)}(\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_j^T) = b g_x(\partial_i, \partial_j), \\ \tilde{G}_{(x,u)}(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_j^T) = a g_x(\partial_i, \partial_j), \end{cases}$$

در هر نقطهٔ $(x,u) \in \mathrm{T}_1M$ و برای هر $\partial_i, \partial_j \in M_x$ با ∂_j عمود بر u مشخص می‌شود (برای جزییات بیشتر، به [۱۴] مراجعه شود). آشکارا، در حالت $i \neq j$ رابطهٔ

$$\tilde{G}(\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_j) = \tilde{G}(\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_j^T) = \tilde{G}(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_j^T) = 0,$$

---

[2] Cheeger-Gromoll

برقرار است. بنابراین، ماتریس متریک طبیعی $\tilde{G}$ بر حسب پایه‌ی $\{\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1, \tilde{\partial}_1^T, \dots, \tilde{\delta}_n, \tilde{\partial}_n^T\}$ در نقطهٔ (x,u)، یک ماتریس قطری بلوکی به فرم زیر است.

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} a+c+dr^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+c & b & & 0 & 0 \\ 0 & b & a & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & a+c & b \\ 0 & \dots & \dots & & b & a \end{pmatrix}.$$

دترمینان ماتریس $\tilde{G}$ برابر با $(a+c+dr^2)\alpha^n$ است که در این تساوی، مقدار α بواسطه‌ی رابطهٔ $\alpha = a(a+c) - b^2$ تعیین می‌شود. افزون بر این، ماتریس مذکور یک مقدار ویژه به فرم $a+c+dr^2$ و n مقدار ویژه به شکل $۲a+c+\sqrt{c^2+4b^2}$، و n مقدار ویژه برابر با $۲a+c-\sqrt{c^2+4b^2}$ دارد ([۱۴]).

بنابراین، متریک طبیعی $\tilde{G}$ یک متریک ریمانی است اگر و تنها اگر $a+c+dr^2 > 0$ و $a+c\pm\sqrt{c^2+4b^2} > 0$، که این شرایط معادل با روابط زیر می‌باشند.

$$a > 0, \qquad a+c+dr^2 > 0, \qquad \alpha = a(a+c) - b^2 > 0. \tag{۲}$$

تعریف ۲.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد متریک باشد. در این صورت بردار v را یک بردار زمان‌وار[1] می‌نامیم، هرگاه $g(v,v) < 0$. بردار v یک بردار مکان‌وار[2] نامیده می‌شود هرگاه $g(v,v) > 0$.

واضح است که متریک‌های طبیعی روی کلاف کروی مماس T_1M مجاز به پذیرش علامت‌های دیگر نیز می‌باشند. به‌ویژه، اگر بخواهیم که فضای $\{u\}^\perp$ از علامت خنثی (n,n) نسبت به متریک (ناتبهگون) $\tilde{G}$ باشد، لازم است $(a+c+dr^2)\alpha^n \neq 0$ و همچنین $۲a+c+\sqrt{c^2+4b^2} > 0$ و $۲a+c-\sqrt{c^2+4b^2} < 0$. این شرایط با روابط زیر معادل می‌باشند.

$$a+c+dr^2 \neq 0, \qquad \alpha = a(a+c) - b^2 < 0, \tag{۳}$$

که علامت $a+c+dr^2$ به رفتار u^h بستگی دارد.

به منظور ایجاد یک ساختار تقریباً مرتبط برآمده از یک متریک طبیعی روی کلاف کروی مماس T_1M، که در شرط ب- متریک نیز صدق کند، لازم است که بردار u^h یک بردار مکان‌وار و فضای $\{u\}^\perp$ از علامت خنثی باشد. به بیان دیگر با استفاده از (۳) لازم است که روابط زیر برقرار باشد ([۱۴]).

$$a+c+d > 0, \qquad \alpha = a(a+c) - b^2 < 0.$$

با انجام محاسباتی نه چندان دشوار و در عین حال، با بهره‌گیری از فرایند متعامدسازی اشمیت[3] به راحتی می‌توان

[1] Timelike vector
[2] Spacelike vector
[3] Schmidt's orthogonalization

مشاهده نمود که هرگاه $\phi \neq 0$، میدان برداری N^G روی $\mathrm{T}M$ که به صورت

$$N^G_{(x,u)} = \frac{1}{\sqrt{|(a+c+d)\phi|}}[-bu^h + (a+c+d)u^v],$$

برای همهٔ نقاط $(x,u) \in \mathrm{T}M$ تعریف می‌شود، بر T_1M عمود و در هر نقطه از کلاف کروی مماس T_1M، یکه است. در این تساوی، مقدار ϕ از رابطهٔ $\phi = a(a+c+d) - b^2$ به دست می‌آید. اکنون، ترفیع مماسی[۱] X^{t_G} بر حسب متریک G از یک بردار $X \in M_x$ به نقطهٔ $(x,u) \in \mathrm{T}_1M$ را به عنوان تصویر مماسی از ترفیع عمودی X به (x,u) بر حسب N^G تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، X^{t_G} به واسطهٔ رابطهٔ زیر مشخص می‌شود.

(۴)

$$X^{t_G} = X^v - G_{(x,u)}(X^v, N^G_{(x,u)})N^G_{(x,u)} = X^v - \sqrt{\frac{|\phi|}{|a+c+d|}}\, g_x(X,u)N^G_{(x,u)}.$$

در صورتی که $X \in M_x$ بر u عمود باشد، آن‌گاه $X^{t_G} = X^v$. شایان توجه است که اگر $b = 0$، آنگاه ترفیع مماسی X^{t_G} با ترفیع مماسی X^t برآمده از متریک ساساکی معادل است. در حالت کلی، رابطهٔ زیر بین X^{t_G} و X^t برقرار است.

$$X^{t_G} = X^t + \frac{b}{a+c+d}\, g(X,u)u^h.$$

فضای مماس $(\mathrm{T}_1M)_{(x,u)}$ از کلاف کروی یکهٔ T_1M در نقطهٔ (x,u) توسط بردارهایی به فرم X^h و Y^{t_G} برای $X, Y \in M_x$ مشخص می‌شود.

ملاحظه ۲.۲ ([۱۴]). ترفیع مماسی u^{t_G} به $(x,u) \in \mathrm{T}_1M$ توسط رابطهٔ $u^{t_G} = \frac{b}{a+c+d}u^h$ به دست می‌آید. بنابراین، فضای مماس $(\mathrm{T}_1M)_{(x,u)}$ از کلاف کروی یکهٔ T_1M در نقطهٔ (x,u) توسط بردارهایی به فرم X^h و Y^{t_G} به شرح زیر مشخص می‌شود.

$$(\mathrm{T}_1M)_{(x,u)} = \{X^h + Y^{t_G} | X \in M_x, Y \in \{u\}^\perp \subset M_x\}. \quad (۵)$$

از همین رو، عمل ترفیع مماسی از M_x به نقطهٔ $(x,u) \in \mathrm{T}_1M$ همیشه بر آن بردارهایی از M_x که بر بردار u عمود باشند، اعمال می‌شود.

به واسطهٔ (۵)، بی‌درنگ این نتیجه منتفع می‌شود که متریک طبیعی شبه‌ریمانی $\tilde{G}$ روی کلاف کروی مماس یکهٔ T_1M القایی از متریک G، به طور کامل توسط تساوی‌های

---
[4] Tangential lift

$$\begin{cases}\tilde{G}_{(x,u)}(X_1^h, X_2^h) = (a+c)g_x(X_1, X_2) + d g_x(X_1, u) g_x(X_2, u),\\ \tilde{G}_{(x,u)}(X_1^h, Y_1^{t_G}) = b g_x(X_1, Y_1),\\ \tilde{G}_{(x,u)}(Y_1^{t_G}, Y_2^{t_G}) = a g_x(Y_1, Y_2),\end{cases} \tag{۶}$$

برای X_i, Y_i که $i = 1,2$ و Y_i بر u عمود باشد، مشخص می‌شود. قابل توجه است که بنابر معادلات بالا ترفیعات افقی و مماسی $\tilde{G}$-متعامد هستند، اگر و تنها اگر شرط $b = 0$ برقرار گردد.

۳.۲. ساختار تقریباً ب- مرتبط برآمده از متریک‌های طبیعی روی کلاف کروی: در این بخش، کلاف کروی مماس یکه از یک منیفلد ریمانی، به عنوان منیفلدی با بعد فرد در نظر گرفته می‌شود و به دنبال آن، منیفلد مذکور به یک ساختار تقریباً ب- مرتبط برآمده از یک متریک طبیعی شبه‌ریمانی روی کلاف کروی تجهیز می‌شود. ما کار خود را در این قسمت با اِرائه تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۳.۲. ([۶]). منیفلد M از بعد $(۲n + 1)$ دارای یک ساختار تقریباً مرتبط است، اگر یک میدان تانسوری φ از نوع $(۱،۱)$، یک میدان برداری ξ، و نیز یک ۱-فرمی η به قسمی روی M یافت شوند که روابط زیر برقرار باشند.

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \qquad \eta(\xi) = 1, \qquad \varphi\xi = 0, \qquad \eta \circ \varphi = 0.$$

در این صورت با قرار دادن $\xi = \rho u^h$، که ρ ثابتی مثبت است، می‌توان فضای مماس بر کلاف کروی یکۀ T_1M در نقطۀ (x, u) را با استفاده از (۵) به فرم زیر بیان کرد.

$$(\mathrm{T}_1M)_{(x,u)} = \mathrm{span}(\xi) \oplus \{X^h | X \perp u\} \oplus \{Y^{t_G} | Y \perp u\}.$$

خاطرنشان می‌شود که منیفلد ریمانی (M, g) مجهز به ساختار تقریباً مرتبط (φ, ξ, η)، در شرط ب-متریک صدق می‌کند هرگاه

$$g(\varphi x, \varphi y) = -g(x, y) + \eta(x)\eta(y).$$

در عنفوان امر، کلاف کروی مماس یکه را به یک ساختار تقریباً ب-مرتبط $(\varphi, \xi, \eta, \tilde{G})$ مجهز می‌نماییم و پس از آن، یک پایه‌ی $\{\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_i^T, \xi\}$ را چنان روی این ساختار قرار می‌دهیم که با توجه به $\tilde{G}$، خاصیت تعامد $\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_i^T \perp \xi$ برقرار باشد. در اینجـــــا $\xi = \rho u^h$، که ρ ثابتی مثبت است. معادلات زیر یک ساختار تقریباً مرتبط را روی کلاف کروی مماس یکۀ T_1M مشخص می‌کنند.

$$\eta(\tilde{\delta}_i) = \eta(\tilde{\partial}_i^T) = 0, \quad \eta(\xi) = 1, \tag{۷}$$
$$\varphi(\tilde{\delta}_i) = \tilde{\partial}_i^T, \quad \varphi(\tilde{\partial}_i^T) = -\tilde{\delta}_i, \quad \varphi(\xi) = 0. \tag{۸}$$

متریک طبیعی شبه‌ریمانی $\tilde{G}$ روی کلاف کروی مماس یکهٔ T_1M مجهز به یک ساختار تقریباً ب- مرتبط، به فرم کلی زیر است.

$$\begin{cases} \tilde{G}(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j)=(a+c)g(\partial_i,\partial_j)+dg(\partial_i,u)g(\partial_j,u),\\ \tilde{G}(\tilde{\delta}_i,\tilde{\partial}_j^T)=0,\\ \tilde{G}(\tilde{\partial}_i^T,\tilde{\partial}_j^T)=ag(\partial_i,\partial_j). \end{cases} \tag{۹}$$

از آن‌جایی که متریک فوق‌الذکر باید در روابط

$$\tilde{G}(\varphi\tilde{\delta}_i,\varphi\tilde{\delta}_j)=-\tilde{G}(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j),\qquad \tilde{G}(\varphi\tilde{\partial}_i^T,\varphi\tilde{\partial}_j^T)=-\tilde{G}(\tilde{\partial}_i^T,\tilde{\partial}_j^T),$$

صدق کند، پس شرط ب- متریک برای $\tilde{G}$ برآورده می‌شود، هرگاه داشته باشیم $a+c=-a$. افزون بر این، روابط زیر نیز برقرار است.

$$\begin{aligned} &a_i^s(y,v)u^j g_{sj}(y)=0, && a_i^j(y,v)a_t^s(y,v)g_{js}(y,v)=\delta_{it},\\ &\tilde{\delta}_i=a_i^s\delta_s, && \tilde{\partial}_i^T=a_i^s\partial_s^T,\\ &\tilde{G}(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j)=-a\delta_{ij}, && \tilde{G}(\tilde{\partial}_i^T,\tilde{\partial}_j^T)=a\delta_{ij}, \end{aligned}$$

که a_i^t توابعی روی منیفلد M و δ_{ij} نمادی برای علائم کرونیکر[1] می‌باشند. متریک متناظر $\dot{G}$ از $\tilde{G}$ روی T_1M با رابطهٔ $\dot{G}(x,y)=\tilde{G}(x,\varphi y)+\eta(x)\eta(y)$ تعریف می‌شود ([۲۵]). بنابراین متریک $\dot{G}$ نمایشی به صورت زیر دارد.

$$\begin{cases} \dot{G}(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j)=g(\partial_i,u)g(\partial_j,u),\\ \dot{G}(\tilde{\delta}_i,\tilde{\partial}_j^T)=ag(\partial_i,\partial_j),\\ \dot{G}(\tilde{\partial}_i^T,\tilde{\partial}_j^T)=0. \end{cases}$$

در نتیجه، ماتریس $\dot{G}$ نسبت به پایه‌ی $\{\tilde{\delta}_0=\xi,\tilde{\delta}_1,\tilde{\partial}_1^T,\dots,\tilde{\delta}_n,\tilde{\partial}_n^T\}$ در نقطهٔ (x,u) یک ماتریس قطری- بلوکی به فرم زیر می‌باشد.

$$\dot{G}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a\\ 0 & \dots & \dots & \dots & a & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Kronecker

دترمینان ماتریس $\dot{G}$ برابر با $(-a^2)^n$ است و این ماتریس، دارای مقدار ویژهٔ ۱ (یک بار)، و مقادیر ویژه‌ی $\pm a$ (n- بار برای هر کدام) است. این متریک شبه‌ریمانی، از علامت $(n+1,n)$ است و نیز در شرط ب- متریک صدق می‌کند. ساختار $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})$ یک ساختار تقریبا ب- مرتبط نامیده می‌شود.

لم.۲.۱ ([۶]). عملگر کروشهٔ لی[1] روی فریم $\{\tilde{\delta}_i,\tilde{\partial}_i^T,\xi\}$ از کلاف کروی T_1M در روابط زیر صدق می‌کند.

$$[\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j]=u^l\mathrm{R}_{jil}{}^k\partial_k^T,\qquad [\tilde{\partial}_i^T,\tilde{\partial}_j^T]=0,\qquad [\tilde{\partial}_i^T,\xi]=-\Gamma_{oi}^k\partial_k^T,$$
$$[\tilde{\delta}_i,\tilde{\partial}_j^T]=\Gamma_{ji}^k\partial_k^T,\qquad [\tilde{\delta}_i,\xi]=u^l\mathrm{R}_{oil}{}^k\partial_k^T,$$

که در این‌جا R بر تانسور انحنای ریمان روی منیفلد M با ویژگی $g_{pk}\mathrm{R}_{jil}{}^k=\mathrm{R}_{jilp}$، و Γ_{ji}^k بر ضرایب کریستوفل روی M با $\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k$ و $\nabla_u\partial_i=\Gamma_{oi}^k\partial_k$ دلالت می‌کنند و افزون بر این، میدان برداری ساختاری ξ به صورت $\xi=\rho u^h=\tilde{\delta}_0=\rho u^o(\partial_o)^h$ تعریف می‌شود.

۲.تانسور ساختاری

مشتقات کوواریان ساختار (φ,ξ,η) بر حسب التصاق لوی‌چویتای ∇، نقش بنیادی و مهی را در هندسهٔ دیفرانسیل منیفلدهای تقریباً مرتبط ایفا می‌کند. در اینجا، تانسور ساختاری[2] F از نوع (۰،۳) روی کلاف کروی مجهز به ساختار تقریباً ب-مرتبط $(\mathrm{T}_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})$ را به قرار زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف۲.۱. ([۱۵]). تانسور ساختاری F که به‌واسهٔ رابطهٔ

$$F(x,y,z)=\dot{G}((\dot{\nabla}_x\varphi)y,z),\tag{۱۰}$$

تعریف می‌شود، واجد ویژگی‌های ذیل می‌باشد:

$$F(x,y,z)=F(x,z,y)=F(x,\varphi y,\varphi z)+\eta(y)F(x,\xi,z)+\eta(z)F(x,y,\xi),\tag{۱۱}$$
$$\dot{G}(\dot{\nabla}_x\xi,y)=F(x,\varphi y,\xi).\tag{۱۲}$$

علاوه‌براین، ۱-فرمی‌های زیر به واسطهٔ سه تساوی ذیل به تانسور ساختاری F وابسته می‌شوند.

$$\theta(z)=\dot{G}^{ij}F\big(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j,z\big),\qquad \theta^*(z)=\dot{G}^{ij}F\big(\tilde{e}_i,\varphi\tilde{e}_j,z\big),$$
$$\omega(z)=F(\xi,\xi,z),\tag{۱۳}$$

که مقصود از $\dot{G}^{ij}$، مولفه‌های ماتریس معکوس متریک طبیعی شبه‌ریمانی $\dot{G}$ با توجه به پایهٔ $\{\tilde{e}_i,\xi\}$ $(i=1,2,\dots,2n)$، در هر نقطهٔ $p\in M$، و منظور از $\dot{\nabla}$ التصاق لوی‌چویتا روی کلاف کروی مماس T_1M می‌باشد. آن دسته از مولفه‌های تانسور ساختاری را که در حالت کلی ناصفر هستند، مؤلفه‌های اساسی[3] تانسور ساختاری می‌نامیم و در باب آنها، گزارهٔ زیر را اِرائه می‌دهیم.

---
[2] Lie bracket operator
[1] Structural tensor
[2] Essential coefficients

گزارهٔ ۲.۱. مؤلفه‌های اساسی تانسور ساختاری F به فرم زیر می‌باشند.

$$F(\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_j, \tilde{\partial}_t^T) = a\mathrm{R}(\partial_t, \partial_j, \partial_i, u), \qquad F(\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_j^T, \xi) = a\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u),$$

اثبات. در بدو امر، به محاسبهٔ $F(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_j^T, \tilde{\partial}_t^T)$ می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که این مؤلفه برابر با صفر است (و در نتیجه نمی‌تواند یک مؤلفهٔ اساسی تانسور ساختاری باشد). با در نظر گرفتن تعریف ۱.۳، رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$F\left(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_j^T, \tilde{\partial}_t^T\right) = -\dot{G}\left(\dot{\nabla}_{\tilde{\partial}_i^T}\tilde{\delta}_j, \tilde{\partial}_t^T\right) + \dot{G}\left(\dot{\nabla}_{\tilde{\partial}_i^T}\tilde{\partial}_j^T, \tilde{\delta}_t\right). \tag{۱۴}$$

با بهره‌گیری از فرمول کوزول[3] رابطهٔ

$$\begin{aligned}\dot{G}(\dot{\nabla}_{\tilde{\partial}_i^T}\tilde{\delta}_j, \tilde{\partial}_t^T) &= \tfrac{1}{2}\{\dot{G}([\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\delta}_j], \tilde{\partial}_t^T) + \dot{G}([\tilde{\partial}_t^T, \tilde{\partial}_i^T], \tilde{\delta}_j) - \dot{G}([\tilde{\delta}_j, \tilde{\partial}_t^T], \tilde{\partial}_i^T) + \\ &\{\dot{G}\left(-\Gamma_{ij}^k\tilde{\partial}_k^T, \tilde{\partial}_t^T\right) - \dot{G}\left(\Gamma_{tj}^k\tilde{\partial}_k^T, \tilde{\partial}_i^T\right)\} = -1/2\ \tilde{\delta}_j\dot{G}(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_t^T)\}\end{aligned} \tag{۱۵}$$

و نیز رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\dot{G}(\dot{\nabla}_{\tilde{\partial}_i^T}\tilde{\partial}_j^T, \tilde{\delta}_t) &= \tfrac{1}{2}\{\dot{G}([\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_j^T], \tilde{\delta}_t) + \dot{G}([\tilde{\delta}_t, \tilde{\partial}_i^T], \tilde{\partial}_j^T) - \dot{G}([\tilde{\partial}_j^T, \tilde{\delta}_t], \tilde{\partial}_i^T) - \\ &= \tfrac{1}{2}\{\dot{G}(\Gamma_{it}^k\tilde{\partial}_k^T, \tilde{\partial}_j^T) - \dot{G}(-\Gamma_{jt}^k\tilde{\partial}_k^T, \tilde{\partial}_i^T)\} = 0. \quad \tilde{\delta}_t\dot{G}(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_j^T)\}\end{aligned} \tag{۱۶}$$

اینک با جایگذاری (۱۵) و (۱۶) در (۱۴)، رابطهٔ $F(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_j^T, \tilde{\partial}_t^T) = 0$ به دست می‌آید.
اکنون به محاسبهٔ $F(\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_j^T, \xi)$ می‌پردازیم. با توجه به تعریف ۱.۳ و نیز استفاده از فرمول کوزول، رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}&F(\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_j^T, \xi) = \dot{G}(\dot{\nabla}_{\tilde{\delta}_i}\xi, \tilde{\delta}_j)\\ &= \frac{1}{2}\{\dot{G}([\tilde{\delta}_i, \xi], \tilde{\delta}_j) + \dot{G}([\tilde{\delta}_j, \tilde{\delta}_i], \xi) - \dot{G}([\xi, \tilde{\delta}_j], \tilde{\delta}_i) + \tilde{\delta}_i\dot{G}(\xi, \tilde{\delta}_j) + \xi\dot{G}(\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_j) - \tilde{\delta}_j\dot{G}(\xi, \tilde{\delta}_i)\}\\ &= \frac{1}{2}\{\dot{G}([\tilde{\delta}_i, \xi], \tilde{\delta}_j) - \dot{G}([\xi, \tilde{\delta}_j], \tilde{\delta}_i)\} = \frac{1}{2}\{\dot{G}(u^r\mathrm{R}_{oir}{}^{k}\partial_k^T, \tilde{\delta}_j) - \dot{G}(u^r\mathrm{R}_{jur}{}^{k}\partial_k^T, \tilde{\delta}_i)\}\\ &= \tfrac{1}{2}\{a\mathrm{R}(u, \partial_i, u, \partial_j) - a\mathrm{R}(\partial_j, u, \partial_i, u)\} = a\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u),\end{aligned}$$

بنابراین $F(\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_j^T, \xi) = a\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u)$. به طریق مشابه، می‌توان سایر مؤلفه‌های اساسی تانسور ساختاری F را نیز محاسبه نمود.

لم ۱.۲. مؤلفه‌های یک‌فرمی‌های وابسته به تانسور ساختاری F، روی کلاف کروی مجهز به ساختار تقریباً ب- مرتبط $(\mathrm{T}_1M, \varphi, \xi, \eta, \dot{G})$، به شرح زیر می‌باشند.

---
[3] Koszul

$$\theta(\tilde{\delta}_i) = -\mathrm{Ric}(\partial_i, u), \qquad \theta(\tilde{\partial}_i^T) = 0, \qquad \theta(\xi) = -\mathrm{Ric}(u, u),$$
$$\theta^*(\tilde{\delta}_i) = 0, \qquad \theta^*(\tilde{\partial}_i^T) = -\mathrm{Ric}(\partial_i, u), \qquad \theta^*(\xi) = 0,$$
$$\omega(\tilde{\delta}_i) = 0, \qquad \omega(\tilde{\partial}_i^T) = 0, \qquad \omega(\xi) = 0,$$

که در این‌جا نماد Ric بر تانسور انحنای ریچی روی M دلالت می‌کند.

اثبات. با بهره‌گیری از گزارهٔ ۲.۳، اتحاد بیانچی و (۱۳) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$\theta(\tilde{\delta}_t) = \dot{G}^{bc}F(e_b, e_c, \tilde{\delta}_t) = \frac{1}{a}g^{bc}F(\tilde{\delta}_b, \tilde{\partial}_c^T, \tilde{\delta}_t) + \frac{1}{a}g^{bc}F(\tilde{\partial}_b^T, \tilde{\delta}_c, \tilde{\delta}_t)$$
$$= \frac{۱}{a}g^{bc}\{a\mathrm{R}(\partial_c, \partial_t, \partial_b, u)\} = -\frac{1}{a}g^{bc}\{a\mathrm{R}(\partial_b, u, \partial_t, \partial_c)\} = -\mathrm{Ric}(u, \partial_t),$$

همچنین، به طریق مشابه رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\theta^*(\xi) = \dot{G}^{bc}F(e_b, \varphi e_c, \xi) = -\frac{1}{a}g^{bc}F(\tilde{\delta}_b, \tilde{\delta}_c, \xi) + \frac{1}{a}g^{bc}F(\tilde{\partial}_b^T, \tilde{\partial}_c^T, \xi) = 0.$$

به شیوهٔ مشابه می‌توان درستی سایر معادلات مؤلفه‌های یک‌فرمی‌های وابسته به تانسور ساختاری را اثبات کرد.

۳. رده‌بندی کلاف کروی

در [۱۵]، رده‌بندی‌ای برای منیفلدهای تقریباً ب- مرتبط بر اساس تانسور ساختاری F اِرائه شده است. این رده‌بندی شامل یازده رده بنیادی $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{11}$ است و اشتراک‌شان، رده ویژه‌ی $\mathcal{F}_0$ است که به واسطهٔ شرط $F(x,y,z) = 0$ مشخص می‌شود. به دیگر سخن، $\mathcal{F}_0$ رده مربوط به آن منیفلدهایی می‌باشد که ساختار تقریباً ب- مرتبط روی آنها نسبت به التصاق ∇ موازی باشد، یعنی، $\nabla\varphi = \nabla\xi = \nabla\eta = \nabla\dot{G} = 0$. این رده‌بندی، که آن را به اختصار رده‌بندی هم‌بسته می‌نامیم توسط روابط زیر مشخص می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1: F(x,y,z) = \frac{1}{2n}\{\dot{G}(x,\varphi y)\theta(\varphi z) + \dot{G}(\varphi x,\varphi y)\theta(\varphi^2 z)\\
&\qquad\qquad + \dot{G}(x,\varphi z)\theta(\varphi y) + \dot{G}(\varphi x,\varphi z)\theta(\varphi^2 y)\};\\
&\mathcal{F}_2: F(\xi,y,z) = F(x,\xi,z) = 0, \quad \underset{x,y,z}{\mathfrak{S}} F(x,y,\varphi z) = 0, \quad \theta = 0;\\
&\mathcal{F}_3: F(\xi,y,z) = F(x,\xi,z) = 0, \quad \underset{x,y,z}{\mathfrak{S}} F(x,y,z) = 0;\\
&\mathcal{F}_4: F(x,y,z) = -\frac{\theta(\xi)}{2n}\{\dot{G}(\varphi x,\varphi y)\eta(z) + \dot{G}(\varphi x,\varphi z)\eta(y)\};\\
&\mathcal{F}_5: F(x,y,z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}\{\dot{G}(x,\varphi y)\eta(z) + \dot{G}(x,\varphi z)\eta(y)\};\\
&\mathcal{F}_{6/7}: \begin{cases} F(x,y,z) = F(x,y,\xi)\eta(z) + F(x,z,\xi)\eta(y),\\ F(x,y,\xi) = \pm F(y,x,\xi) = -F(\varphi x,\varphi y,\xi), \theta = \theta^* = 0;\end{cases}\\
&\mathcal{F}_{8/9}: \begin{cases} F(x,y,z) = F(x,y,\xi)\eta(z) + F(x,z,\xi)\eta(y),\\ F(x,y,\xi) = \pm F(y,x,\xi) = +F(\varphi x,\varphi y,\xi);\end{cases}\\
&\mathcal{F}_{10}: F(x,y,z) = F(\xi,\varphi y,\varphi z)\eta(x);\\
&\mathcal{F}_{11}: F(x,y,z) = \eta(x)\{\eta(y)\omega(z) + \eta(z)\omega(y)\};
\end{aligned}$$

که در این روابط، $\mathfrak{S}$ نمادی برای جمع‌بندی چرخشی سه اِلمان است.

گزارهٔ ۱.۳. مؤلفه‌های اساسی تانسور ساختاری F روی $(\mathrm{T}_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

۱) $F(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j,\tilde{\partial}_t^T)\in\mathcal{F}_1;$
۲) $F(\tilde{\delta}_i,\tilde{\partial}_j^T,\xi)\in\mathcal{F}_4.$

اثبات. با استفاده از گزارهٔ ۲.۳ و انجام محاسباتی نه چندان دشوار اما طولانی، این نتیجه حاصل می‌شود که $F(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j,\tilde{\partial}_t^T)=a\mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,\partial_i,u)$. اکنون با جایگذاری $F(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j,\tilde{\partial}_t^T)$ در شرط رده $\mathcal{F}_1$ و پس از انجام محاسبات، این نتیجه حاصل می‌شود که $F_1(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j,\tilde{\partial}_t^T)=\frac{1}{2n}\{ag_{ij}\mathrm{Ric}(u,\partial_t)-ag_{it}\mathrm{Ric}(u,\partial_j)\}$. بنابراین $F(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j,\tilde{\partial}_t^T)$ به رده $\mathcal{F}_1$ متعلق است، اگر و تنها اگر $a\mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,\partial_i,u)=\frac{1}{2n}\{ag_{ij}\mathrm{Ric}(u,\partial_t)-ag_{it}\mathrm{Ric}(u,\partial_j)\}$. درستی آیتم دوم نیز به ترتیب مشابه قابل اثبات است.

ملاحظه ۳.۱. ([۱۵]). فرض کنیم (M,φ,η,ξ,g) یک منیفلد مجهز به ساختار تقریباً ب- مرتبط باشد. با تجزیهٔ فضای $\mathcal{F}$، این امکان وجود دارد که زیررده‌هایی از منیفلد تقریباً ب- مرتبط تعریف شود. در واقع، یک منیفلد تقریباً ب- مرتبط را متعلق به ردهٔ $\mathcal{F}_i$ $(i=1,\ldots,11)$ می‌نامیم، هرگاه مؤلفه‌های تانسور ساختاری F به رده $\mathcal{F}_i$ تعلق داشته باشد. به شیوهٔ مشابه می‌توان رده هایی به فرم $\mathcal{F}_i\oplus\mathcal{F}_j$ را نیز تعریف کرد. واضح است که شمار رده‌های قابل تصور برای منیفلدهای تقریباً ب- مرتبط برابر با 2^{11} است.

اکنون، با استفاده از گزارهٔ ۱.۴ و توجه ۲.۴ به بیان قضیه‌ای در باب دو مؤلفهٔ اساسی تانسور ساختاری F روی کلاف کروی می‌پردازیم.

قضیه ۳.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی باشد و کلاف کروی مجهز به ساختار تقریباً ب-مرتبط برآمده از متریک طبیعی روی آن را با $(\mathrm{T}_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})$ نشان می‌دهیم. دو مولفه‌ی اساسی تانسور ساختاری F روی کلاف کروی تحت شروطی بر حسب تانسور انحنا، به رده $\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_4$ که آن را به اختصار با $\mathcal{U}_1$ نشان می‌دهیم، تعلق دارد.

اثبات. با بهره‌گیری از گزاره‌ی ۱.۴، درستی مدعای این قضیه اثبات می‌شود.

گزارهٔ ۳.۲. فرض کنیم M یک منیفلد $(n+1)$-بعدی ریمانی و $(\mathrm{T}_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})$ کلاف کروی مماس مجهز به ساختار تقریبا ب-مرتبط باشد. همهٔ مولفه‌های صفر تانسور ساختاری F به رده‌های $\mathcal{F}_5$ و $\mathcal{F}_{10}$ و $\mathcal{F}_{11}$ تعلق دارند.

اثبات. محاسبه‌ی مستقیم بر درستی این قضیه صحه می‌گذارد.

اکنون، ردهٔ $\mathcal{F}_5\oplus\mathcal{F}_{10}\oplus\mathcal{F}_{11}$ را به اختصار با $\mathcal{U}_2$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که σ انتخاب دلخواهی از اعضای این رده باشد (مثلاً $\mathcal{F}_{10}$ یا $\mathcal{F}_5\oplus\mathcal{F}_{11}$ یا $\mathcal{F}_{11}$ و غیره). با استفاده از قضایای ۳.۴ و ۴.۴ به بیان قضیهٔ اصلی این مقاله می‌پردازیم.

قضیهٔ ۳.۲. [رده بندی کلاف کروی] فرض کنیم M یک منیفلد $(n+1)$-بعدی ریمانی و $(\mathrm{T}_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})$ کلاف کروی مماس مجهز به ساختار تقریبا ب-مرتبط باشد. در این صورت

۱) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{U}_1\oplus\sigma\Leftrightarrow$
$$\mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,\partial_i,u)=\frac{1}{2n}\{g_{ij}\mathrm{Ric}(u,\partial_t)-g_{it}\mathrm{Ric}(u,\partial_j)\},$$
$$\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=\frac{1}{2n}\{g_{ij}\mathrm{Ric}(u,u)\};$$
۲) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_1\oplus\sigma\Leftrightarrow$
$$\mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,\partial_i,u)=\frac{1}{2n}\{g_{ij}\mathrm{Ric}(u,\partial_t)-g_{it}\mathrm{Ric}(u,\partial_j)\},\quad \mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0;$$
۳) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_2\oplus\sigma\Leftrightarrow\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0,\quad \mathrm{R}(\partial_i,\partial_j,\partial_t,u)=0;$
۴) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_3\oplus\sigma\Leftrightarrow$
$$\mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,u,\partial_i)+\mathrm{R}(\partial_t,\partial_i,u,\partial_j)=0,\quad \mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0;$$
۵) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_4\oplus\sigma\Leftrightarrow$
$$\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=\frac{1}{2n}\{g_{ij}\mathrm{Ric}(u,u)\},\quad \mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0;$$
۶) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_{6/\dots/9}\oplus\sigma\Leftrightarrow\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0,\quad \mathrm{R}(\partial_i,\partial_j,\partial_t,u)=0.$

اثبات. ما تنها به اثبات اولین گزاره می‌پردازیم. بنابر گزاره‌ی ۳.۴ دو مؤلفهٔ اساسی تانسور ساختاری F تحت شرایطی بر حسب تانسور انحنا، شرایط ردهٔ $\mathcal{U}_1$ را برآورده می‌کند. همچنین بنابر گزاره‌ی ۴.۴ همهٔ مؤلفه‌های صفر تانسور ساختاری F به ردهٔ σ تعلق دارند که σ گزینش دلخواهی از اعضای رده $\mathcal{U}_2$ می‌باشد. در نتیجه، مولفه‌های تانسور ساختاری F به رده $\mathcal{U}_1\oplus\sigma$ متعلق هستند و این اثبات آیتم را کامل می‌کند.

۱.۳ رده‌بندی کلاف کروی تحت شروطی بر حسب تانسورهای انحنا: در این بخش به اِرائه شرایطی بر اساس تانسورهای انحنا روی منیفلد پایه مبادرت می‌ورزیم، که با برقراری این شروط، مؤلفه‌های تانسور ساختاری F می‌تواند به هر یک از رده‌های یازده‌گانه از رده‌بندی هم‌بسته برای منیفلدهای تقریباً ب- مرتبط تعلق داشته باشد. در جهت نیل به این مقصود، قضیهٔ زیر را اِرائه می‌دهیم.

قضیه ۳.۱. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی $(n+1)$-بعدی و $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})$ کلاف کروی مجهز به ساختار تقریبا ب-مرتبط باشد. در این صورت

۱) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_1\Leftrightarrow$
$$\mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,\partial_i,u)=\tfrac{1}{2n}\{g_{ij}\mathrm{Ric}(u,\partial_t)-g_{it}\mathrm{Ric}(u,\partial_j)\},\mathrm{Ric}(u,\partial_j),\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0;$$
۲) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_2\Leftrightarrow\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0,\qquad \mathrm{R}(\partial_i,\partial_j,\partial_t,u)=0;$
۳) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_3\Leftrightarrow\mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,u,\partial_i)+\mathrm{R}(\partial_t,\partial_i,u,\partial_j)=0,\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0;$
۴) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_4\Leftrightarrow$
$$\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=\frac{1}{2n}\{g_{ij}\mathrm{Ric}(u,u)\},\quad \mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,u,\partial_i)=0,\quad \mathrm{Ric}(u,u)=0;$$
۵) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_5\Leftrightarrow\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0,\quad \mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,\partial_i,u)=0;$
۶) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_{6/\dots/9}\Leftrightarrow\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0,\quad \mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,\partial_i,u)=0;$
۷) $(T_1M,\varphi,\xi,\eta,\dot{G})\in\mathcal{F}_{10/11}\Leftrightarrow\mathrm{R}(\partial_i,u,\partial_j,u)=0,\quad \mathrm{R}(\partial_t,\partial_j,\partial_i,u)=0.$

اثبات. با استفاده از گزارهٔ ۵.۴ روابط زیر را داریم.

۱. در ابتدا مؤلفه‌های صفر تانسور اساسی F را در نظر گرفته و شرایط ردهٔ اول را برای آنها بررسی می‌کنیم. محاسبات نشان می‌دهد که $F(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_j^T \tilde{\partial}_t^T) = 0$ شرط رده اول را براورده می‌کند، اگر و تنها اگر $\mathrm{Ric}(u, \partial_j) = 0$. سایر مؤلفه‌های صفر تانسور ساختاری بدون هیچ شرطی در ردهٔ $\mathcal{F}_1$ صدق می‌کند. اکنون به مؤلفه‌های اساسی تانسور ساختاری می‌پردازیم. بنا بر گزارهٔ ۵.۴ مؤلفهٔ $F(\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_j, \tilde{\partial}_t^T)$ به رده $\mathcal{F}_1$ متعلق است اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_t, \partial_j, \partial_i, u) = \frac{1}{2n}\{g_{ij}\mathrm{Ric}(u, \partial_t) - g_{it}\mathrm{Ric}(u, \partial_j)\}$. همچنین محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که $F(\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_j^T, \xi)$ به ردهٔ اول تعلق دارد اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = 0$. بنابراین ادعای این آیتم اثبات می‌شود.

۲. در ابتدا دو مؤلفهٔ اساسی F را مد نظر قرار می‌دهیم. محاسبات نشان می‌دهد که دو مؤلفهٔ اساسی تانسور ساختاری F به ردهٔ $\mathcal{F}_2$ تعلق دارند اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = 0$ و $\mathrm{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_t, u) = 0$. اکنون دربارهٔ مؤلفه‌های صفر تانسور ساختاری، با انجام محاسبات این نتیجه حاصل می‌شود که مؤلفه‌های $F(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\partial}_j^T, \tilde{\delta}_t)$ و $F(\xi, \tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_k)$ شرط ردهٔ $\mathcal{F}_2$ را برآورده می‌کند، اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = 0$ و $\mathrm{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_t, u) = 0$. سایر مؤلفه‌های صفر، بدون هیچ شرطی به ردهٔ دوم متعلق هستند.

۳. با انجام محاسبات، این نتیجه حاصل می‌شود که دو مؤلفهٔ ناصفر F رده $\mathcal{F}_3$ را برآورده می‌سازند، اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_t, \partial_j, u, \partial_i) + \mathrm{R}(\partial_t, \partial_i, u, \partial_j) = 0$ و $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = 0$. همچنین، $F(\xi, \tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_j^T)$ و $F(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\delta}_i, \xi)$ به ردهٔ $\mathcal{F}_3$ تعلق دارند اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = 0$. سایر مؤلفه‌های صفر تانسور ساختاری بدون هیچ شرطی به این رده تعلق دارند.

۴. نگاهی اجمالی به گزارهٔ ۵.۴ نشان می‌دهد که $F(\tilde{\delta}_i, \tilde{\partial}_j^T, \xi)$ شرط ردهٔ $\mathcal{F}_4$ را برآورده می‌سازد، اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = \frac{1}{2n}\{g_{ij}\mathrm{Ric}(u, u)\}$. همچنین $F(\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_j, \tilde{\partial}_t^T)$ به ردهٔ مذکور تعلق دارد، اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_t, \partial_j, u, \partial_i) = 0$. دربارهٔ مولفه‌های صفر تانسور ساختاری، می‌توان نشان داد که مولفه‌ی $F(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\delta}_j, \xi)$ به $\mathcal{F}_4$ متعلق است، اگر و تنها اگر $\mathrm{Ric}(u, u) = 0$ و سایر مولفه‌های صفر تانسور ساختاری بدون هیچ شرطی به این رده متعلق می‌باشند.

۵. در مورد ردهٔ $\mathcal{F}_5$ این واقعیت که $\theta^*(\xi) = 0$ نتیجه می‌دهد که دو مؤلفهٔ اساسی تانسور ساختاری F به رده $\mathcal{F}_5$ تعلق دارند، اگر و تنها اگر برابر با صفر شوند، یعنی $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = 0$ و $\mathrm{R}(\partial_t, \partial_j, \partial_i, u) = 0$. به وضوح همهٔ مؤلفه‌های صفر تانسور ساختاری نیز به این رده متعلق می‌باشند.

۶. محاسبه نشان می‌دهد که دو مؤلفهٔ اساسی F به این رده‌ها تعلق دارند اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_t, \partial_j, \partial_i, u) = 0$ و $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = 0$. همچنین $F(\tilde{\partial}_i^T, \tilde{\delta}_j, \xi)$ به عنوان یک مؤلفهٔ صفر، شرایط این رده‌ها را برآورده می‌کند، اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = 0$. بنابراین ادعای ما اثبات می‌شود.

۷. همهٔ مؤلفه‌های صفر تانسور ساختاری F شرایط ردهٔ $\mathcal{F}_{10}$ و $\mathcal{F}_{11}$ را برآورده می‌کنند. همچنین دو مؤلفهٔ اساسی تانسور ساختاری، در این رده‌ها صدق می‌کنند اگر و تنها اگر $\mathrm{R}(\partial_i, u, \partial_j, u) = 0$ و $\mathrm{R}(\partial_t, \partial_j, \partial_i, u) = 0$، که اثبات قضیه را کامل می‌کند.

ملاحظه ۳.۱. تجزیهٔ $\mathcal{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{11}$، با استناد به قضیهٔ ۳ از [۱۵]، متعامد است و بنابراین، همهٔ اشتراکات دوبه‌دوی این رده‌ها، به ردهٔ $\mathcal{F}_0$ تقلیل می‌یابد. به عبارت دیگر، $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \mathcal{F}_0$ $(i, j = 1, \ldots, 11,\ \ i \neq j)$.

نتیجهٔ ۳.۱. با استناد به قضیهٔ ۵.۴ این نتیجه حاصل می‌شود که تحت برقراری یک شرط بر اساس تانسور انحنا، کلاف کروی مماس مجهز به ساختار تقریباً ب- مرتبط $(\mathrm{T}_1 M, \varphi, \xi, \eta, \dot{G})$ به هشت رده از رده‌بندی هم‌بسته تعلق پیدا می‌کند.

نتیجهٔ ۴.۲. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی تخت و $(\mathrm{T}_1 M, \varphi, \xi, \eta, \dot{G})$ کلاف کروی مماس مجهز به ساختار تقریباً ب- مرتبط باشد. به واسطهٔ گزارهٔ ۲.۳، تمام مولفه‌های اساسی تانسور ساختاری F برابر با صفر هستند و بنابراین، کلاف کروی مماس $(\mathrm{T}_1 M, \varphi, \xi, \eta, \dot{G})$ به ردهٔ $\mathcal{F}_0$ تعلق می‌یابد.

Refrences

1. K. M. T. Abbassi and G. Calvaruso, g-natural contact metrics on unit tangent sphere bundles, Monatsh. Math., **151**(2006), 89-109.
2. K. M. T. Abbassi and G. Calvaruso, The curvature tensor of g-natural metrics on unit tangent sphere bundles, Int. J. Contemp. Math. Sci., **6**(2008), 245-258.
3. K. M. T. Abbassi and O. Kowalski, Naturality of homogeneous metrics on Stiefel manifolds $SO(m+1)/SO(m-1)$, Diff. Geom. Appl., **28**(2010), 131-139.
4. K. M. T. Abbassi and M. Sarih, On some hereditary properties of Riemannian g-natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds, Diff. Geom. Appl., **22**(2005), 19-47.
5. K. M. T. Abbassi and M. Sarih, On natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds, Arch. Math. (Brno), **41**(2005), 71-92.
6. D. E. Blair, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Second Edition. Progress in Mathematics 203, Birkhäuser, Boston.(۲۰۱۰) ,
7. E. Boeckx and L. Vanhecke, Characteristic reflections on unit tangent sphere bundles, Houston J. Math., **23**(1997), 427-448.
8. E. Boeckx and L. Vanhecke, Geometry of the tangent sphere bundle, Proceedings of the Workshop on Recent Topics in Differential Geometry, Santiago de Compostela, (1997), 5-17.
9. E. Boeckx and L. Vanhecke, Curvature homogeneous unit tangent sphere bundles, Publ. Math. Debrecen, **35**(1998), 389-413.
10. E. Boeckx and L. Vanhecke, Unit tangent sphere bundles and two-point homogeneous spaces, Period. Math. Hungar., **36**(1998), 79-95.

11. E. Boeckx and L. Vanhecke, Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent bundles, Diff. Geom. Appl., **13**(2000), 77-93.

12. E. Boeckx and L. Vanhecke, Unit tangent sphere bundles with constant scalar curvature, Czechoslovak Math. J., **51**(126)(2001), 523-544.

13. G. Calvaruso, Contact metric geometry of the unit tangent sphere bundle, Complex, contact and symmetric manifolds, Progress in Mathematics, **234**(2005), 41-57.

14. G. Calvaruso and V. Mart1̆3053′fn-Molina, Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **194**(2015), 1359-1380.

15. G. Ganchev and V. Mihova and K. Gribachev, Almost contact manifolds with B-metric, Math. Balkanica (N.S.), **7**(1993), 261-276.

16. O. Kowalski and M. Sekizawa, Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on tangent bundles-a classification, Bull. Tokyo Gakugei Univ., **4**(40)(1988), 1-29.

17. O. Kowalski and M. Sekizawa, On tangent sphere bundles with small or large constant radius, Ann. Glob. Anal. Geom., **18**(2000), 207-219.

18. O. Kowalski and M. Sekizawa, On the scalar curvature of tangent sphere bundles with arbitrary constant radius, Bull. Greek Math. Soc., **44**(2000), 17-30.

19. O. Kowalski and M. Sekizawa, On Riemannian manifolds whose tangent sphere bundles can have nonnegative sectional curvature, Univ. Jagellon. Acta Math., **40**(2002), 245-256.

20. O. Kowalski and M. Sekizawa and Z. Vlášek, Can tangent sphere bundles over Riemannian manifolds have strictly positive sectional curvature?, Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray, Contemp. Math., **288**(2001), 110-118.

21. M. Manev, A connection with parallel torsion on almost hypercomplex manifolds with Hermitian and anti-Hermitian metrics, J. Geom. Phys., **61**(2011), 248-259.

22. M. Manev, Properties of curvature tensors on almost contact manifolds with B-metric, Proceedings of Jubilee Scientific Session of Vassil Levsky Higher Military School, Veliko Tarnovo, **27**(1993), 221-227.

23. M. Manev and K. Gribachev, A connection with parallel totally skew-symmetric torsion on a class of almost hypercomplex manifolds with Hermitian and anti-Hermitian metrics, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **8**(2011), 115-131.

24. M. Manev and K. Gribachev, Conformally invariant tensors an almost contact manifolds with B-metric, Serdica Bulgariacae Mathematicae Publicationes, **20**(1994), 133-147.

25. M. Manev and M. Ivanova, Canonical-type connection on almost contact manifolds with B-metric, Ann. Glob. Anal. Geom., **43**(2013), 397-408.

26. M. Manev and K. Sekigawa, Some four-dimensional almost hypercomplex pseudo-Hermitian manifolds, Contemporary Aspects of Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, Eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2005), 174-186.

27. M. Manev, Almost Contact B-metric Structures and the Bianchi Classification of the Three-dimensional Lie Algebras, Second International Conference "Mathematics Days in Sofia" ,(2017).

28. M. Manev, Almost Contact B-metric Manifolds as Extensions of a 2-dimensional Space-form, Acta Univ. Palacki. Olomuc. Mathematica, **1**(2016), 59-71.

29. M. Manev, Curvature Properties on Some Classes of Almost Contact Manifolds with B-Metric, Comptes Rendus DE L'AcadéMie Bulgare Des Sciences: Sciences MathéMatiques ET Naturelles **65**(3) (2011):283-290.

30. S. Sasaki, On the differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure 1, Tohoku Math journal, **12**(1960), 459-476.