عملگرهای ترکیبی و ضربی روی فضاهای اورلیچ

یوسف استارمی*، سعیده شمسی گمچی؛
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران

دریافت ۹٤/۷/۳ پذیرش ۹٤/۱۲/۲٤

چکیده

عملگرهای ترکیبی C_φ تولید شده به‌وسیلهٔ تبدیل خطی اندازه‌پذیر و غیرمنفرد $\varphi:\Omega\to\Omega$ و عملگر ضربی M_u، تولید شده به‌وسیلهٔ تابع اندازه‌پذیر $u:\Omega\to C$، بین دو فضای متفاوت اورلیچ $L^{\Phi_1}(\Omega,\Sigma,\mu)$ و $L^{\Phi_2}(\Omega,\Sigma,\mu)$ را در نظر می‌گیریم. سپس کرانداری، فشردگی و نرم اساسی عملگرهای ترکیبی و ضربی را از نظر خواص تابع φ، تابع u و فضای اندازه (Ω,Σ,μ) بررسی می‌کنیم. در حقیقت تعدادی از نتایج [۸]، [۹]، [۲۲] را توسیع می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی عملگر ترکیبی، عملگر ضربی، عملگر فشرده، فضای اورلیچ، نرم اساسی

Mathematics Subject Classification [2010]: 47B37, 46B99

مقدمه

فرض کنید $\Phi : R \to R^+$ تابعی پیوسته محدب باشد به‌طوری‌که:

$$\Phi(x) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = o \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = \infty \qquad (۲)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Phi(x)}{x} = \infty \qquad (۳)$$

در این صورت تابع محدب Φرا تابع یانگ می‌نامیم. تابع یانگ مکمل Φ، تابع محدب یکتایی مانند $\Psi : R \to R^+$ است که دارای خواص مشابه Φ است و بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\Psi(y) = \sup\{x|y| - \Phi(x) : x \geq 0\}, y \in R$$

یک تابع یانگ Φ در شرط Δ_2(جهانی)صدق می کند هرگاه ثابت های $k > o$ و $x_0 \geq o$ موجود باشند به‌طوری که:

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x), x \geq x_0 \geq 0 \quad (\mathrm{x}_0 = 0)$$

اگر Φیک تابع یانگ باشد، آن‌گاه مجموعه توابع $\sum-$اندازه‌پذیر

$$L^\Phi(\sum) = \left\{f : \Omega \to C : \exists k > 0, \int_\Omega \Phi(k|f|)\,d\mu < \infty\right\}$$

***نویسندهٔ مسئول** r yestaremi@pun.ac.ir

با توجه به نرم $N_{\Phi}\left(f\right)=\inf\left\{k>0:\int\Phi\left(\frac{f}{k}\right)d\mu\leq 1\right\}$ فضای باناخ است. فضای $(L^{\Phi}(\Sigma), N_{\Phi}(0))$، فضای اورلیچ نامیده می‌شود. اگر $\Phi\in\Delta_2$ آن‌گاه فضای دوگان $L^{\Phi}(\Sigma)$ برابر $L^{\Phi^*}(\Sigma)$ است.

با توجه به نرم $N_{\Phi}(.)$ گوییم دنبالهٔ $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $L^{\Phi}(\Sigma)$ همگرایی معمولی به u در $L^{\Phi}(\Sigma)$ دارد ($u_n\to u$) هرگاه، $N_{\Phi}(u_n-u)\to 0$. همچنین یک دنبالهٔ $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $L^{\Phi}(\Sigma)$ را همگرا به $u\in L^{\Phi}(\Sigma)$ در $\Phi-$میانگین گوییم هرگاه $\lim_{x\to\infty}I_{\Phi}(u_n-u)=\lim_{x\to\infty}\int_{\Omega}\Phi(\left|u_n-u\right|)\,d\mu=0$ فضای اندازه‌پذیر کامل و $\sigma-$متناهی $(\Omega,\sum,\mu)$ و همچنین تبدیل خطی اندازه‌پذیر $\varphi:\Omega\to\Omega$، بدین‌معنی که برای هر $A\in\sum$ داریم $\varphi^{-1}(A)\in\sum$ را در نظر می‌گیریم. اگر برای هر $A\in\sum$ که $\mu(A)=O$، داشته باشیم $\mu(\varphi^{-1}(A))=0$، آن‌گاه تابع φ را غیرمنفرد می‌نامیم. این شرط بدین معنی است که اندازهٔ $\mu\circ\varphi^{-1}$، با ضابطهٔ $\mu\circ\varphi^{-1}(A)=\mu(\varphi^{-1}(A))$ برای هر $A\in\sum$، نسبت به‌اندازهٔ μ پیوسته مطلق است $\mu\circ\varphi^{-1}\ll\mu$.

بنا به قضیه رادون نیکودیم، تابع انتگرال‌پذیر غیرمنفی مانند h روی Ω وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر، $A\in\sum$، $\mu\circ\varphi^{-1}(A)=\int_A hd\mu$. یک تبدیل خطی غیرمنفرد φ، یک عملگر خطی (عملگر ترکیبی) C_{φ} از $L^0(\Omega)$ به خودش را به‌وجود می‌آورد که با این ضابطه تعریف می‌شود:

$$C_{\varphi}(f)(t)=f(\varphi(t))\quad;\quad t\in\Omega,\ f\in L^0(\Omega),$$

که $L^0(\Omega)$، فضای خطی از همه کلاس‌های هم‌ارزی توابع $\sum-$اندازه‌پذیر است، بدین معنی که هر دو تابعی که $\mu-$تقریباً همه جا روی Ω یک‌سان هستند را یکی در نظر می‌گیریم. در این‌جا غیرمنفرد بودن φ، تضمینی برای خوش تعریف بودن عملگر C_{φ} از $L^0(\Omega)$ به خودش است. اگر C_{φ} نگاشتی از یک فضای اورلیچ $L^{\Phi}(\Omega)$ به خودش باشد، آن‌گاه C_{φ} عملگر ترکیبی روی $L^{\Phi}(\Omega)$ نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که در این حالت C_{φ} کراندار است.

فرض کنید $u:\Omega\to C$ تابعی اندازه‌پذیر باشد. ضابطه‌ای که u را به $u.f$ نسبت می‌دهد، یک تبدیل خطی روی $L^{\Phi}(\Omega)$ تعریف می‌کند که آن‌را با M_u نمایش داده و در حالتی که M_u پیوسته باشد، آن‌را عملگر ضربی ایجاد شده توسط u می‌خوانیم. در دهه‌های گذشته، به‌طور چشم‌گیری به عملگرهای ضربی و ترکیبی توجه شده است. به‌ویژه عملگرهایی که روی بعضی از فضاهای توابع اندازه‌پذیر مانند فضاهای، L^p فضاهای برگمن، فضاهای اورلیچ تعریف شده‌اند و در بررسی عملگرها روی فضاهای هیلبرت نقش اساسی ایفا می‌کنند. ریاضی‌دانان زیادی خواص اساسی عملگرهای ضربی و ترکیبی روی فضاهای توابع اندازه‌پذیر را بررسی کرده‌اند. برای جزییات بیش‌تر روی این عملگرها اشاره می‌کنیم به آبراهام [۱]، تاکاجی [۲۰]، ایکسلر [۲]، استارمی و جبارزاده [۵]، هالموس [۶]،لامبرت [۱۲]، سینگ و منهس [۱۶]، تاکاجی [۱۹]، [۲۱]، [۲۲]، هودزیک و کربک [۷]، چوهودزیک، کومر و مالیگراندا [۸]، آرورا [۳]، راج، شرما و کومار [۱۴] و سایر اثرات دیگر. [۹] و [۱۷] عملگرهای ترکیبی وزن‌دار و ضربی روی فضاهای اورلیچ را بررسی کرده‌اند. در

حالتی که Φ تابع یانگ خوب (N-function) است، تعدادی نتایج روی کران‌داری عمل‌گرهای ترکیبی روی فضاهای اورلیچ در [۱۰] و [۱۳]به‌دست آمده است. چنان‌که در [۱۸] مشاهده می‌شود، نرم اساسی نقش جالبی در مسائل فشردگی عمل‌گرهای سخت ایفا می‌کند. افراد زیادی نرم اساسی انواع مختلفی از عمل‌گرهای سخت را به‌دست آورده‌اند. برای بررسی عمل‌گرهای ترکیبی، به [۱۵]، [۲۱]، [۲۴] اشاره می‌کنیم. .به‌طور دقیق حساب کردن نرم و نرم اساسی عمل‌گرهای ضربی و ترکیبی روی فضاهای اورلیچ، سئوالی بدیهی نیست. علی‌رغم سختی مربوط به محاسبهٔ دقیق نرم اساسی، معمولاً پیدا کردن کران بالا و پایین برای نرم اساسی، تحت شرایط خاص امکان‌پذیر است. در ابن مقاله، قصد داریم مطالبی در مورد کران‌داری، فشردگی و نرم اساسی عمل‌گرهای ضربی و ترکیبی بین دو فضای اورلیچ ارائه دهیم. در بخش ۲، شرایط لازم و کافی برای کرانداری عمل‌گرهای ضربی و ترکیبی بین دو فضای اورلیچ متفاوت را به‌دست می‌آوریم. در بخش ۳، شرایط لازم و کافی برای فشردگی عمل‌گرهای ضربی و ترکیبی بین دو فضای اورلیچ متفاوت ارائه می‌دهیم. سپس در بخش۴، با استفاده از حکم‌های اثبات شده در بارهٔ فشردگی در بخش۳، نرم اساسی عمل‌گرهای ضربی و ترکیبی را تخمین می‌زنیم.

کرانداری

در این بخش، شرایط لازم و کافی برای کران‌داری عمل‌گرهای ترکیبی و ضربی از $L^{\Phi_1}(\Omega)$ به $L^{\Phi_2}(\Omega)$ را ارائه می‌دهیم.

قضیه۲.۱. فرض کنید $(\Omega,\sum,\mu)$ فضایی اندازه‌پذیر $\sigma-$متناهی و $\varphi:\Omega\to\Omega$ تبدیلی خطی اندازه‌پذیر غیرمنفرد پوشا باشند. اگر h مشتق رادون نیکودیم $\frac{d\mu o\varphi^{-1}}{d\mu}$ باشد و:

a) عمل‌گر ترکیبی C_φ از $L^{\Phi_1}(\Omega)$ به $L^{\Phi_2}(\Omega)$ کران‌دار است.

b) فضای اورلیچ $L^{\Phi_1}(\Omega)$ بطور پیوسته در فضای اورلیچ وزند $L_h^{\Phi_2}(\Omega)$ ار نگاشته می شود، هرگاه:

$$L_h^{\Phi_2}(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\mathbb{C}:\exists k>0,\quad I_{\Phi_2,\mathrm{h(f)}}\int_\Omega h\Phi_2(k|f|)\,d\mu<\infty\right\}$$

c) برای هر $u>0$ و $t\in\Omega\setminus A$ با $\mu(A)=0$، وجود دارند $a,b>0$ و $g\in L^1(\Omega)$ به‌طوری‌که: $\Phi_2(au)h(t)\le b\Phi_1(u)+g(t)$ آنگاه $a\to b$ و $c\to a$ همچنین، اگر $(\Omega,\sum,\mu)$ یک فضای اندازه‌پذیر غیراتمیک $\sigma-$متناهی باشد، آنگاه a, b, c معادلند.

اثبات: $a\to b$ چون φ پوشاست، بنابراین برای هر $f\in L^{\Phi_1}(\Omega)$ داریم:

$$\begin{aligned}I_{\Phi_2}(C_\varphi(f))&=\int_\Omega\Phi_2(|C_\varphi(f)|)\,d\mu=\int_{\varphi(\Omega)}h\Phi_2(|f|)\,d\mu\\&=\int_\Omega h\Phi_2(|f|)\,d\mu=I_{\Phi_2,h}(f)\end{aligned}$$

پس اگر(a) درست باشد، آنگاه برای هر $f\in L^{\Phi_1}(\Omega)$ داریم:

$$N_{\Phi_2,\mathrm{h}}(f)=N_{\Phi_2}(C_\varphi(f))\le\|C_\varphi\|N_{\Phi_1}(f)$$

این رابطه ایجاب می‌کند که فضای اورلیچ $L^{\Phi_1}(\Omega)$ به‌طور پیوسته در فضای اورلیچ $L_h^{\Phi_2}(\Omega)$ وزن‌دار نگاشته شود. بنا به [[۱۱] ۸ و Th[۵] به‌راحتی می‌توان دید که $b \to c$ برای $c \to a$، فرض کنید که c برقرار باشد، آن‌گاه برای هر $f \in L^{\Phi_1}(\Omega)$ می‌توان نوشت:

$$I_{\Phi_2}\left(\frac{aC_\varphi(f)}{N_{\Phi_1}(f)}\right) = \int_\Omega \Phi_2\left(\frac{af(t)}{N_{\Phi_1}(f)}\right) h(t)\, d\mu$$
$$\leq b\int_\Omega \Phi_1\left(\frac{f(t)}{N_{\Phi_1}(f)}\right) d\mu + \int_\Omega g(t)\, d\mu \leq b + \int_\Omega g(t)\, d\mu \leq M'$$

که $M' > 1$ نتیجه می‌دهد که $I_{\Phi_2}\left(\frac{aC_\varphi(f)}{M'N_{\Phi_1}(f)}\right) \leq 1$ بنابراین $N_{\Phi_2}(C_\varphi(f)) \leq \frac{M'}{a} N_{\Phi_1}(f)$

قضیه ۲. ۲. اگر $C_\varphi : L^{\Phi_1}(\Omega) \to L^{\Phi_2}(\Omega)$ یک تبدیل خطی باشد، آن‌گاه C_φ کران‌دار است.

اثبات: با استفاده از قضیه گراف بسته، یک بودن Φ_1 و Φ_2 و این حقیقت که همگرایی نرمی، همگرایی $\Phi-$ میانگین را ایجاب می‌کند، کران‌داری C_φ به‌دست می‌آید.

ملاحظه ۲.۳. بنا به قضیه ۲.۲ داریم: $C_\varphi \in B(L^{\Phi_1}, L^{\Phi_2})$ اگر و تنها اگر $C_\varphi(L^{\Phi_1}) \subseteq L^{\Phi_2}$ بنابراین این شرایط برقرارند:

a) عمل‌گر خطی C_φ از $L^{\Phi_1}(\Omega)$ به $L^{\Phi_2}(\Omega)$ کران‌دار است.

b) برای هر $f \in L^{\Phi_1}(\Omega)$ وجود دارد $\lambda > 0$ به‌طوری‌که $\int_\Omega h\Phi_2(\lambda|f|)\, d\mu < \infty$:

c) فضای اورلیچ $L^{\Phi_1}(\Omega)$ به‌طور پیوسته در فضای اورلیچ وزن‌دار $L_h^{\Phi_2}(\Omega)$ نگاشته شده است.

d) برای هر $u > 0$ و $t \in \Omega \setminus A$ با $\mu(A) = 0$ وجود دارند $a, b > 0$ و $g \in L^1(\Omega)$ به‌طوری‌که:

$$\Phi_2(au)h(t) \leq b\Phi_1(u) + g(t)$$

قضیه ۲.۴. فرض کنید $u : \Omega \to \mathbb{C}$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد آن‌گاه:

a) اگر $M > 0$ و $g \in L_+^1(\Omega)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $v > 0$ و $x \in \Omega \setminus \mathrm{A}$ ، $\mu(A) = 0$ داشته باشیم $\Phi_2(u(x)v) \leq \Phi_1(Mv) + g(x)$ آن‌گاه $M_u : L^{\Phi_1}(\Omega) \to L^{\Phi_2}(\Omega)$ یک عمل‌گر کران‌دار است.

b) اگر $(\Omega, \sum, \mu)$ فضای اندازه‌پذیر غیراتمیک و $M_u : L^{\Phi_1}(\Omega) \to L^{\Phi_2}(\Omega)$ عمل‌گر کراندار باشند، آن‌گاه برای هر $v > 0$ و $x \in \Omega \setminus \mathrm{A}$ با $\mu(A) = 0$ ، وجود دارند $M > 0$ و $g \in L_+^1(\Omega)$ به‌طوری‌که:

$$\Phi_2(u(x)v) \leq \Phi_1(Mv) + g(x)$$

اثبات: (a) برای هر تابع $f \in L^{\Phi_1}(\Omega)$ داریم:

$$I_{\Phi_2}\left(\frac{uf}{MN_{\Phi_1}(f)}\right) \leq \int_\Omega \Phi_1\left(\frac{Mf(t)}{MN_{\Phi_1}(f)}\right) d\mu + \int_\Omega g(t)\, d\mu \leq 1 + \int_\Omega g(t)\, d\mu \leq M'$$

جایی‌که $M' > 1$ این ایجاب می‌کند که $I_{\Phi_2}\left(\frac{uf}{MM'N_{\Phi_1}(f)}\right) \leq 1$ بنابراین برای هر $f \in L^{\Phi_1}(\Omega)$، می‌توان نوشت:

$$N_{\Phi_2}(M_u(f)) \leq MM'N_{\Phi_1}(f)$$

b) اگر شرط برقرار نباشد، آنگاه برای هر $n \in N$ و $g \in L_+^1(\Omega)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر F_n' از Ω و تعدادی $a_n \in \mathbb{C}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$F_n' = \{x \in \Omega : \Phi_2(|u(x)\alpha_n|) > \Phi_1(2^n n^2 \alpha_n) + g(x)\}$$

که F_n' مجموعه‌ای اندازه‌پذیر مثبت است زیرا

$$F_n' \subseteq \{x \in \Omega : \Phi_2(|u(x)\alpha_n|) > \Phi_1(2^n n^2 \alpha_n)\} = F_n$$

آنگاه F_n نیز مجموعه‌ای اندازه‌پذیر از اندازهٔ مثبت است. چون μ غیراتمیک است، یک دنباله جدا از هم E_n از مجموعه‌های اندازه‌پذیر را طوری انتخاب می کنیم که $E_n \subseteq F_n$ و

$$\mu(E_n) = \frac{\Phi_2(|\alpha_1|)}{2^n \Phi_1(n^2|\alpha_n|)}$$

برای $c_n = n|a_n|$، تعریف می‌کنیم $f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \chi_{E_n}$. فرض کنید $a > 0$ و $n_0 > a$، آنگاه:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_1(\alpha f)\, d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_1(\alpha c_n)\int \chi_{E_n} d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \Phi_1(\alpha c_n)\mu(E_n) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\Phi_1(\alpha c_n)\Phi_2(|\alpha_1|)}{2^n \Phi_1(n^2|\alpha_n|)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0} \Phi_1(\alpha c_n)\mu(E_n) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\Phi_1(n^2|\alpha_n|)\Phi_2(|\alpha_1|)}{2^n \Phi_1(n^2|\alpha_n|)} < \infty
\end{aligned}$$

اگر $\alpha > \frac{1}{n_0}$، آنگاه :

$$\int_\Omega \Phi_2(\alpha|u.f|)\, d\mu \geq \sum_{n\geq n_0} \int_{E_n} \Phi_2(\alpha n|u\alpha_n|)\, d\mu \geq$$
$$\sum_{n_0} \int_{E_n} \Phi_2(u\alpha_n)\, d\mu \geq \sum_{n\geq n_0} \Phi_1(2^n n^2|\alpha_n|)\mu(E_n) \geq \sum_{n\geq n_0} \Phi_2(|\alpha_1|) = \infty$$

که این یک تناقض است.

نتیجه۵.۲. فرض کنید $(\Omega, \sum, \mu)$ فضایی اندازه‌پذیر غیراتمیک باشد. آنگاه $M_u : L^{\Phi_1}(\Omega) \to L^{\Phi_2}(\Omega)$ عملگر کران‌دار است اگر و تنها اگر $M > 0$ و $g_+^1(\Omega)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $v > 0$ و $x \in \Omega \setminus A$ با $\mu(A) = 0$ داشته باشیم $\Phi_2(u(x)v) \leq \Phi_1(Mv) + g(x)$.

قضیه۶.۲. اگر $M_u : L^{\Phi_1}(\Omega) \to L^{\Phi_2}(\Omega)$ یک تبدیل خطی است، آنگاه M_u کران‌دار است.

اثبات: با استفاده از قضیه گراف بسته، یک به یک بودن Φ_1 و Φ_2 و این حقیقت که همگرایی نرمی، همگرایی $\Phi-$میانگین را ایجاب می‌کند، نتیجه می‌گیریم که M_u کران‌دار است.

فشردگی

در این بخش، شرایط لازم و کافی برای فشردگی عملگرهای ضربی و ترکیبی را ارائه می‌کنیم. یادآوری می‌شود که یک اتم از اندازه μ، عنصری مانند $A \in \sum$ با $\mu \;\; A \;\; > 0$ است که برای هر $F \in \sum$، اگر $F \subseteq A$ آن‌گاه $\mu \;\; F \;\; = 0$ یا $\mu \;\; F \;\; = \mu \;\; A$ (فضای اندازه بدون اتم $\Omega, \sum, \mu$ فضای اندازه‌پذیر غیراتمیک نامیده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که هر فضای اندازه‌پذیر $\sigma-$متناهی $\Omega, \sum, \mu$ را می‌توان به به‌طور یکتا به‌صورت $\Omega_0 = B \cup \;\; A_j : j \in \mathbb{N}$ افراز کرد که $A_j \;\; {}_{j\in\mathbb{N}}$ گردایه‌ای شمارش‌پذیر از اتم‌های دو به‌دو مجزا است و $B \in \sum$، یک مجموعه اندازه‌پذیر غیراتمیکی است که هیچ اشتراکی با A_j ها ندارد [۲۳]. چون $\sum$، $\sigma-$متناهی است بنابراین به‌ازای هر $j \in \mathbb{N}$، داریم:

$$a_j = \mu \;\; A_j \;\; < \infty$$

عملگر خطی و کران‌دار $T : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ (E فضای باناخ است) فشرده است هرگاه به ازای هر گوی واحد بسته B_1 از E، $T \;\; B_1$ دارای بستار فشرده باشد.

قضیه۱.۳. فرض کنید M_u از $L^{\Phi_1} \;\; \Omega, \sum, \mu$ به $L^{\Phi_2} \;\; \Omega, \sum, \mu$ کران دار باشد. اگر $\alpha > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر، $\varepsilon > 0$ مجموعه $N_{\alpha,\varepsilon} \;\; u \;\; = \;\; x \in \Omega : \Phi_2 \;\; \left|u \;\; x \;\; \alpha\right| \;\; > \Phi_1 \;\; \varepsilon\left|\alpha\right|$ شامل تعداد متناهی اتم باشد، آن‌گاه M_u فشرده است.

اثبات: فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ و $N_{\alpha,\varepsilon} = N_{\alpha,\varepsilon} \;\; u \;\; = \cup_{i=1}^{n} C_n$ شامل تعداد متناهی اتم باشد. قرار می‌دهیم $u_{\alpha,\varepsilon} = u\chi_{N_{\alpha,\varepsilon}}$ و $T_{\alpha,\varepsilon} = M_{u_{\alpha,\varepsilon}}$ چون توابع $\sum-$اندازه‌پذیر روی $\sum-$اتم‌ها ثابتند و $\Omega, \sum, \mu$ یک فضای $\sigma-$متناهی است، بنابراین داریم:

$$M_{u_\varepsilon} \;\; f \;\; = \sum_{i=1}^{n} u \;\; C_i \;\; f \;\; C_i \;\; \chi_{c_i} \in \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{c_i} \; : \alpha_i \in \mathbb{C} \right\} \subseteq L^{\Phi_2} \;\; \Omega, \sum, \mu$$

پس M_{u_ε} دارای برد با بعد متناهی است. بنابراین برای هر $f \in L^{\Phi_1} \;\; \Omega, \sum, \mu$،

$$\int_{\Omega} \Phi_2\left(\frac{u-u_\varepsilon}{\varepsilon N_{\Phi_1} \;\; f}\right)d\mu = \int_{\Omega\setminus N_\varepsilon} \Phi_2\left(\frac{uf}{\varepsilon N_{\phi_1} \;\; f}\right)d\mu \le \int_{\Omega\setminus N_\varepsilon} \Phi_1\left(\frac{\varepsilon f}{\varepsilon N_{\Phi_1} \;\; f}\right)d\mu = \int_{\Omega\setminus N_\varepsilon} \Phi_1\left(\frac{f}{N_{\Phi_1} \;\; f}\right)d\mu \le 1$$

رابطهٔ بالا ایجاب می‌کند که $N_{\Phi_2}(M_u f - M_{u_\varepsilon} f) \le \varepsilon N_{\Phi_1} \;\; f$ در نتیجه M_u فشرده است.

قضیه۲.۳. اگر $\Omega, \sum, \mu$ فضای اندازه‌پذیر غیراتمیک باشد، آن‌گاه عملگر ضربی فشرده غیرصفری میان $L^{\Phi_1} \;\; \Omega, \sum, \mu$ و $L^{\Phi_2} \;\; \Omega, \sum, \mu$ وجود ندارد.

اثبات. فرض کنید $M \;\; {}_u \ne 0$ بنابراین $f \in L^{\Phi_1} \;\; \Omega$ و $A \in \sum$ با $0 < \mu \;\; A \;\; < \infty$ وجود دارند به‌قسمی که $f\chi_A \ne 0 a.e.$ چون $\Omega, \sum, \mu$ فضای غیراتمیک است، بنابراین می‌توان دنباله $A_n \;\; {}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا از هم با $0 < \mu \;\; A_n \;\; < \infty$ را به‌دست آورد. تعریف می‌کنیم. $f_n = \chi_{A_n}.f$ پس به‌ازای هر m و n که $n \ne m$ داریم: $\left|f_n - f_m\right| = \left|f\right| \;\; \chi A_n + \chi A_m$

همچنین، $E \;\; uf_n \;\; = E \;\; u \;\; f_n \ge \varepsilon_0 f_n$. با استفاده از خاصیت یکنواختی N_Φ . داریم:

$$N_{\Phi}\left(\left|E(uf_n)-E(uf_m)\right|\right)=N_{\Phi}\left(\left|E(u(f_n-f_m))\right|\right)=$$
$$N_{\Phi}\left(\left|E(u)\right|\left(\left|f_m\right|+\left|f_m\right|\right)\right)\geq N_{\Phi}\left(\left|E(u)\right|f_n\right)\geq \varepsilon_0 N_{\Phi}(f_n)=\varepsilon_0$$

بنابراین. $N_{\Phi}\left(\left|E(uf_n)-E(uf_m)\right|\right)\geq \varepsilon_0$ این رابطه نتیجه می‌دهد که T نمی‌تواند فشرده باشد.

نرم اساسی

فرض کنید $\mathcal{B}$ یک فضای باناخ و $\mathcal{K}$ مجموعه همهٔ عملگرهای فشرده روی $\mathcal{B}$ باشد. اگر $L(\mathcal{B})$ جبر باناخ از همه عملگرهای خطی کران‌دار روی $\mathcal{B}$ به خودش باشد، آنگاه به‌ازای هر $T\in L(\mathcal{B})$ فاصله از T به $\mathcal{K}$ در نرم عملگرها، $\left\|T\right\|_e=\inf\{\left\|T-S\right\|:S\in\kappa\}$ را نرم اساسی T می‌نامیم. به‌وضوح T فشرده است اگر و تنها اگر $\left\|T\right\|_e=0$. همان‌طورکه در [۱۸] دیده می‌شود، نرم اساسی یک نقش جالبی در مسائل فشردگی عملگرهای سخت ایفا می‌کند.

قضیه۱.۴. فرض کنید $u:\Omega\to\mathbb{C}$ تابع $\sum-$اندازه‌پذیر باشد و $M_u:\mathrm{L}^{\Phi_1}(\Omega,\sum,\mu)\to L^{\Phi_2}(\Omega,\sum,\mu)$

اگر $\{N_\varepsilon\}$ شامل تعداد متناهی اتم است: $\beta_2=\inf\{\varepsilon>0\}$ آنگاه:

a) $\left\|M_u\right\|_e\leq\beta_2$

b) فرض کنید $\Phi_1\in\Delta_2$ و $\mu(C_n)\to 0$ یا $\mu(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ زیر دنباله همگرایی ندارد. در این صورت:

$$\beta_2\leq\left\|M_u\right\|_e$$

اثبات: a) فرض کنید $\varepsilon>0$ آنگاه $N_{\varepsilon+\beta_2}$ شامل تعدادی متناهی اتم است. قرار می‌دهیم $u_{\varepsilon+\beta_2}=u\chi_{N_{\varepsilon+\beta_2}}$ و $M_{u_{\varepsilon+\beta_2}}$ بنابراین $M_{u_{\varepsilon+\beta_2}}$ دارای برد با بعد متناهی و همچنین فشرده است. پس برای $f\in\mathrm{L}^{\Phi_1}(\Omega,\sum,\mu)$ داریم:

$$\int_{\Omega}\Phi_2\left(\frac{(u-u_{\varepsilon+\beta_2})f}{(\varepsilon+\beta_2)N_{\phi_1}(f)}\right)d\mu=\int_{\Omega\setminus N_{\varepsilon+\beta_2}}\Phi_2\left(\frac{uf}{\varepsilon N_{\phi_1}(f)}\right)d\mu\leq\int_{\Omega\setminus N_{\varepsilon}}\Phi_1\left(\frac{\varepsilon f}{(\varepsilon+\beta_2)N_{\Phi_1}(f)}\right)d\mu$$
$$\leq\int_{\Omega\setminus N_{\varepsilon+\beta_2}}\Phi_1\left(\frac{f}{N_{\Phi_1}(f)}\right)d\mu\leq 1$$

بنابراین

$$N_{\Phi_2}(uf-u_{\varepsilon+\beta_2}f)\leq(\varepsilon+\beta_2)N_{\Phi_1}(f)$$ و نیز: $$\left\|M_u\right\|_e\leq\left\|M_u-M_{u_{\varepsilon+\beta_2}}\right\|\leq\varepsilon+\beta_2$$

در نتیجه

$$\left\|M_u\right\|_e\leq\beta_2.$$

b) فرض کنید $0<\varepsilon<\beta_2$ آنگاه بنا به تعریف، $N_{\beta_2-\varepsilon}(u)$ شامل تعدادی نامتناهی اتم یا زیرمجموعه‌ای غیراتمیک از اندازهٔ مثبت است. اگر $N_{\beta_2-\varepsilon}(u)$ شامل زیرمجموعه‌ای غیراتمیک باشد، آنگاه یک دنباله $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را می‌توان یافت که $\mu(B_n)<\infty$ و $\mu(B_n)\to 0$ قرار می‌دهیم $f_n=\frac{\chi\beta_n}{N_{\Phi_1}(\chi B_N)}$ آنگاه برای هر $A\in\sum$ و $0<\mu(A)<\infty$ داریم:

$$\int_\Omega f_n \chi A\, d\mu = \mu(A\cap B_n)\,\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B_n)}\right) \le \frac{\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B_n)}\right)}{\frac{1}{\mu(B_n)}} \to 0$$

وقتی که $n\to\infty$ همچنین اگر $N(u)_{\beta_2-\varepsilon}$ شامل تعدادی نامتناهی اتم $(C'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و قرار دهیم $f_n = \frac{\chi c'_n}{N_{\Phi_1}(\chi c'_n)}$ آنگاه به ازای هر $A\in\sum$ با $0<\mu(A)<\infty$ داریم:

$$\int_\Omega f_n \chi A\, d\mu = \mu(A\cap C'_n)\,\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\mu(C'_n)}\right)$$

اگر $(\mu(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ زیر دنباله همگرایی نداشته باشد، آنگاه وجود دارد n_0ای که به‌ازای هر $n>n_0, \mu(A\cap C'_n)=0$ و اگر $\mu(C_n)\to 0$ آنگاه $\mu(A\cap C'_n)\to 0$ بنابراین در هر دو حالت داریم:

$$\int_\Omega f_n \chi A\, d\mu = \mu(A'_n)\,\phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\mu(C'_n)}\right) \to 0$$

این رابطه ایجاب می‌کند که با همگرایی ضعیف $f_n\to 0$ همچنین:

$$\int_\Omega \Phi_1\left(\frac{(\beta-\varepsilon)f_n}{N_{\Phi_2}(uf_n)}\right)d\mu \le \int_\Omega \Phi_2\left(\frac{uf_n}{N_{\Phi_2}(uf_n)}\right)d\mu$$

بنابراین $N_{\Phi_2}(uf_n)\ge\beta_2-\varepsilon$

همچنین، عملگر فشرده $T\in L(L^{\Phi_1}(\Omega,\sum,\mu), L^{\Phi_2}(\Omega,\sum,\mu))$ وجود دارد به‌طوری‌که :

$$\|M_u\|_e \ge \|T-M_u\| - \varepsilon$$

پس $N_{\Phi_2}(Tf_n)\to 0$ و نیز $N>0$ ای وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $n>N$، $N_{\Phi_2}(Tf_n)\le\varepsilon$ بنابراین

$$\|M_u\|_e \ge \|M_u - T\| - \varepsilon \ge \left|N_{\Phi_2}(uf_n) - N_{\Phi_2}(Tf_n)\right| \ge \beta_2-\varepsilon-\varepsilon$$

در نتیجه

$$\|M_u\|_e \ge \beta_2$$

نتیجه ۴ .۲. اگر $\mu(\Omega)<\infty$ و $\Phi_1\in\Delta_2$، آنگاه $\|M_u\|_e=\beta_2$

نتیجه ۴ .۳. اگر $\mu(\Omega)<\infty$ و $\Phi_1\in\Delta_2$، آنگاه، M_u فشرده است اگر و تنها اگر $\beta_2=0$

مثال ۴ . ۴. (a) فرض کنید Ω=ℕ، μ اندازه شمارش‌پذیر روی Ω و φ تبدیل خطی یک به یکی روی Ω باشند. برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\Phi_1(n)=\frac{n^3}{3}$ و $\Phi_2(n)=\frac{n^2}{2}$ را در نظر می گیریم. اگر $u(n)=\frac{n^2}{n+1}$، آنگاه بنا به قضیه، ۱.۳ عملگرضربی M_u از $L^{\Phi_1}(\mathbb{N},\sum,\mu)$ به $L^{\Phi_2}(\mathbb{N},\sum,\mu)$ فشرده نیست و اگر $u(n)=\frac{1}{n^2}$، بنا به قضیه ۱.۳، عملگر ضربی از $L^{\Phi_1}(\mathbb{N},\sum,\mu)$ به $L^{\Phi_2}(\mathbb{N},\sum,\mu)$ فشرده است.

b) فرض کنید $\Omega = \left[0,1\right] \cup \left(\mathbb{N} - \{1\}\right)$ ($\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی). همچنین فرض کنید μ اندازهٔ لبگ روی $[0,1]$ باشد و به‌ازای هر $n \in (\mathbb{N} - \{1\})$، $\mu(\{n\}) = 1$. اگر $\Phi_1(x) = e^x - x - 1$، $\Phi_2(\mathrm{n}) = \frac{x^5}{5}$ و برای هر $x \in \Omega$، $u(x) = x^2 + 2$ را در نظر می گیریم. آن‌گاه بنا به قضیه ۳..۱ عملگر ضربی M_u از $L^{\Phi_1}(\mathbb{N}, \sum, \mu)$ به $L^{\Phi_2}(\mathbb{N}, \sum, \mu)$ فشرده نیست.

منابع

1. Abrahamse M.B., "Multiplication Operators, Lecture Notes in Mathematics", 693 (1978) 17-36.
2. Axler A., "Multiplication Operators on Bergman Spaces", J. Reine, Angew Math., 336 (1982) 26-44.
3. Arora S.C., "Gopal Datt and Satish Verma, Composition operators on Lorentz spaces", Bull., Austral, Math. Soc., 76 (2007) 205-214.
4. Douglas R.G., "Banach Algebra Techniques in Operator Theory", Academic Press, New York (1972).
5. Estaremi Y., Jabbarzadeh M.R., "Weighted lambert type operators on Lp-spaces", Oper. and Matrices, 7 (2013) 101-116.
6. Halmos P.R., "A Hilbert Space Problem Book, Van Nostr and Princeton", N.J. (1961). 7. H. Hudzik and M. Krbec, On non-effective weights in Orlicz spaces. Indag., Math. (N.S.) 18 (2007) 215-231.
8. Cui Y., Hudzik H., Kumar R., Maligranda L., "Composition operators in Orlicz spaces", J. Aust. Math. Soc., 76 (2004) 189-206.
9. Komal B.S., Gupta S., "Multiplication operators between Orlicz spaces", Integral equation and operator theory, 41 (2001) 324-330.
10. Kumar R., "ffComposition operators on Orliczspacesff", Integral Equations Operator Theory 29 (1997) 17ff22.
11. Musielak J., "Orlicz spaces and modular spaces", Lecture Notes in Math.1034 (Springer, Berlin (1983).
12. Lambert A., "Operator algebras related to measure preserving transformations of finite order", Rocky Mountain J. Math., 14 (1984) 341-349.
13. Rao M.M., "ffConvolutions of vector fieldsffII: random walk modelsff", Nonlinear Anal, Theory Methods Appl., 47 (2001) 3599-3615.
14. Raj K., Sharma S.K., Kumar A, "Multiplication operator on Musielak-Orlicz spaces", Advances and Applications in Mathmatical Sciences, 10 (2011) 473-480.

15. Montes-Rodr´ýguez A., "The essential norm of a composition operator on Bloch spaces", Pacific J. Math., 188 (1999) 339-351.

16. Singh R.K., Manhas J.S., "Composition operators on function spaces", North Holland Math., Studies 179, Amsterdam (1993).

17. Gupta S., Komal B.S, Suri N., "Weighted composition operators on Orlicz spaces", Int. J. Contemp, Math. Sciences, 1, (2010) 11-20.

18. Shapiro J.H., "The essential norm of a composition operator", Analls of Math., 125 (1987) 375-404.

19. Takagi H., "Compact weighted composition operators on Lp", Proc. Amer. Math. Soc., 116 (1992) 505-511.

20. Takagi H., "FredhoIm Weighted Composition Operators", Integral Equations and Operator Theory 16 (1993) 267-276.

21. Takagi T., Miura T., "Takahasi, Sin-Ei: Essential norm and stability constants of weighted composition operators on C(X)", Bull. Korean Math. Soc., 40, 583-591 (2003).

22. Takagi H., Yokouchi K., "Multiplication and composition operators between two Lp-spaces", Contemporary Math., 232 (1999) 321-338.

23. Zaanen A.C., "Integration, 2nd ed.", North-Holland, Amsterdam (1967).

24. Zheng L., "The essential norms and spectra of composition operators on H∞", Pacific J. Math., 203, 503-510 (2002).